

Das Mohrsche Verfahren zur Berechnung von Biegebalken mit nichtlinearem Werkstoffgesetz

Hans Irschik

0. Einleitung

Die wirklichkeitsnahe Ermittlung der Durchbiegung von Biegebalken unter Berücksichtigung nichtlinearen Werkstoffverhaltens (linear oder nichtlinear elastisch-plastisches Verhalten mit oder ohne Verfestigung) bereitet zunächst nur dann wenig Mühe, wenn – wie im Falle statischer Bestimmtheit – die vorgegebenen Beziehungen zwischen Biegemoment und Balkenkrümmung unmittelbar ausgewertet werden können (z. B.: Neal [1], S. 149, Reckling [2], S. 119, Leonhardt [3], S. 85). Hingegen ist die analytische Behandlung statisch unbestimmter Träger mit ausgedehnten nichtlinearen Bereichen meist aufwendig, wie ein in [2], S. 126 gegebenes Beispiel zeigt.

Nun liegt für Tragwerke aus Stählen ohne merkliche Verfestigung im betrachteten plastischen Bereich mit der Fließgelenktheorie ein bereits sehr weit entwickeltes Verfahren vor (Rubin und Vogel [4], S. 159). Dieses ist aber gerade im Hinblick auf die Durchbiegungsermittlung in seiner Aussagekraft beschränkt, weil die Ausbildung plastischer Zonen auf Grund der verwendeten idealisierten Momenten-Krümmungsbeziehung eben nur in diskreten weit entfernten Querschnitten des Trägers auftritt und damit die Steifigkeit zwischen diesen Fließgelenken überschätzt wird. (Für Vergleichsrechnungen siehe z. B. Dorosz [5], Dorosz und Sawzuk [6]). Auch treten bei vergüteten Stählen oder Leichtmetalllegierungen merkliche Verfestigungserscheinungen auf ([2], S. 2). Stahlbetonträger verhalten sich nicht-linear elastisch im Zustand II (bei Erstbelastung) und plastisch mit Verfestigung im Zustand III (z. B. [3], S. 85).

Es besteht also wohl – trotz der großen Bedeutung der Fließgelenktheorie zur Traglastermittlung (auch bei Stahlbeton [3], S. 149) – ein Bedarf nach einfachen numerischen Verfahren, welche möglichst unabhängig von der Art des verwendeten Baustoffes die Ermittlung von Durchbiegung und zugehörigen Schnittgrößen auch bei endlicher Ausdehnung der nichtlinearen Effekte in Trägerlängsrichtung erlauben. Dabei muß die Berücksichtigung zyklischer Be- und Entlastungsprogramme möglich sein. Zum Vorteil des Benutzers sollte die Vorgangsweise als Erweiterung der Fließgelenkmethode erkannt werden können, und es sollten dabei Verfahren der klassischen linearen Baustatik Verwendung finden.

Die vorliegende Arbeit soll ein Beitrag in dieser Richtung sein. Zum Ausgangspunkt genommen wird die von Lin [7] entwickelte Vorgangsweise, einen festen Körper mit „inelastischer“ Beanspruchung als einen linear-elastischen zu behandeln, dem zusätzliche Volumen- und Oberflächenkräfte eingepreßt sind.

Unter „inelastisch“ wird in [7] nicht nur elastisch-plastisches oder viskoses Verhalten, sondern auch elastische

Wärmebeanspruchung verstanden. Das Verfahren ist eine Verallgemeinerung einer bereits von H. Reißner [8] für Eigenspannungszustände angegebenen Theorie und schließt die aus der Thermoelastizitätstheorie bekannte Goodiersche Methode [9] mit ein. Mit Hilfe dieser Sicht der Theorien wurden eine Reihe zwei- und dreidimensionaler Probleme erfolgreich gelöst; Lins Arbeit hat dann auch die Entwicklung entsprechender Computerverfahren nach sich gezogen (für die Methode der Randelemente etwa [10], [11]). Die von Lin und Mitautoren gegebene Aufbereitung für Biegeträger ([12]; [7], S. 128; [13] für Rahmen; [14] für dynamische Probleme) erscheint allerdings doch grundsätzlich verbesserungsfähig zu sein: So sind nach [12], [7] und [13] einem Ersatzträger erste Ortsableitungen noch zu ermittelnder Größen (siehe letzter Term in Gl. (2) dieser Arbeit) als äußere Momentenbelastung einzuprägen; in [14] wird mit fiktiven Querbelastungen gearbeitet, die zweite Ableitungen einer numerisch zu bestimmenden Funktion darstellen (vgl. letzten Term in Gl. (1) dieser Arbeit).

Gelingt auch im ersten Falle die Beseitigung des rechen-technischen Nachteils numerischer Differentiation mittels eines Integralsatzes, ist doch eine geschachtelte Vorgangsweise zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen erforderlich; dabei muß der Veränderung „dynamischer“ Randbedingungen (Biegemomente und Querkräfte betreffend) zufolge der Werkstoffnichtlinearität durch Einprägen zusätzlicher äußerer Lasten Rechnung getragen werden.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb eine alternative Strategie vorgestellt. Die nichtlinearen Effekte werden problemangepaßt als fiktive Temperaturbeanspruchung des gegebenen Trägers unter Annahme linear-elastischen Verhaltens gedeutet. Es wird gezeigt, daß es sich dabei um eine vollständige Analogie handelt, so daß mit den originalen Lagerungsbedingungen des Balkens gearbeitet werden kann. Diese neue Methode berücksichtigt einerseits direkt, daß die nichtlinearen Zonen im statisch unbestimmten Träger die linear-elastische Rechnung ja nur um lineare Zwängungsschnittgrößenverteilungen ändern können, andererseits ist die Differentiation numerisch gewonnener Ergebnisse nicht erforderlich. Die guten Kenntnisse des Ingenieurs betreffend „Temperaturbeanspruchung in linear elastischen Biegebalken“ sollen angesprochen werden.

Mit Hilfe der Analogie wird die Durchbiegung des stofflich nichtlinearen Balkens also in den linear-elastischen Anteil zufolge der gegebenen Belastung und in eine linear-thermoelastische Durchbiegung zufolge noch unbekannter Temperaturbeanspruchung zerlegt. Der erste Anteil darf als bekannt vorausgesetzt werden. Als baustatisch besonders vorteilhaftes Verfahren zur Er-

mittlung des zweiten Anteils wird das Mohrsche Verfahren erkannt, welches auch im Licht neuer Arbeiten (z. B. [4], S. 105) seine grundsätzliche Bedeutung erhalten hat, und – wie Gamer [15], [16] gezeigt hat – für Temperaturbeanspruchung ein Minimum an Arbeitsaufwand gewährleistet.

Ausgehend von dieser Analogie und der entsprechenden Mohrschen Formulierung wird dann eine numerische Methode zur Ermittlung der fiktiven Temperaturbeanspruchung angegeben; diese erscheint für unterschiedliche Baustoffe und Trägerquerschnittsformen gleich geeignet. Die Vorgangsweise wird an Testbeispielen erläutert. Es wird diskutiert, wie das Fließgelenkverfahren mit seiner speziellen Biegemomenten-Krümmungsbeziehung als Sonderfall der vorgestellten numerischen Methode aufgefaßt werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird quasistatische Beanspruchung zufolge Querbelastung behandelt; eine Aufbereitung für dynamische Probleme erfolgt in [17]. Die Berücksichtigung von Temperaturbelastung, Normalkraftbeanspruchung oder Schubdeformation sowie die Berechnung von Rahmentragwerken sollen zu einem späteren Zeitpunkt vorgestellt werden. Auch über Kriecherscheinungen wird gesondert berichtet.

1. Eine vollständige Analogie zwischen Balken mit linearem und nichtlinearem Werkstoffgesetz

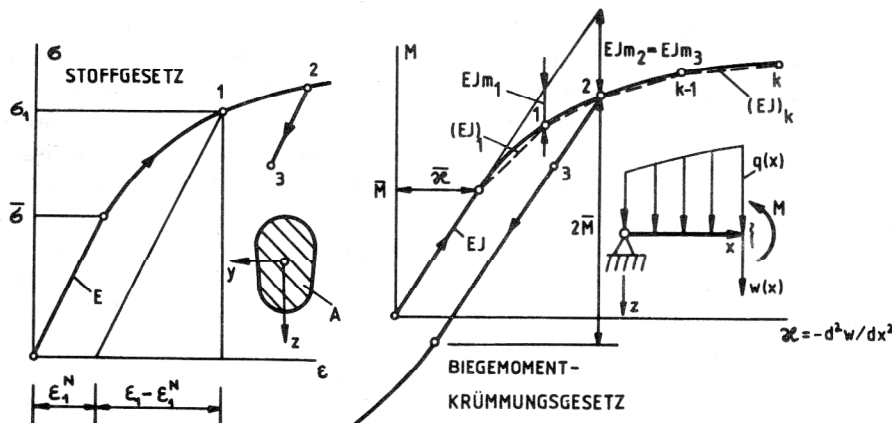
Das Problem der ebenen Biegung gerader, normalkraftfreier Stäbe mit eingepprägter Querbelastung q führt nach Lin ([7], S. 128, 352) bei einachsigem nichtlinearem Werkstoffgesetz (Bild 1a) auf die folgende Integrodifferentialgleichung für die Durchbiegung w (Bernoulli-Euler Hypothese, geometrisch linearisierte Beziehungen werden vorausgesetzt):

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{EJ} - \frac{1}{J} \frac{d^2}{dx^2} \int_A \epsilon^N z dA. \quad (1)$$

Biegemomente und Querkräfte ergeben sich aus w zu:

Bild 1

- a) Nichtlineares Stoffgesetz; Definition von ϵ^N
- b) Qualitative nichtlineare Biegemomenten-Krümmungsbeziehung des Querschnittes A; Definition von m ; - - - mögliche lineare Approximation



$$M = -EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{J} \int_A \epsilon^N z dA \right); \quad Q = \frac{dM}{dx}. \quad (2)$$

EJ ist eine (im jeweiligen Integrationsabschnitt konstante) Vergleichsbiegesteifigkeit des Stabquerschnittes A (vgl. Bild 1b); zweckmäßigerweise werden meist Anfangsmodul und tatsächliches Trägheitsmoment (bei Stahlbeton jenes im Zustand I) zu wählen sein.

Man erkennt, daß die nichtlinearen Dehnungen ϵ^N nicht nur die vom linearen Fall her bekannte Differentialgleichung der Biegelinie:

$$\frac{d^4 w^*}{dx^4} = \frac{q}{EJ}; \quad (3)$$

sondern auch die entsprechende Schnittgrößenbeziehung:

$$M^* = -EJ \frac{d^2 w^*}{dx^2} \quad (4)$$

modifizieren. Damit ändert sich der mathematische Charakter des Problems, weil der nichtlineare Term im (1) wegen (2) nicht direkt als fiktive Querbelastung gedeutet werden kann. Es ist auch ersichtlich, daß die in w formulierten dynamischen Randbedingung von (1) (und ebenso die Übergangsbedingungen bei Einzelwirkungsanriffen) gegenüber (3), (4) geändert werden.

Ein Problem der Art (1), (2) ist aber doch aus der linearen Stabstatik bekannt: Das (normalkraftfreie) Biegeproblem zufolge eingepprägter Temperaturverteilung Θ führt auf:

$$\frac{d^4 w^{**}}{dx^4} = \frac{d^2 m}{dx^2}, \quad (5)$$

$$M^{**} = -EJ \left(\frac{d^2 w^{**}}{dx^2} + m \right), \quad (6)$$

wobei die Temperaturbeanspruchung durch das Integral

$$m = \frac{\alpha}{J} \int_A \Theta z dA \quad (7)$$

gegeben ist. α ist der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient; m wird – als erstes Querschnitts-Moment der Temperaturverteilung Θ – oft „Temperaturmoment“ genannt. (Die wohl auf Boley [18] zurückgehende und von Parkus [19], S. 296 zweckmäßig aufbereitete Formulierung (5), (6), (7) erlaubt, beliebige Temperaturverteilungen $\Theta(x, z)$ ebenso einfach (und genau) wie jene zu be-

handeln, die nur linear über den Querschnitt verteilt sind.)

Aus dem Vergleich der bisher angegebenen Beziehungen ergibt sich nun eine vollständige (auch die Randbedingungen betreffende) Analogie:

Setzt man:

$$\epsilon^N = \alpha \Theta, \text{ also } m \equiv \frac{1}{J} \int_A \epsilon^N z dA, \quad (8)$$

so gilt:

$$w \equiv w^* + w^{**}, \quad M \equiv M^* + M^{**}. \quad (9)$$

Es werden also Durchbiegung und Schnittgrößen in den linear-elastischen Anteil zufolge der gegebenen Belastung q und in einen linear-thermoelastischen Anteil zufolge fiktiver Temperaturbeanspruchung m zerlegt. Jedes (lineare) Verfahren, das zur Durchbiegungsbestimmung zufolge m dient, kann zur Ermittlung der nichtlinearen Korrektur w^{**} von w^* herangezogen werden.

Die Vollständigkeit der Analogie zeigt sich anschaulich in den Ausdrücken für die Spannungen: Nach [19], S. 297 gilt für linear-elastische Biegebalken zufolge q und Θ :

$$\sigma = \frac{M}{J} z + E(mz - \alpha \Theta); \quad (10)$$

aus [7], S. 132 ist bei inelastischem Materialverhalten:

$$\sigma = \frac{M}{J} z + E\left(\frac{z}{J} \int_A \epsilon^N z dA - \epsilon^N\right). \quad (11)$$

Lin selbst hat ja in [7] – nur von der Bezeichnung her unglücklich – linear thermoelastische Beanspruchungen zu den „inelastischen“ gezählt.

Die Zweckmäßigkeit der Analogie erscheint auch dadurch gegeben, daß die nichtlinearen Effekte die lineare Rechnung ja nur zufolge von Zwängungsschnittgrößen ändern können; genau solche Schnittgrößenverteilungen werden aber durch Wärmespannungen hervorgerufen: M^{**} verläuft abschnittsweise linear, Q^{**} abschnittsweise konstant. Beide verschwinden in statisch bestimmten (oder durch Fließgelenke bestimmt gewordenen) Trägern. Würden hingegen die letzten Terme in (1), (2) als äußere Lasten gedeutet werden, müßte – wie in [7], [12], [13] – eine indirekte Vorgangsweise entwickelt werden, um die Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen.

Die Lösung des Problems (3), (4) wird als bekannt vorausgesetzt; der statische Teil der Aufgabe beschränkt sich nur mehr auf die Ermittlung der Durchbiegung zufolge m . Es wird als Mohrsche Verfahren gewählt (vergleiche [15], [16]), welches auf der Analogie von (6) mit der Gleichgewichtsbeziehung

$$q = -\frac{d^2 M}{dx^2} \quad (12)$$

beruht. Der bei statisch unbestimmten Originalträgern statisch unterbestimmte adjungierte Ersatzträger wird also mit $m + M^{**}/EJ$ qucrbelastet. Dieser Ersatzträger muß sich im Gleichgewicht befinden; daraus, und weil der Verlauf der thermoelastischen Momentenlinie qualitativ bekannt ist, kann M^{**} leicht ermittelt werden; w^{**} folgt dann durch Integration als Biegemoment im Ersatzträger.

2. Das numerische Verfahren

Um m numerisch darzustellen, wird der Träger in Intervalle unterteilt und der Verlauf von m zwischen Stützstellenwerten (ausreichend genau linear) analytisch angenähert. M^{**} und w^{**} können dann als Funktion dieser Stützstellenwerte vorneweg mittels der Mohrschen Analogie aus Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Es wird hervorgehoben, daß dabei auch die geometrischen Verträglichkeitsbedingungen im gesamten Träger erfüllt bleiben.

Dieser linear-elastischen Statik wird jetzt das jeweils zu Grunde liegende Werkstoffgesetz gegenübergestellt, welches im einachsigen Fall über die Querschnittsform in einer (lokalen und nichtlinearen) Biegemomentenkrümmungsbeziehung seinen alleinigen Ausdruck findet und aus $M = \int \sigma(\epsilon) z dA$ sowie der Bernoulli-Euler Hypothese mit $\epsilon = -z d^2 w/dx^2$ folgt (vgl. A Bild 1 b). Beispiele für diese (erstmalig von Hrennikoff [20] verwendeten) Beziehungen finden sich in der oben zitierten Literatur.

Nun kann aber in solchen Diagrammen wegen Gl. (2) EJm sofort als Differenz zwischen der Geraden mit der Steigung EJ und der gekrümmten Funktion erkannt werden (vgl. Bild 1 b), womit auch $m(M)$ explizit bekannt ist. Im folgenden wird angenommen – was bei der unten gewählten Vorgangsweise immer der Fall sein wird – daß damit auch die Umkehrfunktion $M(m)$ leicht angegeben werden kann.

Die wesentliche Näherung besteht dann darin, daß die Identität $M(m) \equiv M^* + M^{**}$ zur Bestimmung von m eben nur an den Stützstellen ausgewertet wird, welche aber über die nichtlinearen Trägerabschnitte verteilt und dabei beliebig nahe nebeneinander liegend gewählt werden können. Daraus ergibt sich das benötigte Gleichungssystem für die l Stützstellenwerte m_j , $j = 1, \dots, l$. Es besteht aus einem linearen Teil $\vec{M}^{**} = [M_1^{**}, \dots, M_l^{**}]^T$, dessen Koeffizientenmatrix \underline{G}^{**} die mittels des Mohrschen Verfahrens errechneten thermoelastischen Momenteinflußzahlen zusammenfaßt, dem nichtlinearen Vektor $\vec{M} = [M_1(m_1), \dots, M_l(m_l)]^T$, der die $M(m)$ Beziehungen an den Stützstellen wiedergibt, und einem Störvektor \vec{M}^* , welcher die entsprechenden Werte von M^* enthält: $\vec{M}^* = [M_1^*, \dots, M_l^*]^T$. Damit wird:

$$-\vec{M}^{**} + \vec{M} = \vec{M}^*, \text{ wobei:} \quad (13)$$

$$\vec{M}^{**} = \underline{G}^{**} \vec{m} \text{ und } \vec{m} = [m_1, \dots, m_l]^T.$$

Dies stellt ein Analogon für das von Lin [7], S. 157 auf anderem Weg (und mit anderem mechanischen Hintergrund sowie speziell für I-Profile) angegebene Gleichungssystem zur Ermittlung der letzten Terme in (1), (2) dar und könnte mit beliebigen Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme weiter behandelt werden.

Oft sind detaillierte Belastungsgeschichten zu verfolgen, so daß zweckmäßigerweise inkrementell formuliert wird:

$$(\underline{M}' - \underline{G}^{**}) d\vec{m} = d\vec{M}^*, \quad (14)$$

wobei für die Diagonalmatrix \underline{M}' gilt:

$$\vec{M}' = \text{diag} \left[\frac{dM_1}{dm_1}, \dots, \frac{dM_j}{dm_j} \right], \quad (15)$$

und \vec{dm} , \vec{dM}^* die Inkremente der jeweiligen Vektoren bedeuten.

Sicherlich gestaltet sich die Lösung dann besonders einfach, wenn $M_j(m_j)$ stückweise linear verläuft. Es wird deshalb vorgeschlagen, die jeweils vorgegebenen Biegemomenten-Krümmungsbeziehungen (hinreichend genau) linear zu approximieren (Bild 1 b); so eine Vorgangsweise ist bei numerisch (punktweise aus Experimenten) ermittelten Verläufen ohnehin erforderlich. Die dM_j/dm_j sind dann die Steigungen der den betrachteten Inkrementen zugehörigen Geradenstücke.

In den folgenden Beispielen wird darüber hinaus der inversen Frage nachgegangen, um welches Inkrement eine gegebene proportionale Belastungsgruppe gerade zu steigern ist, damit eine neue Stützstelle das elastische Grenzmoment bzw. einen weiteren Knick in der $M_j(m_j)$ -Kurve erreicht. Auf diese Weise kann die Größe des jeweiligen linearen Gleichungssystems, das heißt die Anzahl der Stützstellen im nichtlinearen Bereich, auf einem Minimum gehalten werden, und es haben sich bei den Testrechnungen Iterationen weitgehend erübrigt. Die Ausbreitung der nichtlinearen Zonen im Träger wird dabei kontrolliert verfolgt, weil eine Abweichung vom vorgegebenen $M_j(m_j)$ -Pfad unmöglich ist. Jedenfalls wirkt sich vorteilhaft aus, daß der größte Teil des Gleichungssystems – nämlich die Koeffizienten von \vec{G}^{**} – von vorneherein zur Verfügung stehen und von Laständerungen unberührt bleiben; der benötigte Rang von \vec{G}^{**} muß nur entsprechend der jeweiligen Ausbreitung der nichtlinearen Zonen verändert werden, worüber die aktuelle Momentenlinie und ihr linear elastisches Inkrement \vec{dM}^* Aufschluß geben. Auch läßt sich die benötigte Funktion $M(m)$ dann leicht angeben: Im k -ten Abschnitt der linearisierten Biegemomenten-Krümmungsbeziehung gilt nämlich (Bild 1 b):

$$M = (EJ)_k (\kappa - \kappa_{k-1}) + M_{k-1}, \quad \kappa = - \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (16)$$

so daß mit Gl. (2)

$$(M - M_{k-1}) = (EJ)_k (m - m_{k-1}) / (1 - (EJ)_k / EJ) \quad (17)$$

mit $\text{sign} M = \text{sign} m$ und $|M_{k-1}| \leq |M| \leq |M_k|$. Für $EJ_k = EJ$ wird $m = m_{k-1}$.

Die inkrementelle Formulierung lautet entsprechend:

$$dM = (EJ)_k dm / (1 - (EJ)_k / EJ), \quad (18)$$

wobei also $dm = 0$ bei $(EJ)_k = EJ$, was insbesondere für die Entlastung bedeutsam ist.

Die Entlastung kann nichtlinear-elastisch oder linear (z. B. von (2) nach (3) in Bild 1) vor sich gehen, im letzteren Fall ist $m_j = \text{const}$, solange, bis an der betrachteten Stützstelle wieder der nichtlineare (stückweise linear angenäherte) Ast der Biegemomentenkrümmungsbeziehung erreicht ist. Während dieser Entlastung entlang der Geraden mit der Steigung EJ ist $dm_j = 0$ bzw. $dM_j = dM_j^*$; danach tritt wieder ein dm_j als Unbekannte in das Gleichungssystem (14) ein.

Hat man es mit mehreren Lastgruppen zu tun, die mit unterschiedlichen Lastfaktoren beaufschlagt sind, dann

kann die Belastungsgeschichte (genügend fein) in proportionale Abschnitte geteilt und die Vorgangsweise für jede dieser Laststufen getrennt durchgeführt werden.

3. Zusammenhang zum Fließgelenkverfahren

Beim klassischen Verfahren erfolgt die baustatische Berücksichtigung eines Fließgelenks auf zwei Wegen ([4], S. 160):

Es kann erstens als Gelenk mit bekanntem, eingepprägtem Doppelmoment angesehen werden, was zu einer Systemänderung führt. Erreicht also eine Stützstelle im Momenten-Krümmungsdiagramm das volle plastische Moment (unter Ausschöpfung der Querschnittsreserve) dann stoppt das vorher angegebene Berechnungsverfahren, und \vec{G}^{**} , \vec{M}^* werden für das neue System berechnet, worauf der Algorithmus von vorne beginnt. Die Ausbreitung der plastischen Zonen zwischen den Gelenken wird dabei voll berücksichtigt. Das klassische Fließgelenkverfahren stellt dabei insofern einen Sonderfall dar, als sich auf Grund der dort angenommenen bilinearen Biegemomenten-Krümmungsbeziehungen mit horizontalem Ast solche Zonen eben nicht bilden können. Der zweite Weg besteht darin, das Fließgelenk als Querschnitt mit eingepprägtem Knickwinkel anzusehen, wobei keine Systemänderung auftritt, aber der Knickwinkel als zusätzliche Unbekannte hinzukommt. Die vorliegende Methode liefert diesen Winkel sofort als Knick in der Momentenlinie des Mohrschen Ersatzträgers zufolge fiktiver Einzellasten – biegender heißer Flecke – am Ort des Fließgelenks.

4. Testbeispiele

Um das numerische Verfahren zu illustrieren, werden mehrere Testbeispiele vorgestellt.

Zunächst wird ein beiderseits starr eingespannter Balken (Bild 2 a) unter Doppelmomentbelastung behandelt. Die Momentenlinie M^* ist in Bild 2 b dargestellt; da sie abschnittsweise konstant verläuft, erübrigt sich eine Unterteilung des Balkens mittels Stützstellen; es braucht nur mit den Bereichen 1, 2 gearbeitet zu werden, so daß:

$$\vec{M}^* = M_A [4/5, -1/5]^T. \quad (19)$$

In diesen Bereichen müssen dann auch die (gegebenenfalls auftretenden) m_j , $j = 1, 2$ konstant sein. Aus Symmetriegründen muß zudem M^{**} im gesamten Träger konstant verlaufen. Der mit $m + M^{**}/EJ$ zu belastende Ersatzbalken schwebt frei; Gleichgewicht liefert (Bild 2 c):

$$\vec{G}^{**} = (-EJ/5) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Es wird ein bilineares Biegemomenten-Krümmungsgesetz (etwa: I-Profil aus verfestigendem Metall) nach Bild 3 betrachtet; mit Gl. (17) folgt:

$$M_j = \begin{cases} M_j^* & \text{für } |M_j^*| \leq \bar{M} \\ \pm \bar{M} + EJm_j/3 & \text{für } |M_j^*| \geq \bar{M}, \quad j=1,2. \end{cases} \quad (21)$$

Wird der Träger einer proportional steigenden Erstbelastung unterworfen, genügt es, mit der finiten Beziehung

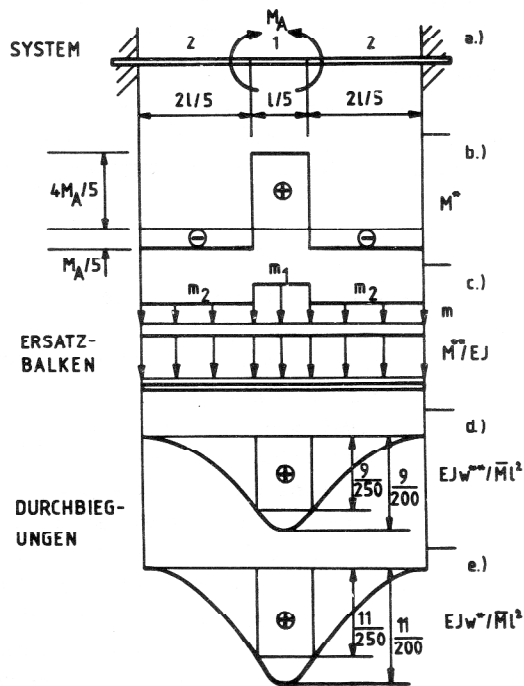


Bild 2
 Beiderseits eingespannter Balken unter Doppelmomentbelastung M_A
 a) Systemabmessungen
 b) Linear-elastische Momentenlinie M^*
 c) Ersatzträger unter fiktiver Querlast $(m + M^{**}/EJ)$
 d) Dimensionsloser Durchbiegungsanteil EJw^{**}/Ml^2 nach proportionaler Belastung bis zum Plastifizieren in 2
 e) Zugehörige linear-elastische Durchbiegung EJw^*/Ml^2

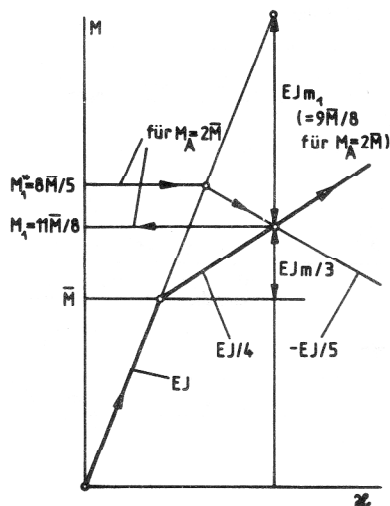


Bild 3
 Biegemomenten-Krümmungsbeziehung für den Träger aus Bild 2 (13) zu arbeiten; Fließen wird (vgl. (19)) zuerst im Bereich 1 dann in 2 auftreten. Die Frage, wann letzteres gerade der Fall ist, liefert (mit $M_2 = -\bar{M}$, $m_2 = 0$) das folgende lineare Gleichungssystem für m_1 und die zugehörige Last \tilde{M}_A :

$$(EJ/5) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{m}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + (EJ/3) \begin{bmatrix} \tilde{m}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{M} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (\tilde{M}_A/5) \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

woraus: $\tilde{M}_A = 11\bar{M}/4$; $\tilde{m}_1 = 9\bar{M}/4EJ$; $\tilde{M}_j^{**} = -9\bar{M}/20$, $j = 1, 2$.

Die entsprechenden Durchbiegungen sind (als Biegemomente im Mohrschen Ersatzträger) in Bild 2d, e) angegeben.

Ist $M_A \leq \tilde{M}_A$, so gilt (mit $m_2 = 0$): $m_1 = (12M_A - 15\bar{M})/8EJ$, also etwa für $M_A = 2\bar{M}$: $M_1 = 11\bar{M}/8$, was Lin [7], S. 161 auf anderem Weg erhalten hat. Die graphische Ermittlung dieses Ergebnisses ist in Bild 3 dargestellt.

(Selbstverständlich kann bei nur einer Unbekannten ohne weiteres mit nichtlinearen Biegemomenten-Krümmungsbeziehungen gearbeitet werden.)

Ist hingegen $M_A > \tilde{M}_A$ hat man das Gleichungssystem

$$(EJ/5) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} + (EJ/3) \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} + \bar{M} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (M_A/5) \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

zu lösen, was auf $m_1 = (12M_A/5 - 87\bar{M}/20)/EJ$, $m_2 = (33\bar{M}/20 - 3M_A/5)/EJ$ führt.

Dieses Beispiel eines Einfeldträgers zeigt bereits alle wesentlichen Merkmale des numerischen Verfahrens, allerdings ist für $M^* = \text{const.}$ die Ausbreitung der nichtlinearen Zonen längs der Trägerachse vorerst unbekannt. Der Träger wird deshalb in Intervalle unterteilt und der Verlauf von m zwischen den die Intervalle trennenden Stützstellen näherungsweise analytisch vorgeschrieben. In der vorliegenden Arbeit wird eine Treppenfunktionsapproximation gewählt, was einer direkten Erweiterung des obigen (im Rahmen der Theorie exakten) Beispiels entspricht und sich bei Vergleichsrechnungen als genau genug erwiesen hat.

Die Vorgangsweise wird im folgenden am durchlaufenden Mehrfeldträger auf n Stützen demonstriert. Die Flächenträgheitsmomente seien abschnittsweise konstant, also etwa im i -ten Feld (links von der i -ten Stütze) J_i mit $i = 1, \dots, n-1$. Die linear elastischen Lösungen w^* , M^* zufolge der eingepprägten Querbelastung q werden als bekannt vorausgesetzt. Das i -te Feld, welches l_i lang ist, wird in r_i Intervalle unterteilt, und der Verlauf von m im Intervall j wird näherungsweise konstant zu m_{ij} gesetzt, wobei $j = 1, \dots, r_i$. Ist s_{ij} die Länge dieses Intervalls (also $l_i = \sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}$), dann kann das fiktive Temperaturmoment am Mohrschen Ersatzbalken statisch äquivalent durch die „Einzellast“

$$\Phi_{ij} = m_{ij} s_{ij} \quad (24)$$

ersetzt werden, welche in der Intervallmitte angreift. Das Mohrsche Verfahren läßt sich nun, wie Gamer in [15] gezeigt hat, auf den thermoelastischen Dreimomentensatz

zurückführen. Dieser lautet mit den verwendeten Bezeichnungen in inkrementeller Form

$$dM_{k-1,ij}^{**} \frac{l_k}{J_k} + 2dM_{k,ij}^{**} \left(\frac{l_k}{J_k} + \frac{l_{k+1}}{J_{k+1}} \right) + dM_{k+1,ij}^{**} \frac{l_{k+1}}{J_{k+1}} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq i, k \neq i-1, \\ -6E \left(1 - \frac{\eta_{ij}}{l_i}\right) d\Phi_{ij} & \text{für } k=i, \\ -6E \frac{\eta_{ij}}{l_i} d\Phi_{ij} & \text{für } k=i-1. \end{cases}, k=1, \dots, n-2. \quad (25)$$

Dabei ist E der (globale Anfangs-)Elastizitätsmodul, η_{ij} ist der Hebelarm von Φ_{ij} zur i -ten Stütze, und die $dM_{k,ij}^{**}$ sind die Inkremente der Stützmomente im Lager k zufolge eines fiktiven Temperaturmomentinkrements $d\Phi_{ij}$ im j -ten Intervall des i -ten Feldes.

Nach Lösung dieser statischen Aufgabe erfolgt die Ermittlung des aus den $d\Phi_{ij}$ mit Gl. (24) entsprechend gebildeten Vektors dm nach Gl. (14) in der geschilderten Weise. Insbesondere kann – da die Zwängungsmomentenverteilung M zwischen den Balkenstützen linear verläuft – die zugehörige Einflußmatrix G^{**} aus (25) leicht mittels des Strahlensatzes angegeben werden.

Sind die $d\Phi_{ij}$ für das aktuelle Lastinkrement – oder jenes Lastinkrement, bei dem eine neue Stützstelle in den nichtlinearen Bereich eintritt – berechnet, liegt die inelastische inkrementelle Biegemomentenkorrektur dM^{**} fest, wobei in den Auflagern

$$dM_k^{**} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{r_i} dM_{k,ij}^{**} \quad (26)$$

übertragen wird.

Man erhält dann die inkrementelle Durchbiegungskorrektur dw^{**} als Biegemoment in der kinematischen Ersatzträgerkette. Diese ist ja – etwa im i -ten Feld – durch dM^{**}/EJ_i sowie durch die Φ_{ij} belastet, wobei $j=1, \dots, r_i$ sowie $i=1, \dots, n-1$; sie befindet sich unter dieser Belastung im Gleichgewicht. Bei der Ermittlung der zugehörigen Biegemomente im i -ten Feld des Ersatzträgers wird dann zweckmäßigerweise die Ersatzträgergelenkkraft an der Stelle der i -ten Balkenstütze verwendet, vgl. [15].

Als einfaches Anwendungsbeispiel wird der unendlich lange, äquidistant gestützte Träger betrachtet; die Trägheitsmomente der Felder sollen gleich groß sein. Dann wird $d\Phi_{ij} = \text{const.}$ für alle i bei festem j . Läßt man nun $d\Phi_j$ im Intervall j jedes Feldes zugleich angreifen, werden auch die entsprechenden Stützmomentinkremente $dM_{k,j}^{**} = dM_{,j}^{**} = \text{const.}$ im ganzen Träger. Aus dem Dreimomentensatz (25) kann somit die einfache Beziehung

$$dM_{,j}^{**} = -EJd\Phi_j/l. \quad (27)$$

abgeleitet werden, wobei l die Feldlänge bedeutet. Ist die eingeprägte Belastung zusätzlich symmetrisch zur Feldmitte, wählt man eine gerade Anzahl symmetrisch angeordneter Intervalle; j bezeichnet dann gemeinsam jene

beiden Mengen von Intervallen, deren $d\Phi$ aus Symmetriegründen gleiche Werte annehmen müssen.

Weiter sind – weil dM^{**} im ganzen Träger konstant verläuft – alle Komponenten einer Spalte der Matrix G^{**} gleich und es wird das thermoelastische Biegemoment in allen Stützstellen zufolge der in den Intervallen j wirkenden $dm_j = 1$:

$$G_{,j}^{**} = -2EJs_j/l, \quad j=1, \dots, r/2. \quad (28)$$

s_j ist die Länge des j -ten Intervalls, r die Anzahl der Intervalle im Feld.

Der Durchlaufträger verhält sich also jetzt wie ein beiderseits starr eingespannter Einfeldträger. Einen solchen unter konstanter Belastung $q = q_0 = \text{const.}$ hat Lin in [7] S. 161 – 171 behandelt, vgl. Bild 4, wobei die in Tabelle 1 angegebene Biegemomenten-Krümmungsbeziehung verwendet wurde. In Bild 4 sind die weiter benötigten Bezeichnungen definiert. Wie in [7] wird der Frage nachgegangen, wie weit die Belastung zu steigern ist, bis in $x = 0,02l$ das elastische Grenzmoment – \bar{M} erreicht ist; sodann wird die Belastung solange reversiert, bis die gleiche Stelle wieder plastiziert. Es werden drei Intervalle mit $s_1 = 0,005l$, $s_2 = 0,01l$, $s_3 = 0,01l$ betrachtet; aus Vergleichsgründen werden (im Gegensatz zur oben vorgeschlagenen Vorgangsweise) als Stützstellen das Trägersauflager (0) sowie die Mitten der Intervalle 2 und 3 gewählt.

Das linear-elastische Moment M^* kann Bild 4 entnommen werden; es ist $M_0^* = -0,0833q_0l^2$, $M_2^* = -0,0784q_0l^2$, $M_3^* = -0,0735q_0l^2$. Das Trägersauflager erreicht somit das elastische Grenzmoment bei $q_0 = 378 A_f h/l^2$ (Dimensionen werden beibehalten, um eine leichte Gegen-

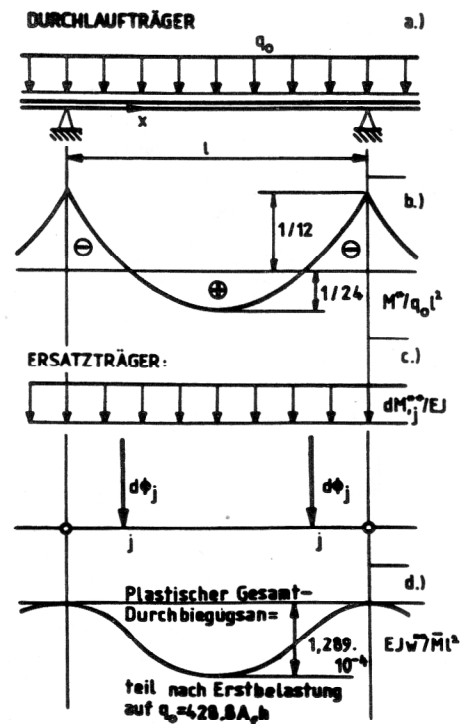


Bild 4
 Durchlaufträger unter konstanter Belastung p_0
 a) Systemabmessungen eines Feldes
 b) Linear elastische Momentenlinie M^*
 c) Ersatzträger unter $d\Phi_j + dM_{,j}^{**}/EJ$
 d) Dimensionslose Durchbiegung EJw^*/Ml^2 die nach proportionaler Belastung bis $-\bar{M}$ in $x = 0,02l$ auftritt

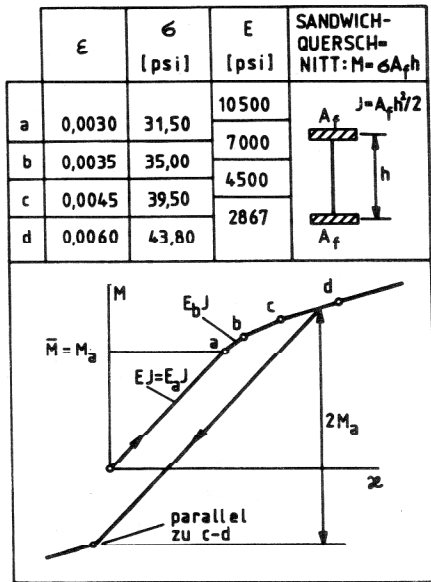


Tabelle 1
Stoffgesetz und Querschnittsabmessungen des Trägers aus Bild 4.

überstellung mit [7] zu ermöglichen.) Dann wird $M_0 = M_0^* = -31,50 A_f h$, $M_2 = M_2^* = -29,65 A_f h$, $M_3 = M_3^* = -27,80 A_f h$. Nun wird nach jenem Lastinkrement gesucht, bei dem die Stützstelle 2 das elastische Grenzmoment erreicht. Aus Gl. (32) folgt $G^{**} = -0,01 EJ$; aus Tabelle 1 entnimmt man $E = 31,50/0,0030 = 10,5 \cdot 10^3$ und $E_b = 3,50/0,0005 = 7,0 \cdot 10^3$. Gleichung (18) liefert damit $dM_0/dm_1 = 2,00 EJ$. Das Biegemoment in 2 wird um $dM_2 = -(31,50 - 29,65) A_f h = -1,85 A_f h$ verändert. Daraus ergibt Gl. (14) das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2,00 EJ dm_1 + 0,01 EJ dm_1 &= -0,0833 dq l^2, \\ -1,85 A_f h + 0,01 EJ dm_1 &= -0,784 dq l^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Die Lösung ist $dq = 24,36 A_f h/l$, $dm_1 = -1,01 A_f h/EJ$. Gl. (33) stimmen mit dem von Lin [7], S. 165 auf anderem Wege gefundenen Gleichungssystemen zur Bestimmung des letzten Terms von Gl. (1) gut überein. (Im weiteren Gang der Rechnung ergeben sich kleine Differenzen, weil in [7] teilweise mit Sekantenmoduli gearbeitet wird). Es folgt $dM_0 = -2,02 A_f h$, $dM_3 = -1,78 A_f h$. Das Lastinkrement, bei dem in 0 das Biegemoment $-M_b$ erreicht wird, folgt mit

$$\begin{aligned} dM_0/dm_1 &= 2,00 EJ, \\ dM_0 &= -(35,00 - 31,5 - 2,02) A_f h = -1,48 A_f h, \end{aligned} \quad (30)$$

über

$$dm_1 = -0,74 A_f h/EJ \quad (31)$$

aus $dM_0 = -0,0833 dq l^2 - 0,01 EJ dm_1$ zu $dq = 17,90 A_f h/l^2$. Damit wird $dM_2 = -1,40 A_f h$, $dM_3 = -1,31 A_f h$.

Laststeigerung, bis in 3 das elastische Grenzmoment auftritt, führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} 0,75 \\ 2,00 \\ -0,61 \frac{A_f h}{EJ} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0,01 & 0,02 & 0 \\ 0,01 & 0,02 & 0 \\ 0,01 & 0,02 & 0 \end{Bmatrix} EJ \cdot \begin{Bmatrix} dm_1 \\ dm_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= -dq \begin{Bmatrix} 0,0833 \\ 0,0784 \\ 0,0735 \end{Bmatrix} l^2 \end{aligned} \quad (32)$$

wobei wegen Gl. (18) $dM_0/dm_1 = 0,75$, $dM_2/dm_2 = 2,00$ und $dM_3 = -(31,50 - 30,89) A_f h = -0,61 A_f h$ gesetzt wurde. Das Ergebnis ist $dm_1 = -0,93 A_f h/EJ$, $dm_2 = -0,33 A_f h/EJ$, $dq = 8,51 A_f h/l^2$. Daraus folgt $dM_0 = -0,69 A_f h$, $dM_2 = -0,65 A_f h$. Für den entsprechenden plastischen Durchbiegungsanteil siehe Bild 4d). Nun wird die Belastungsrichtung umgekehrt. Damit wieder Plastifizierung in 0 auftritt, ist eine Belastungsänderung um $dq = -756 A_f h/l^2$ erforderlich; die zugehörigen Biegemomentenänderungen sind $dM_0 = 63,0 A_f h$, $dM_2 = 59,27 A_f h$, $dM_3 = 55,57 A_f h$.

Bei weiter gesteigerter Gegenbelastung soll die Biegemomenten-Krümmungsbeziehung in 0 parallel zu b-c verlaufen (in diesem Bereich befand sich das Auflager ja vor der Entlastung). Neuerliches Plastifizieren in 2 erfordert $dM_2 = (63,0 - 59,27) A_f h = 3,73 A_f h$. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0,75 EJ dm_1 + 0,01 EJ dm_1 &= -0,0833 dq l^2 \\ 3,73 A_f h + 0,01 EJ dm_1 &= -0,0784 dq l^2 \end{aligned} \quad (33)$$

Die Lösung wäre: $dm_1 = 5,29 A_f h/EJ$, $dq = -48,25 A_f h/l^2$, woraus: $dM_0 = 3,96 A_f h$. Damit hätte das Auflager aber bereits den Bereich parallel zu c-d im Biegemomenten-Krümmungsdiagramm erreicht. Es muß deshalb zuerst das diesem Knick entsprechende Lastinkrement errechnet und dann Gleichung (33) neu angeschrieben werden. Dies und das übrige gehen aber völlig analog zur bisherigen Rechnung vor sich, sodaß sich eine weitere Demonstration erübrigt.

5. Schlußwort

Es wurde ein einfaches, gegebenenfalls auch für die Handrechnung geeignetes, numerisches Verfahren für Biegebalken mit nichtlinearem Stoffgesetz vorgestellt, welches die endliche Ausdehnung nichtlinearer Zonen längs der Balkenachse berücksichtigt. Die Methode führt auf die Lösung linearer Gleichungssysteme, die anschaulich aus Gleichgewichtsbedingungen am Mohrschen Ersatzbalken hergeleitet werden.

LITERATUR

- [1] Neal, B. G.: Die Verfahren der plastischen Berechnung biegesteifer Stahlstabwerke. Springer-Verlag: Berlin, Göttingen, Heidelberg (1958).
- [2] Reckling, K.-A.: Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Springer-Verlag: Berlin, Göttingen, Heidelberg (1967).
- [3] Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau. Viertes Teil: Nachweis der Gebrauchsfestigkeit. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York (1976).

- [4] Rubin, H., Vogel, U.: Baustatik ebener Stabwerke. In: Stahlbau Handbuch, Bd. 1, Stahlbau-Verlags-GmbH, Köln (1982).
- [5] Dorozs, S.: An Improved Upper Bound to Maximum Deflections of Elastic-Plastic Structures at Shakedown. J. Struct. Mech. 6, 267 – 287.
- [6] Dorozs, S., Sawczuk, A.: Deflections of Elastic-Plastic Beams at Finite Spread of Plastic Zones. In: Physical Non-Linearities in Structural Analysis, IUTAM Symposium, Springer Berlin (1981).
- [7] Lin, T. H.: Theory of Inelastic Structures. John Wiley and Sons: New York, London, Sidney, Toronto (1968).
- [8] Reißner, H.: Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen. ZAMM 11, 1 – 8 (1931).
- [9] Goodier, J. N.: Integration of Thermoelastic Equations. Phil. Mag. 23, 1017 (1937).
- [10] Banerjee, P. K., Cathie, D. N., Davies, T. G.: Two- and Three-dimensional Problems of Elasto-Plasticity. In: Developments in Boundary Element Methods-1, Appl. Sc. Publ.: London, New York (1979).
- [11] Mukherjee, S.: Boundary Element Methods in Creep and Fracture. Appl. Sc. Publ.: London, New York (1982).
- [12] Lin, T. H.: Elastoplastic Analysis of Indeterminate Beams under Reversed Loading. J. Frankl. Inst. 285, 364 – 376 (1968).
- [13] Chi, K. S., Lin, T. H.: Slope-Deflection Method for Elastic-Plastic Multistorey Frames. Int. J. Solids Structures 13, 125 – 135 (1977).
- [14] Lin, S. C., Liu, T. H.: Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Structures Using Known Elastic Solutions. Earthquake Eng. Struct. Dynamics 7, 147 – 159 (1979).
- [15] Gamer, U.: Die Behandlung von temperaturmomentbelasteten Balken mit Hilfe der Mohrschen Analogie. Österreichische Ingenieur-Zeitschrift 14, 336 – 338 (1971).
- [16] Gamer, U.: Thermal Stress and Deflection of a Beam of Sectionally Constant Cross Section. Journal of Thermal Stresses 4, 435 – 441 (1981).
- [17] Ziegler, F., Irschik, H.: Dynamic Analysis of Elastic-Plastic Beams by Means of Thermoelastic Solutions. Proc. EUROMECH Coll. „Inelastic Structures under Variable Loads“, C. Polizzotto, ed.: Palermo (1983).
- [18] Boley, B. A.: The Determination of Temperature Stresses and Deflections in Two-Dimensional Thermoelastic Problems. J. Aeronaut. Sci. 23, 67 – 69 (1956).
- [19] Parkus, H.: Mechanik der festen Körper. 3. Aufl. Springer-Verlag, Wien, New York (1981).
- [20] Hrennikoff, A.: Theory of Inelastic Bending with Reference to Limit Design. ASCE Trans. 113, 213 – 246 (1948).

Anschrift des Verfassers:

Univ. Ass. Dipl. Ing. Dr. techn. Hans Irschik
 Institut für Allgemeine Mechanik
 Technische Universität Wien
 Karlsplatz 13

A-1040 Wien