

Berechnung elastisch-plastisch verformbarer Körper bei einem beliebigen Belastungsprogramm

Siegfried Koczyk

1. Einleitung

Die Methode der finiten Elemente (FEM) wurde bereits kurze Zeit nach ihrer Einführung und theoretischen Fundierung auch zur Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes elastisch-plastisch deformierbarer Körper benutzt. Man kann sagen, daß damit überhaupt erst einmal derartige Berechnungen in relativ allgemeiner Weise möglich werden konnten. In zahlreichen Veröffentlichungen und Monografien [1], [2], [3] wurde die grundsätzliche Vorgehensweise erläutert. Es zeigte sich jedoch bald, daß die durchzuführenden Berechnungen erheblich aufwendiger sind, als vergleichbare elastische Untersuchungen. Dies ist sicher ein Grund, weshalb viele Autoren nur eine gleichförmig monoton anwachsende Belastung voraussetzen und oft sogar auf die Berechnung des Eigenspannungszustandes nach der Entlastung verzichten. Es kommt hinzu, daß man bei einem derartig einfachen Belastungsprogramm mit guter Näherung das Modell eines sich isotrop verfestigenden Werkstoffes benutzen kann. Diese Vorgehensweise besitzt jedoch speziell vom Gesichtspunkt der Festigkeitslehre wesentliche Mängel. In vielen Fällen besteht das Belastungsprogramm aus mehreren unterschiedlichen Laststufen, d. h. einzelne Kräftegruppen werden nacheinander aufgebracht, und ein Vertauschen der Reihenfolge führt zu einem anderen Ergebnis. Oft ist mit wechselnder Belastung zu rechnen. In diesem Fall führt das Werkstoffmodell der isotropen Verfestigung, welches ja speziell unter dem Gesichtspunkt der monoton anwachsenden Belastung konzipiert wurde, zu falschen Resultaten, da sich aufgrund des Bauschinger-effektes bei Lastumkehr ein anderes Verhalten des Werkstoffes ergibt [4], [5].

Jedoch auch vom Gesichtspunkt der Bewertung des Spannungszustandes bietet die isotrope Verfestigung Probleme, auf die an anderer Stelle bereits hingewiesen wurde [6]. Eine genauere Realisierung eines vorgegebenen Belastungsprogramms setzt daher auch eine entsprechende Analyse des Verhaltens des Werkstoffes bei veränderlicher Belastung voraus. Trotz zahlreichen Arbeiten in dieser Richtung ist die Situation noch nicht befriedigend. Dies gilt sowohl für die theoretische Fundierung und physikalische Begründung der Plastizitätstheorie als auch hinsichtlich der Übereinstimmung von Theorie und Experiment bei einem allgemeinen Belastungsprogramm. Der Lösungsalgorithmus zur Bestimmung des Spannungs- und Deformationszustandes ist demgegenüber von den verwendeten Werkstoffmodellen weitgehend unabhängig, so daß eine einheitliche Betrachtungsweise gerechtfertigt erscheint [8]. Das Problem läßt wie auch analoge Aufgabenstellungen aus der Elastizitätstheorie unterschiedliche Lösungswege zu. Die

Wahl der günstigsten Lösungsstrategie setzt eine gewisse Erfahrung bei der Lösung elastisch-plastischer Aufgaben voraus, wobei als Kriterium zur Bewertung einer bestimmten Variante die erzielte Genauigkeit innerhalb einer bestimmten Rechenzeit dient. Eine genauere Analyse der verwendeten Lösungsstrategien kann deshalb zur Entscheidung über die günstigste Variante beitragen.

2. Plastische Deformationen und die FEM

2.1. Plastische Deformationen als Anfangsdehnungen

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, auch bei der Formulierung der physikalischen Beziehungen die Matrizen-schreibweise zu benutzen. Dementsprechend werden der Spannungs- und der Deformationstensor als Spaltenvektoren $\underline{\sigma}$ und $\underline{\epsilon}$ dargestellt. In analoger Weise geschieht dies für vergleichbare Tensoren. Folgende Voraussetzungen werden zugrunde gelegt:

1. Die Verformungen sollen klein sein.
2. Die Belastungsgeschwindigkeiten sollen hinreichend klein sein.
3. Die Wärmeproduktion infolge einer plastischen Verformung sei vernachlässigbar und die Temperatur sei konstant.

Betrachtet man einen beliebigen Punkt des Körpers zum Zeitpunkt t , so erhält man den Zuwachs zum Deformationstensor $\underline{\epsilon}$ nach einem kleinen Zeitintervall dt als Summe einzelner Anteile:

$$d\underline{\epsilon} = d\underline{\epsilon}_e + d\underline{\epsilon}_p \quad (1)$$

Dabei bedeuten $d\underline{\epsilon}_e$ die elastischen und $d\underline{\epsilon}_p$ die plastischen Dehnungsinkremente. Die plastischen Dehnungsinkremente, die in (1) formal als totales Differential angegeben sind, hängen vom Zustand des Körpers in dem betrachteten Punkt ab. Es gilt:

$$d\underline{\epsilon}_p = \underline{e}_p(\underline{\sigma}, \underline{h}, \underline{\dot{\epsilon}}) dt \quad (2)$$

Die in \underline{h} zusammengefaßten Parameter beschreiben den mikrostrukturellen Zustand des Materials in dem betrachteten Punkt. Mit der Elastizitätsmatrix E kann man dann anstelle von (1) schreiben

$$\underline{\dot{\epsilon}} = E^{-1} \underline{\dot{\sigma}} + \underline{e}_p(\underline{\sigma}, \underline{h}, \underline{\dot{\epsilon}}) \quad (3)$$

Für die Parameter in \underline{h} gelten ebenfalls bestimmte Beziehungen, die man formal in der folgenden Weise schreiben kann und die man allgemein als Verfestigungsregeln bezeichnet

$$\underline{\dot{h}} = \underline{g}_p(\underline{\sigma}, \underline{h}, \underline{\dot{\epsilon}}) \quad (4)$$

Die Spezifikation der Funktionen \underline{e}_p und \underline{g}_p in (3) und (4) erfolgt durch spezielle Annahmen über das Verhalten des Materials. Erweiterungen hinsichtlich zeit- bzw. temperaturabhängigen Materialverhaltens sind möglich. Je besser es gelingt, das wirkliche Verhalten des Materials durch diese Funktionen darzustellen, desto genauer kann man auch das Verhalten eines Körpers bei beliebiger Belastung mit Hilfe der FEM rechnerisch bestimmen.

2.2. FEM und Prinzip der virtuellen Arbeit

Die Vorgehensweise der FEM ist allgemein bekannt, so daß sie hier nicht näher erläutert werden muß. Durch die FE-Diskretisierung wird der Verschiebungszustand in Abhängigkeit von bestimmten Knotenverschiebungen dargestellt. Bezeichnet man den Vektor der Knotenverschiebungen mit \underline{v} , so gilt für den Vektor der Verschiebungen in einem beliebigen Punkt mit der Interpolationsmatrix G

$$\underline{u} = G \underline{v}. \quad (5)$$

Die Matrix G ist je nach dem verwendeten Elementtyp unterschiedlich und wird hier zunächst nicht näher spezifiziert. Die Dehnungen bestimmt man aus (5) durch Anwendung der Differentialmatrix D zu

$$\underline{\epsilon} = D_G \underline{v}. \quad (6)$$

Durch (5) und (6) ist, falls kompatible Elemente verwendet werden, die Verträglichkeit des Deformationszustandes gewährleistet. Die Gleichgewichtsbedingungen werden durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten im Mittel erfüllt, seine Anwendung auf den deformierbaren Körper führt zu

$$\int_{(\text{Vol})} \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} \, d\text{Vol} - \delta \underline{v}^T \underline{f} = 0. \quad (7)$$

In (7) ist \underline{f} der Vektor der Knotenkräfte, der sich aus Einzellasten, Oberflächen- und Volumenkräften zusammensetzt und im weiteren als zeitlich veränderlich vorausgesetzt wird. Durch diese zeitliche Veränderlichkeit ist das Belastungsprogramm des Körpers gegeben. Die Variation des Deformationstensors $\underline{\epsilon}$ ergibt, da die Verformungen als klein vorausgesetzt wurden,

$$\delta \underline{\epsilon}^T = \delta \underline{v}^T D_G^T. \quad (8)$$

Damit erhält man ein System von Gleichungen entsprechend der Zahl der eingeführten unbekanntenen Knotenverschiebungen

$$\int_{(\text{Vol})} D_G^T \underline{\sigma} \, d\text{Vol} - \underline{f} = 0. \quad (9)$$

Da auch der Spannungstensor zeitlich veränderlich ist, folgt aus (9)

$$\int_{(\text{Vol})} D_G^T \underline{\dot{\sigma}} \, d\text{Vol} - \underline{\dot{f}} = 0. \quad (10)$$

und weiter unter Benutzung von (3) und (6)

$$\left[\int_{(\text{Vol})} D_G^T E D_G \, d\text{Vol} \right] \underline{\dot{v}} - \int_{(\text{Vol})} D_G^T E \underline{e}_p \, d\text{Vol} - \underline{\dot{f}} = 0. \quad (11)$$

Mit der Steifigkeitsmatrix

$$K = \int_{(\text{Vol})} D_G^T E D_G \, d\text{Vol} \quad (12)$$

und einem Zusatzlastvektor

$$\underline{f}_p = \int_{(\text{Vol})} D_G^T E \underline{e}_p \, d\text{Vol} \quad (13)$$

erhält man schließlich die Beziehung

$$K \underline{\dot{v}} = \underline{\dot{f}} + \underline{f}_p(\underline{\sigma}, h, \underline{\dot{v}}). \quad (14)$$

\underline{f}_p hängt neben den Größen $\underline{\sigma}$ und h wegen (2) und (6) auch von $\underline{\dot{v}}$ ab.

2.3. Das vollständige System von Differentialgleichungen

Die Integration in (12) und (13) werden numerisch ausgeführt. Dies ist insbesondere für (13) von Bedeutung, da die in $\underline{\sigma}$ und h enthaltenen Größen selbst variabel sind. An den Stützstellen der Integration müssen $\underline{\sigma}$ und h bekannt sein, damit \underline{e}_p dort bestimmt werden kann. Faßt man $\underline{\sigma}$ und h in diesen Punkten formal zu einem Vektor von Zustandsparametern \underline{z} zusammen, so gilt, wenn man (3) nach $\underline{\dot{\sigma}}$ umstellt und mit (4) zu einem gemeinsamen System zusammenfaßt:

$$K \underline{\dot{v}} = \underline{\dot{f}} + \underline{f}_p(\underline{z}, \underline{\dot{v}}), \quad (15a)$$

$$\underline{\dot{z}} = \underline{g}_p(\underline{z}, \underline{\dot{v}}). \quad (15b)$$

Damit ist das Problem der Bestimmung des elastisch-plastischen Spannungs- und Verformungszustandes auf die Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (15) zurückgeführt. Dieses System besteht aus zwei Teilsystemen, von denen (15a) die den Gleichgewichtsbedingungen entsprechenden Finite-Elemente-Gleichungen umfaßt, während durch (15b) der Zusammenhang mit den Änderungen der Spannungen und der Zustandsparameter hergestellt wird.

Es ist im allgemeinen nicht möglich (15a), analytisch nach $\underline{\dot{v}}$ umzustellen. Damit können Integrationsverfahren, die eine explizite Darstellung der Ableitungen der Unbekannten voraussetzen, nicht ohne weiteres angewendet werden.

2.4. Das Konzept der Fließbedingung

Zur Spezifikation der durch (2) und (4) eingeführten Funktionen geht man bei plastisch verformbaren Materialien allgemein von der Existenz einer Fließbedingung

$$F(\underline{\sigma}, h) \leq 0 \quad (16)$$

aus. Für $F < 0$ treten nur elastische Deformationen auf, während das Gleichheitszeichen die Grenze des elastischen Bereichs markiert. Die plastischen Deformationen bestimmt man durch die Normalitätsbedingung

$$d\underline{e}_p = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} d\underline{\lambda} \quad (17)$$

mit dem zunächst noch unbekanntenen Faktor $d\underline{\lambda}$.

Es sei nun ein Spannungszustand $\underline{\sigma}$ gegeben, der dicht an der Grenze des elastischen Bereiches liegt, aber so daß noch $F < 0$ gilt. Durch eine Spannungsänderung $\Delta \underline{\sigma}$ werde nun die Grenze des elastischen Bereiches überschritten. In diesem Fall ändern sich auch die Parameter h , so daß neben (16) auch gilt

$$F(\underline{\sigma} + \Delta \underline{\sigma}, h + \Delta h) = 0. \quad (18)$$

Entwickelt man (18) in eine Taylorreihe und setzt man die Änderungen $\Delta \underline{\sigma}$ und Δh als hinreichend klein voraus, so gilt

$$F(\underline{\sigma}, h) + \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T \Delta \underline{\sigma} + \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right)^T \Delta h = 0. \quad (19)$$

Aus (3) folgt nun weiter für $\Delta \underline{\sigma}$ unter Berücksichtigung von (17)

$$\Delta \underline{\sigma} = E \Delta \underline{\epsilon} - E \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \Delta \lambda. \quad (20)$$

Da sich die Parameter h nur ändern, wenn plastische Deformationen auftreten, erscheint es sinnvoll, sie zur Größe des Zuwachses der plastischen Deformationen $\Delta \lambda$ in Beziehung zu setzen, also

$$\Delta h = G_p(\underline{\sigma}, h) \Delta \lambda. \quad (21)$$

Damit erhält man aus (19) den Faktor

$$\Delta \lambda^* = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T E \Delta \underline{\epsilon} + F(\underline{\sigma}, h)}{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T E \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right)^T G_p(\underline{\sigma}, h)}, \quad (22)$$

und es gilt für $\Delta \lambda$

$$\Delta \lambda = \begin{cases} \Delta \lambda^* & \text{für } \Delta \lambda^* > 0, \\ 0 & \text{für } \Delta \lambda^* \leq 0. \end{cases} \quad (23)$$

Die in (2) und (4) eingeführten Vektoren \underline{e}_p und \underline{g}_p sind demnach Nullvektoren für elastische Deformationen oder linear von $\underline{\epsilon}$ abhängig. Die endlichen Inkremente in (22) ändern an diesem Sachverhalt nichts, sie dienen aber der besseren numerischen Realisierung beim Übergang vom elastischen zum elastisch-plastischen Zustand. Im Grenzübergang bei fortschreitender plastischer Deformation gilt also

$$d\underline{\epsilon}_p = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T E d\underline{\epsilon}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T E \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right)^T G_p(\underline{\sigma}, h)}. \quad (24)$$

Damit wird für (13) unter Berücksichtigung von (6) die folgende Darstellung möglich

$$\underline{f}_p = \left[\int_{Vol} \frac{D_G^T E \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T E D_G}{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T E \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial h} \right)^T G_p(\underline{\sigma}, h)} dVol \right] \underline{\dot{v}}. \quad (25)$$

Hierfür kann man schreiben

$$\underline{f}_p = K_p(\underline{\sigma}, h) \underline{\dot{v}}. \quad (26)$$

Mit einer Änderung der Steifigkeitsmatrix $K_p(\underline{\sigma}, h)$ geht (15a) über in

$$[K - K_p(\underline{z})] \underline{\dot{v}} = \underline{\dot{f}}. \quad (27)$$

Die durch (25) eingeführte Matrix K_p ist wiederum eine symmetrische Matrix, allerdings eine Funktion der in \underline{z} zusammengefaßten Größen $\underline{\sigma}$ und h . Es sei noch erwähnt, daß sich normalerweise für die Ableitungen

$\frac{\partial F}{\partial h}$ negative Werte ergeben, so daß das skalare Produkt

$-\left(\frac{\partial F}{\partial h} \right) G_p(\underline{\sigma}, h)$ insgesamt wieder positiv wird. Während es jedoch relativ einfach ist, für die Fließbedingung einen geeigneten dem jeweiligen Material angepaßten Näherungsausdruck zu finden, bereitet die Bestimmung der materialspezifischen Funktionen $G_p(\underline{\sigma}, h)$ in der Regel erheblich größere Schwierigkeiten, und man ist hier oft noch auf vereinfachende Annahmen angewiesen.

3. Lösungsverfahren

3.1. Die iterative Methode

Ausgangspunkt für die nachfolgenden Untersuchungen ist das System (15a, 15b) mit der in 2.4. vorgenommenen Spezifizierung. Die Komponenten des Lastvektors \underline{f} können zwar beliebige Funktionen der Zeit sein, es ist jedoch sinnvoll, eine Unterteilung von \underline{f} in einzelne Laststufen vorzunehmen, so daß innerhalb einer Laststufe \underline{f} konstant ist und für \underline{f} in der Laststufe m demnach gilt

$$\underline{f}_m = \underline{f}_{m0} + \underline{f}_{m1} \cdot t. \quad (28)$$

In \underline{f}_{m0} wird der zu Beginn der Laststufe m erreichte Belastungszustand dargestellt, dessen Abarbeitung zu Beginn der Laststufe m bereits erfolgt ist. In dieser Laststufe ist also nur $\underline{f}_{m1} = \dot{\underline{f}}_m$ von Interesse. Die Zeit t kommt nicht explizit vor und da auch alle Ableitungen nach t nur linear erscheinen, spielt die absolute Größe von t keine Rolle. Innerhalb der betrachteten Laststufe wird der Lastvektor nochmals in kleine Lastschritte $\Delta \underline{f}$ unterteilt.

Die formale Integration von (15a) und (15b) über einen Lastschritt führt auf die Beziehungen

$$\underline{z} = \underline{z}_0 + \int_{t_0}^t \underline{g}_p^*(\underline{z}, \underline{\dot{v}}) d\tau \quad (29)$$

und

$$K \Delta \underline{v} = \Delta \underline{f} + \int_{t_0}^{t_1} \underline{f}_p(\underline{z}, \underline{\dot{v}}) dt. \quad (30)$$

Man kann nicht voraussetzen, daß sich \underline{v} innerhalb eines Lastschrittes analog zu (28) proportional mit t ändert, aus diesem Grund ist ein iteratives Vorgehen notwendig. Die zum Lastschritt Δt gehörige Verschiebung $\Delta \underline{v}$ wird zu diesem Zweck nochmals in einzelne Teilschritte unterteilt

$$\Delta \underline{v} = \sum_{i=0}^N \Delta \underline{v}_i. \quad (31)$$

Im 1. Iterationsschritt gilt

$$K \Delta \underline{v}_0 = \Delta \underline{f}. \quad (32)$$

Innerhalb dieses Teilschrittes kann man eine proportionale Änderung des Verschiebungsvektors voraussetzen, so daß aus (29) die in \underline{z} zusammengefaßten Spannungen und Zustandsparameter bestimmt werden können und analog dazu das nach (30) zu bestimmende Integral des Zusatzlastvektors. Im allgemeinen kann die Zeitintegration nicht in einem Schritt ausgeführt werden, sondern

es ist nochmals eine Unterteilung von $\Delta \underline{v}_0$ vorzunehmen:

$$\Delta \underline{v}_0^* = \frac{\Delta \underline{v}_0}{M}, \quad (33)$$

wobei M im Prinzip für jeden Stützpunkt der numerischen Integration einen anderen Wert haben kann. Als Kriterium zur Festlegung von M kann eine geeignete Vergleichsdehnung dienen, die in dem betreffenden Stützpunkt aus $\Delta \underline{v}_0$ bestimmt wird.

Es gilt dann:

$$\underline{z}_j^* = \underline{z}_0 + \sum_{l=0}^{j-1} \underline{g}_p^*(\underline{z}_l^*, \Delta \underline{v}_0^*) \quad (34)$$

und

$$\Delta \underline{r}_{p1} = \sum_{e=0}^{M-1} \underline{f}_p(\underline{z}_1^*, \Delta \underline{v}_0^*). \quad (35)$$

mit $1 \leq j \leq M$ und den Anfangswerten $\underline{z}_0^* = \underline{z}_0$. Am Ende des Integrationszyklus wird dann $\underline{z}_1 = \underline{z}_M^*$.

Im 2. Iterationsschritt gilt

$$K \Delta \underline{v}_1 = \Delta \underline{r}_{p1}, \quad (36)$$

wobei nach Bestimmung von $\Delta \underline{v}_1$ der Zeitintegrationsschritt in der beschriebenen Weise durchzuführen ist und schließlich für den Iterationsschritt i :

$$K \Delta \underline{v}_i = \Delta \underline{r}_{pi}. \quad (37)$$

Die Iteration kann abgebrochen werden, wenn die relative Norm des Vektors $\Delta \underline{r}_{pi}$ hinreichend klein ist. Die Summation aller Teilgleichungen ergibt:

$$K(\Delta \underline{v}_0 + \Delta \underline{v}_1 + \dots + \Delta \underline{v}_N) = \Delta \underline{f} + \Delta \underline{r}_{p1} + \dots + \Delta \underline{r}_{pN}. \quad (38)$$

Die Konvergenz des Verfahrens ist nicht von vornherein gesichert. Bei ideal plastischen oder sich entfestigenden Materialien kann bei Erreichen einer Grenzlast die Zahl der Iterationsschritte beliebig groß werden. In diesem Fall ist es zweckmäßiger, mit vorgegebenen Verschiebungen als Belastungsgrößen zu rechnen. Man kann Konvergenz voraussetzen, wenn die modifizierte Steifigkeitsmatrix in (27) während des gesamten Iterationsvorganges positiv definit ist.

Der Vorteil der iterativen Methode besteht darin, daß die Steifigkeitsmatrix nur einmal aufgebaut und zerlegt werden muß. Nachteilig ist, daß die Zahl der Iterationsschritte mit zunehmender plastischer Deformation immer größer wird, weil sich das Material in seinen Eigenschaften dann mehr und mehr dem ideal plastischen Zustand annähert.

3.2. Die Methode der veränderlichen Steifigkeit

Um die Zahl der Iterationsschritte zu begrenzen, wurde die Methode der veränderlichen Steifigkeit entwickelt. Grundlage hierfür bildet die Gleichung (27). Es ist zweckmäßig, zunächst den 1. Iterationsschritt nach (32) auszuführen. Mögliche Entlastungen können auf diese Weise bereits erfaßt werden. Der Zeitintegrationsschritt erfolgt dann nach der in 3.1. beschriebenen Weise. Für den 2. Iterationsschritt folgt dann aus (27)

$$[K - K_p(\underline{z}_1)] \Delta \underline{\tilde{v}}_1 = \Delta \underline{r}_{p1} \quad (39)$$

Die Bestimmung von $\Delta \underline{\tilde{v}}_1$ erfordert jetzt den erneuten Aufbau und die Zerlegung der Steifigkeitsmatrix. Im folgenden Zeitintegrationsschritt bestimmt man die zu $\Delta \underline{\tilde{v}}_1$ gehörigen $\underline{\tilde{z}}_2$ und einen Lastvektor $\Delta \underline{\tilde{r}}_{p2}$. Nach Ausführung dieses Schrittes folgt die neue Änderung der Steifigkeitsmatrix $K_p(\underline{\tilde{z}}_2)$. Da in (39) bei der Bestimmung von $\Delta \underline{\tilde{v}}_1$ die Parameter \underline{z} in K_p als konstant angenommen werden, muß dies im folgenden Iterationsschritt korrigiert werden, so daß ein modifizierter Lastvektor erscheint

$$[K - K_p(\underline{\tilde{z}}_2)] \Delta \underline{\tilde{v}}_2 = \Delta \underline{\tilde{r}}_{p2} - K_p(\underline{z}_1) \Delta \underline{\tilde{v}}_1. \quad (40)$$

Allgemein gilt schließlich für den Iterationsschritt $i \geq 2$

$$[K - K_p(\underline{\tilde{z}}_i)] \Delta \underline{\tilde{v}}_i = \Delta \underline{\tilde{r}}_{pi} - K_p(\underline{\tilde{z}}_{i-1}) \Delta \underline{\tilde{v}}_{i-1}. \quad (41)$$

Als Abbruchkriterium kann wiederum dienen, daß die relative Norm des Vektors $\Delta \underline{\tilde{r}}_{pi}$ hinreichend klein ist. Die Summation aller Teilgleichungen ergibt wiederum

$$K[\Delta \underline{v}_0 + \Delta \underline{\tilde{v}}_1 + \dots + \Delta \underline{\tilde{v}}_N] = \Delta \underline{f} + \Delta \underline{r}_{p1} + \Delta \underline{\tilde{r}}_{p2} + \dots + \Delta \underline{\tilde{r}}_{pN}. \quad (42)$$

Durch die Methode der veränderlichen Steifigkeit erreicht man zwar eine beträchtliche Verminderung der Zahl der Iterationsschritte, andererseits ist die Abarbeitung eines Schrittes wesentlich aufwendiger. Eine Entscheidung, welchem Verfahren der Vorzug zu geben ist, kann nicht generell getroffen werden. Bei geringen plastischen Deformationen verdient die iterative Methode den Vorzug, während bei einem fortgeschrittenen Stadium der Belastung die Methode der veränderlichen Steifigkeit zu kürzeren Rechenzeiten führt.

In jedem Falle ist die Einführung konvergenzbeschleunigender Maßnahmen zweckmäßig.

3.3. Vorgegebene Verschiebungsänderungen

Besteht ein Teil des Belastungsprogramms aus einer Folge gleicher Lastschritte, so ist eine Verminderung der Zahl der Iterationsschritte möglich, wenn als Startvektoren die im vorangegangenen Lastschritt ermittelten Verschiebungen benutzt werden. Dies gilt für beide Methoden. Die Iteration beginnt in diesem Fall mit dem Integrationsschritt zur Bestimmung der neuen Größen \underline{z}_1 und des Vektors $\Delta \underline{r}_{p1}$ infolge der vorgegebenen Verschiebungen $\Delta \underline{v}_0$.

Im folgenden Schritt gilt dann

$$K(\Delta \underline{v}_1 + \Delta \underline{v}_0) = \Delta \underline{f} + \Delta \underline{r}_{p1}. \quad (43)$$

Nach Auflösung des Gleichungssystems erhält man für $\Delta \underline{v}_1$

$$\Delta \underline{v}_1 = K^{-1}(\Delta \underline{f} + \Delta \underline{r}_{p1}) - \Delta \underline{v}_0. \quad (44)$$

Der weitere Iterationsprozeß ist dann nach den in 3.1. bzw. 3.2. beschriebenen Methoden durchzuführen. Durch die Benutzung eines vorgegebenen $\Delta \underline{v}_0$ können einige Iterationsschritte eingespart werden. Allerdings ist diese Einsparung insbesondere bei zunehmender plastischer Deformation nicht wesentlich.

3.4. Konvergenzverbesserung durch lineare Interpolation

Wie bereits erläutert, besteht das Hauptproblem in dem Auffinden des zu einem Lastvektor $\Delta \underline{f}$ gehörigen Verschiebungsvektors $\Delta \underline{v}$. Durch das iterative Vorgehen wird $\Delta \underline{v}$ in einzelnen Schritten aufgebaut. Es liegt daher der Gedanke nahe, aus den ersten N iterativ bestimmten Teilvektoren durch eine Linearkombination einen verbesserten Verschiebungsvektor zu bestimmen. Dies ist gleichbedeutend mit dem Problem des Auffindens der gemeinsamen Nullstelle von L Funktionen

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_L),$$

wenn für die x_i eine Folge von Näherungswerten vorliegt.

Die Darstellung der y_i in der Umgebung der gesuchten Nullstelle als lineare Funktionen führt auf eine Verallgemeinerung der Regula falsi [7]. Die x_i sind hier die Komponenten des Verschiebungsvektors $\Delta \underline{v}$ und die y_i die entsprechenden Komponenten des Zusatzlastvektors $\Delta \underline{r}_p$. Aus der Anwendung der verallgemeinerten Regula falsi resultiert die Forderung

$$(\alpha_1 \Delta \underline{r}_{p1} + \alpha_2 \Delta \underline{r}_{p2} + \dots + \alpha_{N-1} \Delta \underline{r}_{pN-1} + \Delta \underline{r}_{pN})^2 = \text{Min!} \quad (45)$$

mit noch unbekanntem Koeffizienten α_i . Die Minimierung des Ausdrucks (45) führt auf ein Gleichungssystem zur Bestimmung der α_i .

Nach Bestimmung der α_i folgt für das verbesserte Verschiebungssinkrement $\Delta \underline{v}^*$ mit dem Faktor

$$a = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{N-1} \quad (46)$$

der Ausdruck

$$\Delta \underline{v}^* = -\frac{1}{a} (\alpha_1 \Delta \underline{v}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta \underline{v}_3 + \dots + (\alpha_1 + \dots + \alpha_{N-1}) \Delta \underline{v}_{N-1}). \quad (47)$$

Dieser verbesserte Wert dient als Startwert für die folgenden Iterationsschritte. Durch Ausführung des Integrationsschrittes bestimmt man zunächst die zu $\Delta \underline{v}^*$ gehörigen \underline{z} und $\Delta \underline{r}_p^*$. Damit gilt für den folgenden Schritt wiederum

$$\Delta \underline{v}_{N+1} = K^{-1} \Delta \underline{r}_p^* - \Delta \underline{v}^*. \quad (48)$$

Als Kriterium für die zu wählende Zahl N kann die relative Norm des Vektors $\Delta \underline{r}_{pi}$ dienen. Ist das Verhältnis

$$\frac{|\Delta \underline{r}_{pi}|}{|\Delta \underline{r}_{p1}|} > \beta \quad (49)$$

mit $\beta \approx 10^{-6}$, so folgt ein weiterer Iterationsschritt, ansonsten wird die verbesserte Näherung $\Delta \underline{v}^*$ bestimmt.

4. Anwendungen

4.1. Fließbedingung und Zustandsparameter

Zur Realisierung der verschiedenen Lösungsstrategien wurde die spezielle Form der Fließbedingung

$$F(\underline{\sigma}, \underline{h}) = (\underline{\sigma} - \underline{a})^T \mathbf{A} (\underline{\sigma} - \underline{a}) - \sigma_F^2 \quad (50)$$

gewählt.

Die Parameter \underline{h} sind hier einmal σ_F , ferner die Elemente des Vektors \underline{a} , der die Verschiebung des elastischen Be-

reichs aus der zentralen Lage angibt, sowie die Elemente der symmetrischen Matrix \mathbf{A} , die eine mögliche Anisotropie im Verhalten des Materials ausdrückt. Im allgemeinen räumlichen Fall umfaßt \underline{h} in einem Punkt also 28 Elemente. Die Fließbedingung (50) geht mit $\underline{a} = 0$ und

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 3 & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & & & 3 & 0 \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

in die Mises-Fließbedingung über.

4.2. Verfestigungsregeln

Die in (4) allgemein angegebenen Verfestigungsregeln wurden durch (21) bereits spezifiziert. Um eine direkte Verbindung zur Größe der plastischen Deformation herzustellen, wird der Parameter $d\lambda$ durch

$$d\varphi = \frac{d\lambda}{2\sigma_F} \quad (52)$$

ersetzt. φ ist ein Maß für die Größe der plastischen Deformation und wird auch als Umformgrad bezeichnet. Die weitere Spezifikation von (21) für die einzelnen Parametergruppen in (50) führt auf

$$d\sigma_F = E_p d\varphi \quad (53)$$

für σ_F und mit der Pragerschen Verfestigungsregel auf

$$d\underline{a} = \frac{c}{2G_M} E A (\underline{\sigma} - \underline{a}) \frac{d\varphi}{\sigma_F}. \quad (54)$$

In (54) ist G_M der Gleitmodul und E die bereits in (3) eingeführte Elastizitätsmatrix. Anstelle von (54) kann man auch die Zieglerische Verfestigungsregel benutzen:

$$d\underline{a} = c (\underline{\sigma} - \underline{a}) \frac{d\varphi}{\sigma_F}. \quad (55)$$

Eine Entscheidung, welche von beiden Regeln den Vorzug verdient, kann hier nicht getroffen werden. Bei der rechentechnischen Realisierung kann man sich jedoch beide Möglichkeiten offen halten.

Auf eine Berücksichtigung der Anisotropien, also einer Veränderung der Matrix \mathbf{A} wurde zunächst verzichtet. Die in (53) und (54) bzw. (55) erscheinenden Materialfunktionen E_p und c sind von $\underline{\sigma}$, σ_F und \underline{a} abhängig [6]. Diese Abhängigkeit muß invariant gegenüber einer Koordinatentransformation sein, d. h. es sind aus $\underline{\sigma}$ und \underline{a} invariante Größen zu bilden. Solche Größen sind einmal σ_F selbst, zum anderen der dimensionslose Parameter q , der die Lage des Spannungspunktes auf der Fließfläche folgendermaßen bestimmt

$$q = \frac{1}{\sigma_F^2} \underline{a}^T \mathbf{A} (\underline{\sigma} - \underline{a}). \quad (56)$$

In einer einfachen Variante werden daher E_p und c als Funktionen von σ_F und q dargestellt. Die Berücksichtigung ideal-plastischen Materialverhaltens bzw. der isotropen Verfestigung ($c = 0$) ist gleichfalls möglich.

4.3. Beispiel

Auf der Grundlage der dargelegten Theorie wurden Finite-Element-Programme zur Berechnung ebener und rotationssymmetrischer Bauteile entwickelt. Als spezielles Beispiel sei hier ein gelochter Zugstab (Bild 1) betrachtet.

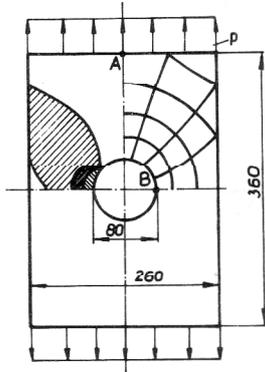


Bild 1
Gelochter Zugstab

Aus Symmetriegründen braucht nur ein Viertel des Stabes betrachtet und vernetzt werden. Im Programm selbst wurden kompatible isoparametrische 8-Knoten-Viereck und 6-Knoten-Dreieckelemente verwendet.

Die Materialkennwerte sind (ebener Spannungszustand):

$$\text{Elastizitätsmodul } E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2,$$

$$\text{Querzahl } \gamma = 0,3,$$

$$\text{Fließspannung } \sigma_F = 200 \text{ N/mm}^2,$$

Für die Materialfunktionen gilt

$$E_p \approx 0$$

und unter Benutzung der Pragerschen Verfestigungsregel

$$c = \sigma_F (a_2 + (a_1 - a_2) e^{-a_3 q}) \quad \text{für } q \geq 0,$$

$$c = \sigma_F (a_1 - a_4 q) \quad \text{für } q < 0.$$

Für die Parameter a_1 bis a_4 wurden die folgenden Werte angenommen: $a_1 = 1000$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5$, $a_4 = 1000$.

Das aus diesen Materialfunktionen resultierende Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist im Bild 2 dargestellt.

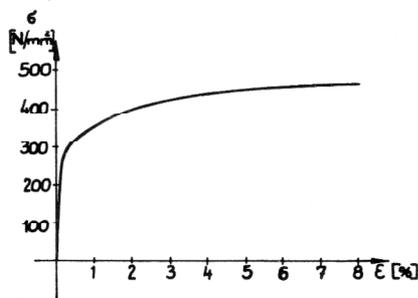


Bild 2
Spannungs-Dehnungs-Diagramm

Für das vorliegende Beispiel wurde nur eine Laststufe von $p = 180 \text{ N/mm}^2$ mit nachfolgender Entlastung realisiert. Das Programm läßt jedoch eine beliebige Folge

unterschiedlicher Laststufen zu. Die Zerlegung der Steifigkeitsmatrix erfolgt mit dem Verfahren von Cholesky, wobei die Veränderlichkeit der Bandweite in der Steifigkeitsmatrix berücksichtigt wird. Die Entwicklung des plastizierten Gebietes ist gleichfalls in Bild 1 dargestellt. Der Vergleich der einzelnen Lösungsstrategien zeigt folgendes:

1. Die iterative Methode und die Methode der veränderlichen Steifigkeit ohne Maßnahmen zur Konvergenzverbesserung erfordern bei gleicher Lastschrittzahl (6 Lastschritte) in etwa die gleiche Rechenzeit.
2. Eine Verfeinerung der Lastschritte, also eine Erhöhung der Zahl der Lastschritte führt bei einer geringen Steigerung der Genauigkeit zu einer wesentlichen Vergrößerung der Rechenzeit, da die Veränderungen in der Form von Δy auch bei kleinen Lastschritten eine bestimmte Zahl von Iterationsschritten erfordern.
3. Die Maßnahmen zur Konvergenzverbesserung (vorgegebene Anfangswerte für die Verschiebungen, lineare Interpolation) führen zu einer Einsparung an Rechenzeit bis zu 50 %.
4. Da durch die unterschiedlichen Lösungsstrategien etwas unterschiedliche „Verformungswege“ verfolgt werden, ergeben sich geringe Unterschiede im berechneten Spannungs- und Verformungszustand. Die Unterschiede werden umso größer, je größer die Lastschritte gewählt werden.
5. In den durchgerechneten Beispielen wurde mit 2 Stützpunkten in jeder Koordinatenrichtung für die Gaußsche Integrationsformel bei der Bestimmung des Integrals (25) gearbeitet. Eine Vergrößerung der Zahl der Stützpunkte führte zu keiner wesentlichen Steigerung der Genauigkeit, aber zu einer Vergrößerung der Rechenzeit, da die Zeitintegrationsschritte aufwendiger werden.

5. Zusammenfassung

Die Berechnung elastisch-plastischer Verformungszustände mit Hilfe der FEM führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches wieder aus zwei Teilsystemen besteht. Da eine explizite Darstellung der Ableitungen des Verschiebungsvektors im allgemeinen nicht angegeben werden kann, muß eine iterative Lösungsstrategie gewählt werden. Dabei können sowohl die Methode der veränderlichen Steifigkeit als auch die Methode der Veränderung des Lastvektors bei ungeänderter Steifigkeitsmatrix und allgemeinen Materialverhalten angewendet werden. Durch die mehrmalige Bestimmung des Vektors der Knotenverschiebungen innerhalb eines Lastschrittes wird der Lösungsalgorithmus sehr zeitaufwendig. Positiv wirken sich Maßnahmen zur Beschleunigung der Konvergenz der Iteration aus, wobei diese so angelegt sein sollten, daß sie nicht nur für spezielles Verfestigungsverhalten (z. B. isotrope Verfestigung) des Materials brauchbar sind.

Die Gesamtrechenzeit setzt sich wesentlich einmal aus den zur mehrmaligen Auflösung des linearen Gleichungssystems erforderlichen Anteilen und zum anderen aus den zur Integration der Spannungen und der weiteren

Zustandsparameter benötigten Zeiten zusammen. Die Realisierung eines beliebigen Belastungsprogramms führt naturgemäß auf längere Rechenzeiten. Konvergenzverbessernde Maßnahmen können dann mit Erfolg eingesetzt werden, wenn das Belastungsprogramm aus möglichst wenig Laststufen besteht, die durch Unterteilung in einzelne Lastschritte abgearbeitet werden. Es hat sich als günstig erwiesen, die Lastschritte nicht zu klein zu wählen. Bei größeren Lastschritten ist ein gewisser Genauigkeitsverlust zu verzeichnen, jedoch kann man in diesem Fall mit geringeren Zeiten zur Lösung der Aufgabe rechnen.

LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente, 2. Auflage, VEB Fachbuchverlag Leipzig 1983.
- [2] Altenbach, J., Sacharov, A. S.: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.

- [3] Owen, D. R. J., Hinton, E.: Finite Elements in Plasticity. Pineridge Press Limited Swansea, U. K. 1980.
- [4] Axelsson, K.: On constitutive Modelling in Metal Plasticity. Chalmers University of Technology, Göteborg 1979.
- [5] Backhaus, G.: Deformationsgesetze. Akademie-Verlag Berlin 1983.
- [6] Koczyk, S.: Zum Zusammenhang zwischen Fließbedingung und innerem Zustand bei plastisch verformbaren Materialien, Techn. Mechanik 4 (1983), 1, S. 53 – 58.
- [7] Koczyk, S.: Die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme mit Hilfe der verallgemeinerten Regula falsi. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg 23 (1979), S. 553 – 557.
- [8] Bergander, H.: Das Deformationsgesetz in Rechenprogrammen für Bauteile aus inelastischem Material. Techn. Mechanik 1 (1980), S. 57 – 61.

Anschrift des Verfassers:

Doz. Dr. sc. techn. S. Koczyk
 Technische Hochschule „Otto von Guericke“
 Sektion Maschinenbau
 3010 Magdeburg
 PSF 124