

Statik räumlicher Stabtragwerke nach Fließgelenktheorie

II. Ordnung

Heinz Müller, Doris Hedeler

1. Anschluß an die „elastische“ Lösung des Programmsystems STATRA

Der Baustein 8 des Programmsystems STATRA [1] beinhaltet die Elastizitätstheorie II. Ordnung räumlicher Stabtragwerke. Durch Zulassung von Querschnittsdurchplastizierungen an vorgegebene Systemstellen gestattet der Baustein 10 darüber hinausgehend die Fließgelenktheorie II. Ordnung. Es wird linear elastisch-ideal plastischer Werkstoff vorausgesetzt.

Ausgangspunkt aller STATRA-Bausteine, vgl. z. B. [1], [2], ist das Differentialgleichungssystem erster Ordnung der Gleichgewichts- und (elastischen) Formänderungsbedingungen am Stabelement ds_1 für die im Vektor \underline{z} zusammengefaßten Wirkungsgrößen.

$$\frac{d\underline{z}}{ds_1} = \underline{A} \cdot \underline{z} + \underline{b}$$

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{\sigma} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Beim räumlich wirkenden dünnwandigen Stab besteht \underline{z} aus sieben kinematischen Variablen im Vektor $\underline{v}(s_1)$ und sieben Schnittkraftvariablen im Vektor $\underline{\sigma}(s_1)$.

$$\underline{v}(s_1) = \{ v_1, v_2, v_3; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3; \rho \}$$

mit $\rho = -\varphi_1/1$ vgl. [2] (2)

$$\underline{\sigma}(s_1) = \{ N_1, N_2, N_3; M_1, M_2, M_3; B \}$$

Die Koeffizientenmatrix \underline{A} hängt bei Theorie II. Ordnung von den noch unbekanntem Wirkungsgrößen $\underline{\sigma}$ bzw. \underline{v} ab.

$$\underline{A} = \underline{A}(\underline{\sigma}(\underline{v})) \quad (3)$$

Nach Integration von (1) zwischen den Stabrändern, vgl. Bild 1, folgen schließlich aus dem Knotengleichge-

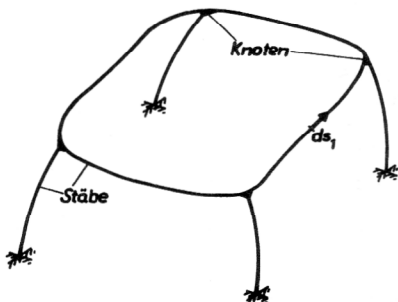


Bild 1
 Räumliches Stabsystem

wicht die nichtlinearen Bestimmungsgleichungen für den Vektor \underline{v} der unbekanntem Knotenverschiebungen.

$$(\underline{P} - \hat{\underline{F}}) - \underline{K}(\underline{\sigma}(\underline{v})) \cdot \underline{v} = 0 \quad (4)$$

Dabei sind:

$(\underline{P} - \hat{\underline{F}})$: Belastungsvektor; $\hat{\underline{F}}$ infolge von Stablasten
 \underline{K} : Gesamtsteifigkeitsmatrix

Elastische Instabilität wird angezeigt durch

$$\det \underline{K}(\underline{\sigma}(\underline{v})) = 0 \quad (5)$$

Bei der numerischen Integration von (1) sind an den Grenzen der Integrationsabschnitte Sprunggrößen der Vektoren $\underline{\sigma}$ und \underline{v} zugelassen (Bild 2).

$$\hat{\underline{z}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{v}} \\ \hat{\underline{\sigma}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{z}_{i \text{ rechts}} = \underline{z}_{i \text{ links}} + \hat{\underline{z}}_i \quad (6)$$

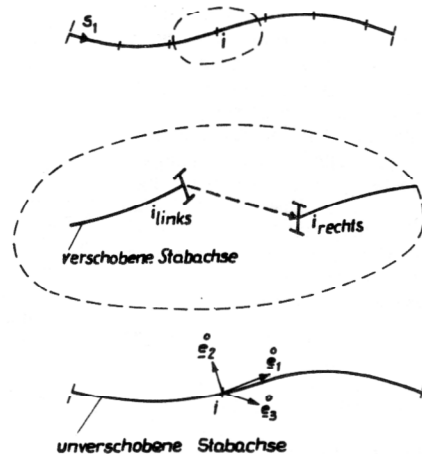


Bild 2
 Zulassung von Sprunggrößen

Mit den Elementen von $\hat{\underline{\sigma}}$ können Einzelkräfte – in der Kinetik (Baustein 7) auch Einzelträgheiten und Einzeldämpfer – erfaßt werden. Die Elemente von $\hat{\underline{v}}$ dienen in der linearen Statik über den Satz von LAND der Ermittlung von Schnittkrafteinflußfunktionen. Im Baustein 10 erfaßt der Verschiebungs-Sprungvektor

$$\hat{\underline{v}} = \{ \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3; \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3; \hat{\rho} \} \quad (7)$$

die plastischen Verschiebungs-, Verdrehungs- und Verwölbungssprünge zwischen den Querschnittsufern der „Fließgelenke“.

2. Fließgelenkorte und Querschnitterschöpfung

Für ein System (Bild 3) werden eine Menge ausgezeichnete Systempunkte vorgegeben, deren Querschnitte in bezug auf eine plastische Erschöpfung während des Belastungsprozesses geprüft werden sollen.

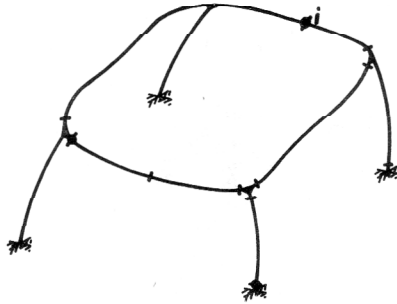


Bild 3

Für Fließgelenke zugelassene Systempunkte (|) und bereits entstandene Fließgelenke (●)

Die Erschöpfungsbedingung wird bestimmt durch eine im Schnittkraftraum formulierte Fließfunktion f , z. B. für den Systempunkt i

$$f_i = f(\underline{\sigma}_i; k) = 0 \quad (8)$$

$$\underline{\sigma}_i = \{ \sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}, \dots, \sigma_i^{(n)} \}$$

$\sigma_i^{(r)}$: an der Fließfunktion beteiligte Schnittkraftkomponenten

k : Ausdruck, der durch die sog. vollplastischen Schnittkräfte bestimmt ist.

Zur Erschöpfungsbeschreibung können unterschiedlich viel Schnittkraftkomponenten des jeweiligen Querschnittes herangezogen werden.

3. Differentiale Laststeigerung

Beim Hochfahren der äußeren Belastung sei bei einer bestimmten Lastintensität an m der zugelassenen Erschöpfungsstellen (Bild 3) die Erschöpfung bereits eingetreten, u. a. am Punkt i mit $f_i = 0$ und dem zugehörigen Schnittkraftvektor $\underline{\sigma}_i(0)$.

Bild 4 zeigt für den Systempunkt i einen Ausschnitt der Fließfunktion und die Änderung des Schnittkraftzustandes $\underline{\sigma}_i(0)$ um $d\underline{\sigma}_i$ infolge einer differentialen Änderung dP der äußeren Belastung.

Bei der Laststeigerung entstehen plastische Zusatzverschiebungen an den Fließgelenken sowie elastische Formänderungen in den Systemteilen zwischen den Fließgelenken.

Der Vektor der plastischen gegenseitigen Zusatzverschiebung der Querschnittsufer des Fließgelenkes ist bei assoziierter Fließregel in der Richtung bestimmt durch den Gradientenvektor zu f im Punkt i .

$$d\underline{v}_i = \lambda_i \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_i \quad (9)$$

$$d\underline{v}_i = \{ d\underline{v}_i^{(1)}, d\underline{v}_i^{(2)}, \dots, d\underline{v}_i^{(n)} \}$$

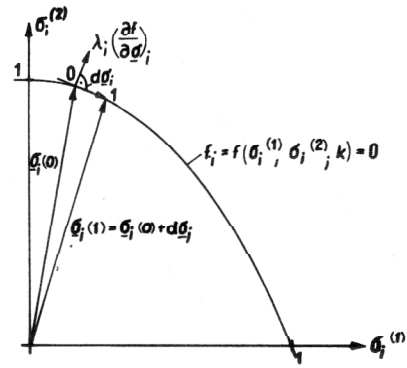


Bild 4

„Neutrale“ Schnittkraftänderung auf der Fließfunktion

λ_i : noch unbekannter differentialer „plastischer“ Multiplikator

Die Änderung des Schnittkraftvektors $d\underline{\sigma}_i$ besteht aus einem „elastischen“ Anteil und einem Anteil infolge der zusätzlichen plastischen Verschiebungen an den bereits eingetretenen m Fließgelenken.

$$d\underline{\sigma}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \underline{\sigma}_{ij} + d\underline{\sigma}_{i0} \quad (10)$$

$d\underline{\sigma}_{i0}$: Schnittkraftänderung – „elastisch“

$\underline{\sigma}_{ij}$: Schnittkraftvektor am Punkt i infolge des „Einheitsverschiebungssprungvektors“ \hat{v}_j am Fließgelenk j , d. h. mit $\lambda_j = 1$.

Aus den Konsistenzbedingungen, d. h. aus der Forderung, daß die neuen Schnittkraftpunkte an allen Fließgelenken wieder auf der jeweiligen Fließfunktion liegen müssen, folgt mit $d\underline{\sigma}_i$ nach (10) ein lineares Gleichungssystem m -ter Ordnung zur Ermittlung der λ_j .

$$df_i = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_i^T \cdot d\underline{\sigma}_i = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (11)$$

Nach Auflösung dieses Gleichungssystems sind für alle aufgefundenen Erschöpfungsstellen die neuen Schnittkraftpunkte auf der zugehörigen Fließfunktion bekannt.

4. Inkrementale Laststeigerung

Wird die Belastung nicht differential, sondern inkremental-endlich um ΔP gesteigert, so liegt, wie Bild 5 zeigt, der Endpunkt des nun endlichen Schnittkraftvektors $\Delta \underline{\sigma}_i$ zunächst nicht mehr auf der Fließfunktion, d. h.

$$f_i = f(\underline{\sigma}_i(0) + \Delta \underline{\sigma}_i(0); k) > 0. \quad (12)$$

Durch Zusatzschnittkraftvektoren $\Delta \underline{\sigma}^*$ müssen diese Endpunkte für alle Fließgelenke wieder auf die entsprechende Fließfunktion zurückgeführt werden, z. B. für den Systempunkt i in der Form

$$\Delta \underline{\sigma}_i^*(0) = -\psi_i \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{i0}. \quad (13)$$

Der noch unbekannt Skalar ψ_i läßt sich dann aus der Bedingung

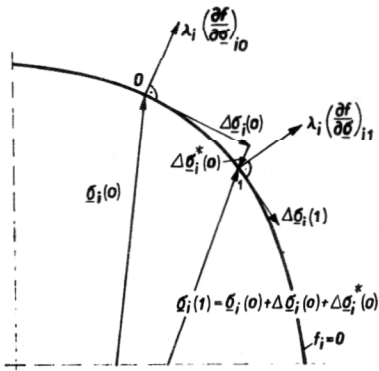


Bild 5
Plastische Schnittkraftumlagerung

$$f_i(\underline{\sigma}_i(1); k) = f(\underline{\sigma}_i(0) + \Delta \underline{\sigma}_i(0) + \Delta \underline{\sigma}_i^*(0); k) = 0 \quad (14)$$

ermitteln. Die $\Delta \underline{\sigma}_i(0)$ sind dabei entsprechend den $d \underline{\sigma}_i$ gemäß (10) und (11) zu nehmen.

Die Zusatzschnittkräfte $\Delta \underline{\sigma}^*$ rufen erneut endliche plastische Verschiebungen zwischen den Fließgelenk-Querschnittsufern hervor. Die Konsistenzbedingung

$$\Delta f_i(1) = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{il}^T \cdot \Delta \underline{\sigma}_i(1) + (\text{nichtlineare Terme in } \Delta \underline{\sigma}_i) = 0 \quad (15)$$

wird bezüglich $\Delta \underline{\sigma}$ linearisiert

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_{il}^T \cdot \Delta \underline{\sigma}_i(1) = 0. \quad (16)$$

Mit

$$\Delta \underline{\sigma}_i(1) = \sum_{j=1}^m \lambda_j(1) \cdot \underline{\sigma}_{ij}(1) + \Delta \underline{\sigma}_i^*(0) \quad i=1, \dots, m \quad (17)$$

folgt dann aus (16) ein lineares Gleichungssystem m-ter Ordnung für die $\lambda(1)$ -Multiplikatoren. Als Folge der Linearisierung wird eine iterative Abarbeitung erforderlich. Diese iterative plastische Schnittkraftumlagerung zum Ausgleich der Restschnittkräfte $\Delta \underline{\sigma}^*$ wird fortgesetzt, bis an allen Fließgelenken die Bedingung

$$\Delta \underline{\sigma}_i^* \approx 0 \quad i=1, \dots, m \quad (18)$$

erfüllt ist.

Plastisches Systemversagen durch Bildung einer kinematisch instabilen Fließgelenkkette tritt ein, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix zur Ermittlung der λ verschwindet, d. h.

$$\det \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)_i^T \cdot \underline{\sigma}_{ij} \right] = 0 \quad i, j = 1, \dots, m \quad (19)$$

Die plastischen Verschiebungsanteile wachsen dann ohne weitere Laststeigerung quasi unbegrenzt an.

5. Erfassung geometrischer Nichtlinearitäten

Die lineare Superposition, die der Berechnung des Vektors $\Delta \underline{\sigma}_i(1)$ nach (17) zugrunde liegt, verlangt eine im betrachteten Lastinkrement $\Delta \underline{P}$ konstant beibehaltene Koeffizientenmatrix \underline{A} des Differentialgleichungssystems (1). Infolge der – hier zur Theorie II. Ordnung gehörigen –

geometrischen Nichtlinearität ist jedoch $\underline{A} = \underline{A}(\underline{\sigma}(\underline{v}))$. Damit wird eine weitere iterative Anpassung im Lastinkrement notwendig.

Die im Abschn. 4 beschriebene Iteration zum Ausgleich der Restschnittkräfte $\Delta \underline{\sigma}^*$ wird daher zunächst mit einer Koeffizientenmatrix \underline{A} durchgeführt, die die Schnittkräfte $\underline{\sigma}$ des Lastzustandes \underline{P} enthält (Bild 6).

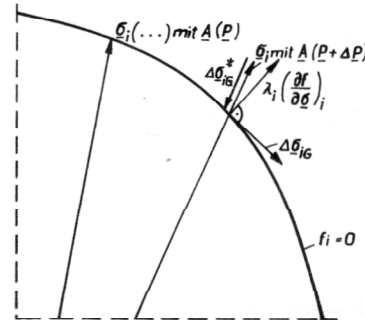


Bild 6
Anschlußiteration zur Erfassung der geometrischen Nichtlinearität

Nach Abschluß der plastischen Schnittkraftumlagerung mit $\underline{A}(\underline{P})$ werden in die Koeffizientenmatrix \underline{A} die Schnittkräfte $\underline{\sigma}$ eingeführt, die aus dem Lastzustand $\underline{P} + \Delta \underline{P}$ resultieren. Damit ändern sich die Vektoren $\underline{\sigma}_i$, die dann i. d. R. nicht mehr auf der Fließfunktion liegen und zu neuen Restschnittkräften $\Delta \underline{\sigma}_i^*$ führen.

Der Ausgleich dieser Restschnittkräfte erfolgt durch zusätzliche plastische Deformationen analog zu der in Abschn. 4 beschriebenen Iteration.

Mit den Koeffizientenmatrizen \underline{A} der verschiedenen erreichten Lastzustände ändert sich auch die Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{K} des Systems. Ein Versagen des Tragwerkes infolge elastisch-plastischer Instabilität tritt ein, wenn die Bedingungsgleichung

$$\det \underline{K}(\underline{\sigma}(\underline{v})) = 0 \quad (20)$$

erfüllt ist. Bei diesem Zustand wachsen die geometrisch nichtlinearen Verschiebungsanteile unbegrenzt an.

6. Neubildung und Unwirksamkeit von Fließgelenken

Während des Belastungsprozesses werden an sämtlichen zur Fließgelenkbildung zugelassenen Systempunkten die Fließfunktionswerte f beobachtet. Wird an einem solchen Punkt $f > 0$, so ist dieser Punkt im Schnittkraftumlagerungsprozess gemäß Abschnitt 4 und 5 als Fließgelenk zu führen. Wird im Schnittkraftumlagerungsprozess an einem bereits eingetretenen Fließgelenk $f < 0$, d. h. $\Delta \underline{\sigma}_{i0}$ geht von der Fließfunktion nach „innen“, so fällt dieser Punkt für den weiteren Umlagerungs- und Belastungsprozess solange als Fließgelenk aus, solange $f < 0$ bleibt.

7. Beispiele

7.1. Räumlich wirkender ebener Rahmen

Für den Rahmen gemäß Bild 7 war die Traglast nach Theorie I. und II. Ordnung zu suchen.

Die Belastungskomponenten wurden proportional gesteigert, der Algorithmus läßt jedoch auch beliebige andere Steigerungen zu. Zwecks deutlicher Demonstration wurden zur Interaktion in der Fließfunktion nur die drei Schnittkraftkomponenten N , M_2 , M_3 herangezogen, das Plastizieren der Querschnittspunkte wurde dabei vereinfachend lediglich durch die Normalspannung beschrieben, vgl. z. B. [3]. Zum schnelleren Abarbeiten wurde weiterhin die tatsächliche nichtlineare Fließfunktion in jedem Oktanten linearisiert, vgl. Bild 7b.

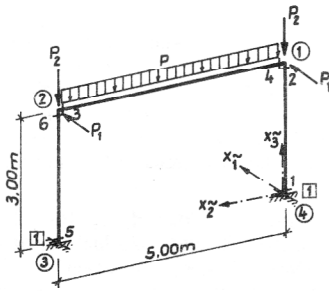


Bild 7a
System, Geometrie, Ausgangsbelastung

- : Knotennummern; $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$: globale Koordinatenrichtungen
 - : Ort und Reihenfolge der aufgefundenen Erschöpfungsstellen
- $P_1 = 12,50 \text{ kN}$, $P_2 = 50,00 \text{ kN}$, $p = 10,0 \text{ kN/m}$
Material: St. 38

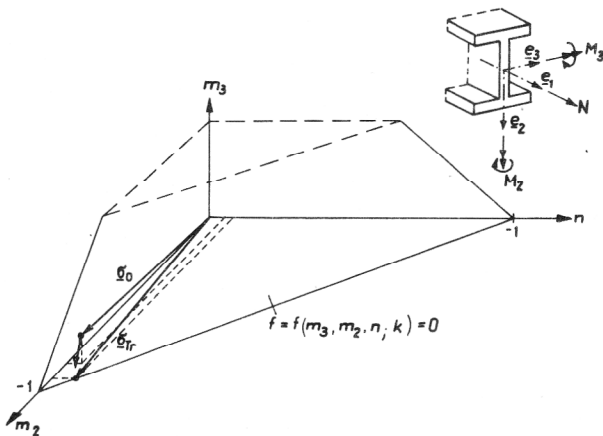


Bild 7b
Fließfunktion (Ausschnitt), Querschnittsform der Stäbe, Schnittkraftvektoren $\underline{\sigma}$

- $\underline{\sigma}_0$: Schnittkraftvektor beim erstmaligen Erreichen der Fließfunktion
 - $\underline{\sigma}_{Tr}$: Schnittkraftvektor beim Erreichen der Traglast
- $$m_3 = \frac{M_3}{M_{3P}}, \quad m_2 = \frac{M_2}{M_{2P}}, \quad n = \frac{N}{N_P}$$

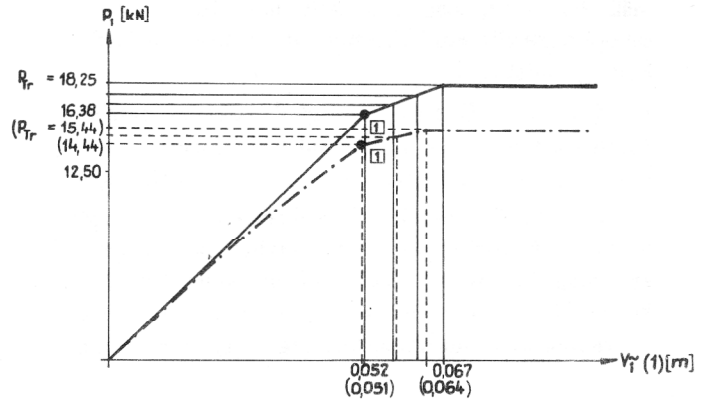


Bild 7c:
Last-Verschiebungs-Funktion
— Theorie I. Ordnung
- - - Theorie II. Ordnung ()

Plastisches Systemversagen gemäß Gl. (19) tritt ein, wenn sich an den Fließgelenken der Systempunkte 1 und 5 die Achsen der gegenseitigen plastischen (Biege-) Verdrehungszuwächse der Fließgelenkquerschnittsgeraden parallel zur Verbindungsachse zwischen den Punkten 1 und 5 eingestellt haben (plastisches Scharnier). In diesem Fall verschwinden an den genannten Punkten die Biegemomente, deren Vektor senkrecht zur Systemebene steht, vgl. auch Bild 7b.

Aus den Last-Verschiebungs-Funktionen von Bild 7c gehen die Traglasten P_{Tr} für Theorie I. und II. Ordnung hervor.

Schnittkraft- und Verschiebungszustände sowie Fließgelenkverteilung verkomplizieren sich, wenn die bis jetzt im Beispiel vorhandene Symmetrie verlorengeht, z. B. durch eine zusätzliche Horizontallast P_3 , vgl. Bild 8.

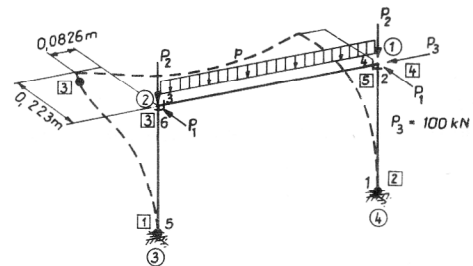


Bild 8
Geometrie, Belastung, Fließgelenkentwicklung □, Verschiebungszustand - - - - , Fließgelenkverteilung bei Erreichen der Traglast gemäß Gl. (19)

7.2. Räumliche Gleichgewichtsverzweigung eines ebenen Rahmens

Für den ebenen in seiner Ebene belasteten Rahmen nach Bild 9 war die Traglast nach Theorie I. und II. Ordnung zu suchen. Zur Interaktion in der nichtlinearen Fließfunktion wurden die Schnittkraftkomponenten N , M_3 verwendet, vgl. Bild 9b.

Bei der Traglastuntersuchung nach Theorie I. Ordnung bleibt die ebene Systemwirkung erhalten, die 1,997-

fache Ausgangslast führt zum plastischen Versagen gemäß Gl. (19), nachdem sich mit der vierten Erschöpfungsstelle eine kinematisch instabile Fließgelenkkette gebildet hat.

Bei Theorie II. Ordnung versagt das System bereits im Lastbereich zwischen 1,515- und 1,585-facher Ausgangslast infolge elastisch-plastischer Instabilität gemäß Gl. (20). Bild 9c zeigt den noch ebenen Verschiebungszustand bei kritischer Belastung unmittelbar vor der Verzweigung für das elastisch und elastisch-plastisch wirkende System, Bild 9d die entsprechenden Eigenformen der räumlichen Zusatzverschiebungen bei Verzweigung.

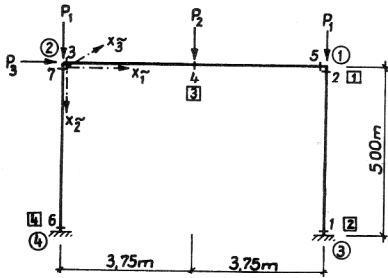


Bild 9a
Geometrie, Ausgangsbelastung, Fließgelenkentwicklung □.
 $P_1 = 187,5 \text{ kN}$, $P_2 = 150,0 \text{ kN}$, $P_3 = 75,0 \text{ kN}$
Material: St. 52

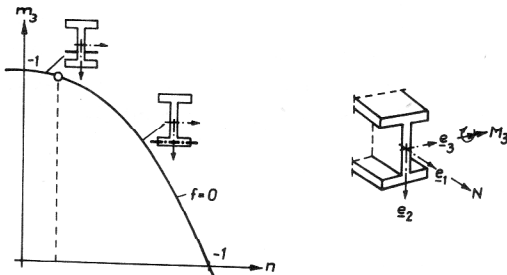


Bild 9b
Fließfunktion (Ausschnitt), Querschnittsform der Stäbe

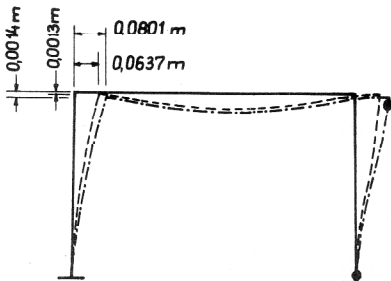


Bild 9c
Verschiebungszustand bei kritischer Belastung vor der Verzweigung
----- elastisch (STATRA-Baustein 8)
----- elastisch-plastisch (STATRA-Baustein 10)

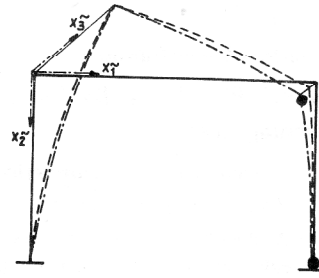


Bild 9d
Eigenformen der räumlichen Zusatzverschiebung bei Gleichgewichtsverzweigung
----- elastisch (STATRA-Baustein 8)
----- elastisch-plastisch (STATRA-Baustein 10)

LITERATUR

- [1] Müller, H., Jäger, W.: Berechnung des Schnittkraft- und Verschiebungszustandes nach Theorie II. Ordnung sowie linearisierte Stabilitätsuntersuchung räumlicher bzw. räumlich wirkender Stabtragwerke – Baustein 8 des Programmsystems STATRA. Verl. Bauinformation Berlin, Schriftenreihe Bauforschung – Baupraxis, (1982), Heft 95.
- [2] Müller, H., Jäger, W., Wilsdorf, K., Hackel, G.: Berechnung des Schnittkraft- und Verschiebungszustandes nach Theorie II. Ordnung sowie linearisierte Stabilitätsuntersuchung räumlicher bzw. räumlich wirkender Stäbe – Baustein 5 des Programmsystems STATRA. Verl. Bauinformation Berlin, Schriftenreihe Bauforschung – Baupraxis, (1980), Heft 56.
- [3] Kollbrunner, C. F., Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe, Bd. 2. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. habil. Heinz Müller,
Dr.-Ing. Doris Hedeler
Technische Universität Dresden
Sektion Bauingenieurwesen
8027 Dresden
Mommssenstraße 13