TECHNISCHE MECHANIK 6 (1985) Heft 1
Manuskripteingang: 16. 1. 1984

Das Verhalten einer rotierenden, viskoelastischen Welle unter konstanter Biegebelastung

Wolfgang Pfefferkorn

1. Die Biegelinie des ruhenden Trägers

Wir betrachten zunächst einen ruhenden Träger, der an der Stelle x durch die zeitabhängigen Biegemomente $M_y(x, t)$ und $M_z(x, t)$ um die Hauptträgheitsachsen y und z beansprucht wird. Sind $w_y(x, t)$ und $w_z(x, t)$ die Durchbiegungen in y- und z-Richtung, so lautet die Dehnung eines Wellenelementes an der Stelle x, y, z (Bild 1) bei Ebenbleiben der Querschnitte:

$$\epsilon_x(x, y, z, t) = -w_y''(x, t)\, y - w_z''(x, t)\, z \tag{1}$$

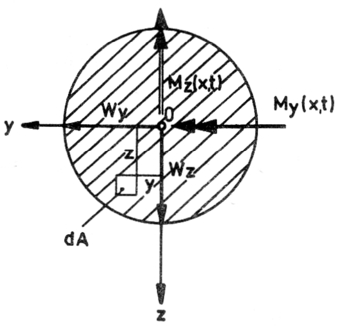

Bild 1
Trägerquerschnitt unter zweiachsiger Biegung

Andererseits wird die Dehnung nach dem bereits von Ludwig Boltzmann [1] auf heuristischem Wege gefundenen Nachwirkungsgesetz für den einachsigen Spannungszustand wie folgt beschrieben:

$$\epsilon_x(x, y, z, t) = \frac{1}{E_o}\left[\sigma_x(x, y, z, t) + \int_{-\infty}^{t} \sigma_x(x, y, z, \tau)\, K(t-\tau)\, d\tau\right] \tag{2}$$

Darin sind E_o der Anfangsmodul (Kurzzeitmodul) und $K(t-\tau)$ der Kriechkern der Volterra'schen Integralgleichung, der mit der Kriechfunktion in dem Zusammenhang

$$K(t-\tau) = -\frac{\partial \varphi(t-\tau)}{\partial \tau} \tag{3}$$

steht.

Die Schnittmomente M_y und M_z sind durch die Spannung σ_x ausdrückbar:

$$M_y(x,t) = \int_{(A)} \sigma_x(x, y, z, t)\, z\, dA\,;$$
$$M_z(x, t) = \int_{(A)} \sigma_x(x, y, z, t)\, y\, dA \tag{4a, b}$$

Gleichsetzen der Gln. (1) und (2) führt auf:

$$-w_y''(x, t) y - w_z''(x,t) z = \frac{1}{E_o}\left[\sigma_x(x, y, z, t) + \int_{-\infty}^{t} \sigma_x(x, y, z, \tau)\, K(t-\tau)\, d\tau\right] \tag{5}$$

Wird diese Gleichung mit z multipliziert und über A integriert, so entsteht mit der Gl. (4 a) und unter Beachtung von $\int_{(A)} yz\, dA = 0$ (Hauptträgheitsachsen!) sowie $\int_{(A)} z^2\, dA = I_y$:

$$w_z''(x, t) = -\frac{1}{E_o I_y}\left[M_y(x, t) + \int_{-\infty}^{t} M_y(x, \tau)\, K(t-\tau)\, d\tau\right] \tag{6 a}$$

Die gleiche Prozedur nach Multiplikation mit y führt mit $\int_{(A)} y^2\, dA = I_z$ auf:

$$w_y''(x, t) = -\frac{1}{E_o I_z}\left[M_z(x, t) + \int_{-\infty}^{t} M_z(x, \tau)\, K(t-\tau)\, d\tau\right] \tag{6 b}$$

Gl. (6 a und 6 b) sind die Differentialgleichungen der elastischen Linie des viskoelastischen Trägers für die Biegung um die y- und z-Achse.

Oftmals sind die Biegemomente als Produkte zweier Funktionen von x und t ausdrückbar:

$$M_y(x, t) = \overline{M}_y(x)\, T_y(t)\,; \quad M_z(x, t) = \overline{M}_z(x)\, T_z(t) \tag{7 a, b}$$

Dadurch sind die Dgln. der Biegelinie (6 a) und (6 b) wie folgt formulierbar:

$$w_y''(x, t) = -\frac{\overline{M}_z(x)}{E_o I_z}\, \Phi_y(t)$$
$$w_z''(x, t) = -\frac{\overline{M}_y(x)}{E_o I_y}\, \Phi_z(t) \tag{8 a, b}$$

Darin sind die Zeitfunktionen $\Phi_y(t)$ und $\Phi_z(t)$:

$$\Phi_y(t) = T_z(t) + \int_{-\infty}^{t} T_z(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau \tag{9 a}$$

$$\Phi_z(t) = T_y(t) + \int_{-\infty}^{t} T_y(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau \tag{9 b}$$

Die Lösung des viskoelastischen Problems ergibt sich somit aus der Lösung des elastischen Problems multipliziert mit einer Zeitfunktion (vgl. auch [2]).

Nach zweimaliger Integration über x unter Berücksichtigung der Randbedingungen entsteht die Form der Biegelinie in ihren Projektionen auf die x-y- und x-z-Ebene:

$$w_y(x,t) = \bar{w}_y(x)\,\Phi_y(t)\;;\quad w_z(x,t) = \bar{w}_z(x)\,\Phi_z(t) \qquad (10\,a,b)$$

Darin sind $\bar{w}_y(x)$ und $\bar{w}_z(x)$ die Lösungen des elastischen Problems.

2. Die Lage des Querschnittsschwerpunktes einer rotierenden Welle

Für die Welle gelte $I_y = I_z$. Während nun die körperfesten Koordinaten y, z mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotieren, sollen raumfeste Verschiebungskoordinaten u, v zur Beschreibung der Lage des Wellenmittelpunktes an der Stelle x dienen (Bild 2).

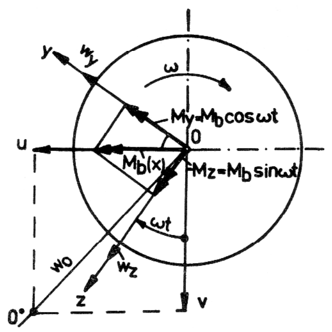

Bild 2
Wellenquerschnitt mit körperfesten und ortsfesten Koordinaten

Im Interesse einer besseren Übersicht soll angenommen werden, daß die Welle nur in der x-v-Ebene durch äußere konstante Kräfte belastet wird, so daß der Biegemomentenvektor $M_b(x)$ in u-Richtung zeigt.
Die Zerlegung von $M_b(x)$ in M_y und M_z ergibt unter Beachtung der Vorzeichen nach Bild 1:

$$M_y(x,t) = M_b(x)\cos\omega t\;;\quad M_z(x,t) = -M_b(x)\sin\omega t \qquad (11\,a,b)$$

Der Vergleich mit Gln. (7) führt auf:

$$\bar{M}_y(x) = -\bar{M}_z(x) = M_b(x) \qquad (12)$$

$$T_y(t) = \cos\omega t\;;\; T_z(t) = \sin\omega t \qquad (13\,a,b)$$

Die Integration der Differentialgleichung des elastischen Problems führt auf die Biegelinie (vgl. Gl. (10)):

$$-\bar{w}_y(x) = \bar{w}_z(x) = \bar{w}(x) \qquad (14)$$

Die Gln. (10) lauten somit:

$$w_y(x,t) = -\bar{w}(x)\,\Phi_y(t)\;;\quad w_z(x,t) = \bar{w}(x)\,\Phi_z(t) \qquad (15\,a,b)$$

Bezüglich der ortsfesten Verschiebungskoordinaten u und v ergeben sich nach der Vektortransformation folgenden Durchbiegungen:

$$u(x,t) = w_y(x,t)\cos\omega t + w_z(x,t)\sin\omega t \qquad (16\,a)$$

$$v(x,t) = -w_y(x,t)\sin\omega t + w_z(x,t)\cos\omega t$$

Mit den Gln. (15) ergibt das:

$$u(x,t) = \bar{w}(x)\,[-\Phi_y(t)\cos\omega t + \Phi_z(t)\sin\omega t] \qquad (17\,a)$$

$$v(x,t) = \bar{w}(x)\,[\Phi_y(t)\sin\omega t + \Phi_z(t)\cos\omega t] \qquad (17\,b)$$

Die Absolute Verschiebung des Wellenmittelpunktes

$w_o(x,t) = \sqrt{u^2(x,t) + v^2(x,t)}$ lautet damit:

$$w_o(x,t) = \bar{w}(x)\sqrt{\Phi_y^2(t) + \Phi_z^2(t)} \qquad (18)$$

3. Berechnung eines Beispiels

Der Werkstoff der Welle verhalte sich wie ein Burger-Körper mit der Kriechfunktion

$$\varphi(t) = 1 + ct + k(1 - e^{-\alpha t}) \qquad (19)$$

Das entspricht nach Gl. (3) einem Kriechkern

$$K(t-\tau) = c + k\alpha\, e^{-\alpha(t-\alpha)} \qquad (20)$$

Mit den Ausdrücken T_y und T_z nach Gln. (13) und der Annahme, daß die Welle bis zur Zeit t = 0 spannungsfrei ist, lauten die Zeitfunktionen nach Gl. (9):

$$\Phi_y(t) = \sin\omega t + \int_0^t [c + k\alpha\, e^{-\alpha(t-\tau)}]\sin\omega\tau\, d\tau$$

$$\Phi_z(t) = \cos\omega t + \int_0^t [c + k\alpha\, e^{-\alpha(t-\tau)}]\cos\omega\tau\, d\tau$$

Nach Auflösung der Integrale [3] ergibt sich:

$$\Phi_y(t) = \sin\omega t + \frac{c}{\omega}(1 - \cos\omega t)$$

$$+ k\,\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\,(\alpha\sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega\, e^{-\alpha t}) \qquad (21\,a)$$

$$\Phi_z(t) = \cos\omega t + \frac{c}{\omega}\sin\omega t$$

$$+ k\,\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\,(\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t - \alpha\, e^{-\alpha t}) \qquad (21\,b)$$

Mit diesen Ausdrücken sind die Verschiebungen u und v nach Gl. (17) bekannt. Nach kurzer Zwischenrechnung ergibt sich:

$$u(x,t) = \bar{w}(x)\,k\,\frac{\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\,[1 - (\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t)\,e^{-\alpha t}] \qquad (22\,a)$$

$$v(x,t) = \bar{w}(x)\left\{1 + \frac{c}{\omega}\sin\omega t + k\,\frac{\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\left[\frac{\alpha}{\omega} - (\frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t - \sin\omega t)\,e^{-\alpha t}\right]\right\} \qquad (22\,b)$$

Die Ausdrücke lassen erkennen, daß der Wellenmittelpunkt im wesentlichen eine durch k bestimmte spiralförmige Bewegung beschreibt, die lediglich in der v-Richtung durch eine ständige oszillierende Bewegung infolge des Newton'schen Fließens überlagert wird. Die Amplitude dieser Oszillation wird durch c/w geprägt.

Für $\omega \to o$ gehen die Ausdrücke in $(u)_{\omega\to 0} = 0$ und $(v)_{\omega\to 0} = w(x)\ (1 + ct + k(1 - e^{-\alpha t}))$ über.
Das ist aber genau das Verhalten des ruhenden Biegeträgers unter konstanter Belastung mit den Eigenschaften eines Burger-Körpers.
Nach sehr langer Zeit $t \to \infty$ nehmen die Durchbiegungen folgende Werte an:

$$v_\infty(x,t) = \overline{w}(x)\,[1 + \frac{c}{\omega}\sin\omega t + k\,\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}] \qquad (23\,a)$$

$$u_\infty(x) = \overline{w}(x)\ k\,\frac{\alpha\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \qquad (23\,b)$$

Obwohl die Welle nur in der x-v-Ebene belastet wird, gibt es eine Auslenkung u aus dieser Lastebene heraus. Diese ist nicht vom Fließanteil c abhängig.
Die Lage des Wellenmittelpunktes ist für große Zeiten nur dann zeitlich konstant, wenn c = o ist.

LITERATUR

[1] Boltzmann, L.: Wiener Berichte 70 (1874), S. 275 – 306.

[2] Rabotnikow, J. N., Iljuschin, A. A.: Methoden der Viskoelastizitätstheorie. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1970.

[3] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Nauka Moskau und Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1970, 19. Aufl., S. 114.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Pfefferkorn
Technische Hochschule „Carl Schorlemmer" Leuna-Merseburg
Sekt. Werkstofftechnik, WB Technische Mechanik
und Einsatztechnik

42 Merseburg
Otto-Nuschke-Str.