

# Zum kinematisch erregten Einmassenschwinger

Helmut Strümpfel

## 0. Einleitung

Die Auslegung von Klassiermaschinen der Bindebaustoffindustrie hinsichtlich ihres Bewegungsverhaltens führt auch auf das aus der Schwingungslehre bekannte und im Bild 1 dargestellte Einmassensystem mit harmonischer Feder- und Dämpfungskraftherregung [1]. Gegenstand vorliegender Untersuchung bildet die Ermittlung der bislang aus der Literatur nicht entnehmbaren Boden-, Stütz- und Erregerkräfte sowie der Antriebsleistung für den stationären oder eingeschwungenen Bewegungszustand unter Zugrundelegung linearer Federkennlinien und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung, wobei die Allgemeingültigkeit der Ergebnisse eine Übertragbarkeit auf jeden Anwendungsfall gestattet.

## 1. Bezeichnungen

Erregerweg	$u(t) = u_0 \sin \Omega t$
Massenweg	$x(t) = x_0 \sin(\Omega t + \varphi_1)$
Bodenkraft	$Q(t) = Q_0 \sin(\Omega t + \varphi_2)$
Erregerkraft	$E(t) = E_0 \sin(\Omega t + \varphi_3)$
Stützkraft	$G(t) = G_0 \sin(\Omega t + \varphi_4)$
Eigenkreisfrequenz	$\omega = \sqrt{c_1 + c_2} / m$
Dämpfungsgrad	$D = (k_1 + k_2) / (2m \omega)$
Abstimmungsverhältnis	$\eta = \Omega / \omega$
Antriebsleistung	$P(t) = P_W(t) + P_B(t)$
Wirkleistung	$P_W = P_W^* (1 + \cos 2\Omega t)$
Blindleistung	$P_B = P_B^* \sin 2\Omega t$

Abkürzungen	}	$R = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_1} 2D\eta$
		$M = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_2} 2D\eta$
		$L = (1 - \eta^2) R - 2D\eta$
		$N = 1 - \eta^2 + 2D\eta R$
		$L^* = (1 - \eta^2) M - 2D\eta$
		$N^* = 1 - \eta^2 + 2D\eta M$
		$W = \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}$

## 2. Feder- und Dämpfungskraftherregung

Die partikuläre Lösung der Bewegungs-Dgl.

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)\dot{x} + (c_1 + c_2)x = k_1 \dot{u} + c_1 u,$$

die sich für das im Bild 1 dargestellte Modell aufstellen läßt, lautet bezüglich des Weges

$$x = x_0 \sin(\Omega t + \varphi_1)$$

mit der Amplitude

$$x_0 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{\sqrt{1 + R^2}}{W} u_0 \quad (1)$$

und dem Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_1 = \arctan(L/N) = \arcsin[L(W \sqrt{1 + R^2})]. \quad (2)$$

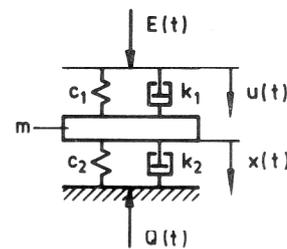


Bild 1  
Schwinger mit Feder- und Dämpfungskraftherregung

Mit Hilfe dieser Ergebnisse, deren Funktionsbilder u. a. in [1] bis [3] zu finden sind, ergeben sich aus der Gl.

$$Q = k_2 \dot{x} + c_2 x = Q_0 \sin(\Omega t + \varphi_2)$$

die Bodenkraftamplitude

$$Q_0 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} V_Q c_2 u_0 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{\sqrt{(1 + M^2)(1 + R^2)}}{W} c_2 u_0 \quad (3)$$

mit dem Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_2 = \arctan[(L + MN) / (N - ML)] \quad (4)$$

und aus der Gl.

$$E = k_1(\dot{u} - \dot{x}) + c_1(u - x) = E_0 \sin(\Omega t + \varphi_3)$$

die Erregerkraftamplitude

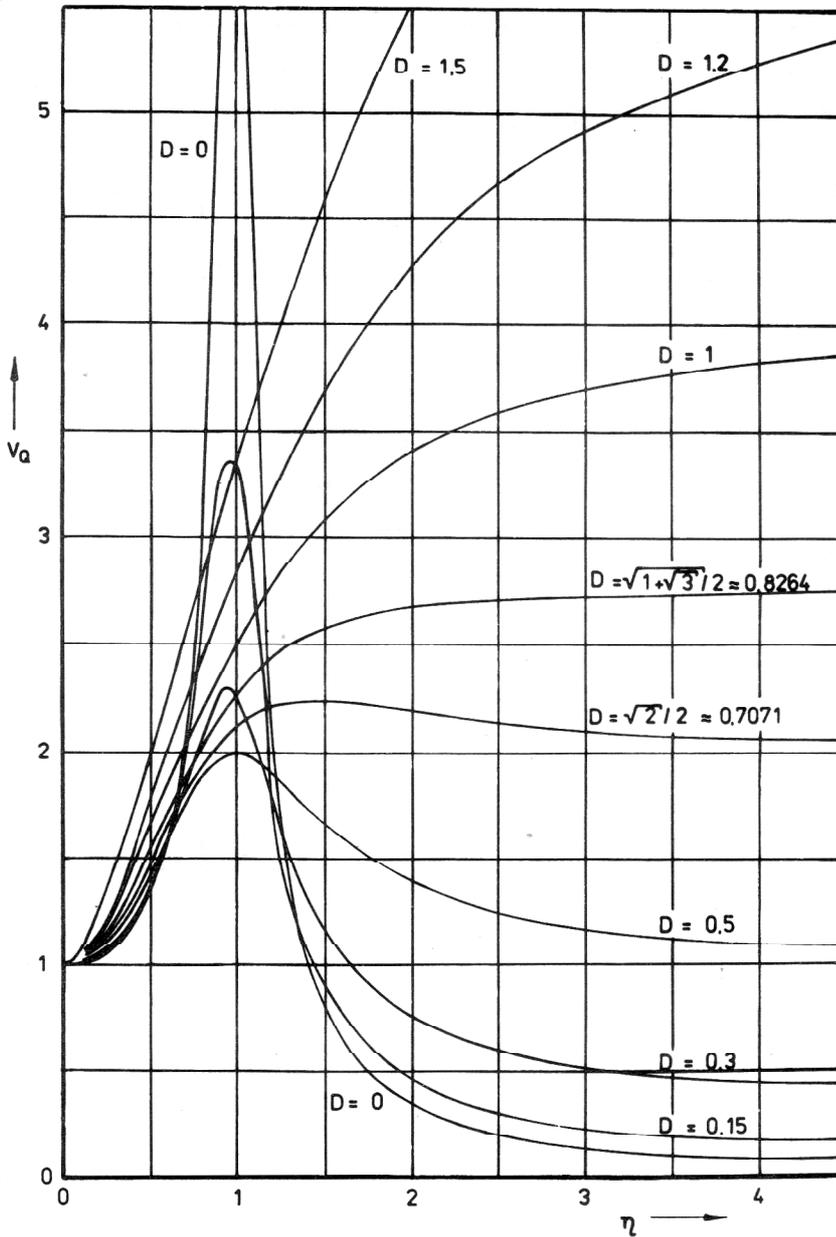
$$E_0 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} V_E c_1 u_0 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \sqrt{1 + R^2} \quad (5)$$

$$\sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{c_1}\right)^2 - 2 \frac{c_1 + c_2}{c_1} \cdot \frac{N}{W^2} + \frac{1 + R^2}{W^2}} c_1 u_0$$

mit dem Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_3 = \frac{W^2 R - \frac{c_1}{c_1 + c_2} (L + RN)}{W^2 - \frac{c_1}{c_1 + c_2} (N - RL)} \quad (6)$$

**Bild 2**  
Übertragungsfunktion  $V_Q$  zur Ermittlung  
der Bodenkraft



Für den Fall, daß die Beträge der Federsteifigkeiten und Dämpfungskonstanten übereinstimmen, kann das Charakteristische der Gln. (3) ... (6) graphisch wiedergegeben werden. Bild 2 zeigt den Verlauf der in Gl. (3) enthaltenen Übertragungsfunktion

$$V_Q = \frac{1 + 4D^2 \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}$$

Sie hat für alle Dämpfungsgrade  $D < \sqrt{1 + \sqrt{3}} / 2 \approx 0,826$  an den Stellen  $\eta_0 = \sqrt{(1 + 2D^2)/(1 + 4D^2 - 8D^4)}$  die Extremwerte

$$V_{Q \max}(D; \eta_0) = \frac{1 + 8D^2}{2D \sqrt{1 + 7D^2 - 8D^4}}$$

Entsprechend wird das Typische der Gln. (4) ... (6) durch die in den Bildern 3, 4 bzw. 5 dargestellten Funktionen

$$V_E(D; \eta) = \sqrt{1 + 4D^2 \eta^2} \cdot \sqrt{1 + 4\eta^2 (\eta^2 + D^2 - 1)} / W$$

$$\varphi_2 = \arctan \frac{2D\eta(1 - 2\eta^2 + 4D^2 \eta^2)}{1 - \eta^2 + (1 + \eta^2) 4D^2 \eta^2}$$

$$\varphi_3 = \arctan \frac{2D\eta(1 - 2\eta^2 + 2\eta^4 + 4D^2 \eta^2)}{1 - \eta^2 (3 - 2\eta^2 + 4D^2 \eta^2 - 4D^2)}$$

zum Ausdruck gebracht.

Die Ermittlung der Antriebsleistung mit seinem Wirk- und Blindleistungsanteil erfolgt über die Beziehung

$$P(t) = E \cdot \dot{u} = [k_1 (\dot{u} - \dot{x}) + c_1 (u - x)] \dot{u} = P_W(t) + P_B(t) \quad (7)$$

Danach betragen die Amplituden für die Wirk- und Blindleistung

$$P_W^* = V_W c_1 \frac{c_1 + c_2}{k_1 + k_2} u_0^2$$

$$= (R - \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{L + RN}{W^2}) D \eta c_1 \frac{c_1 + c_2}{k_1 + k_2} u_0^2$$

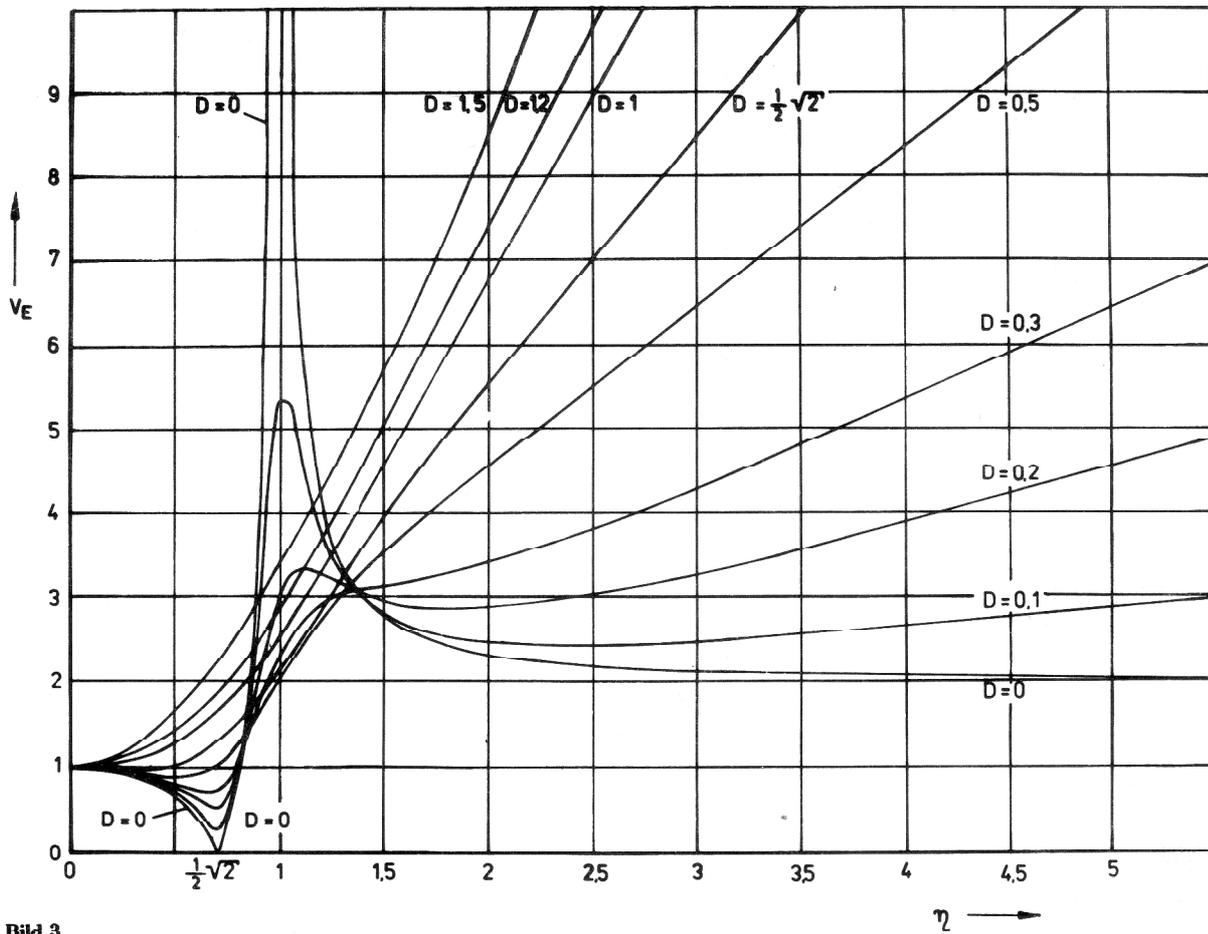
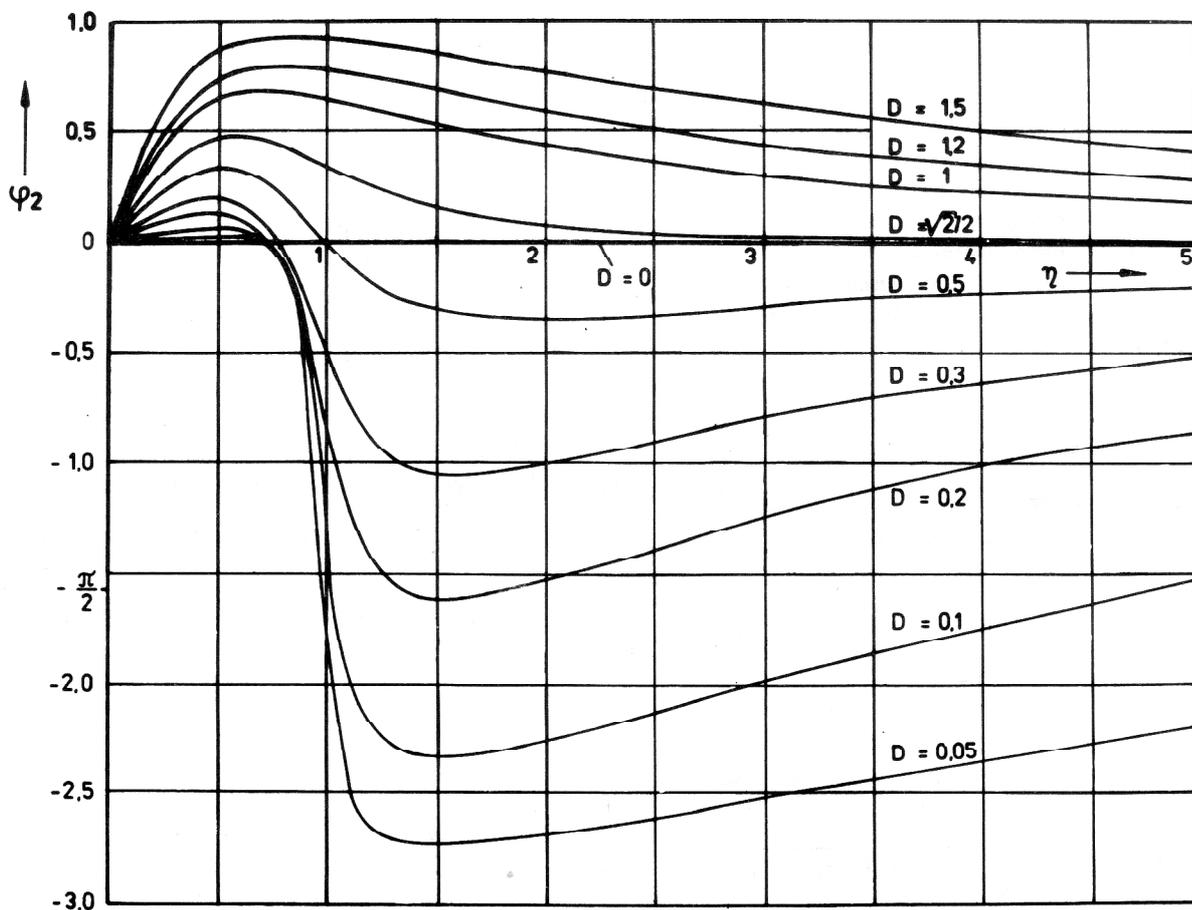


Bild 3  
Übertragungsfunktion  $V_E$  zur Ermittlung der Erregerkraft

Bild 4  
Phasenverschiebungswinkel  $\varphi_2$



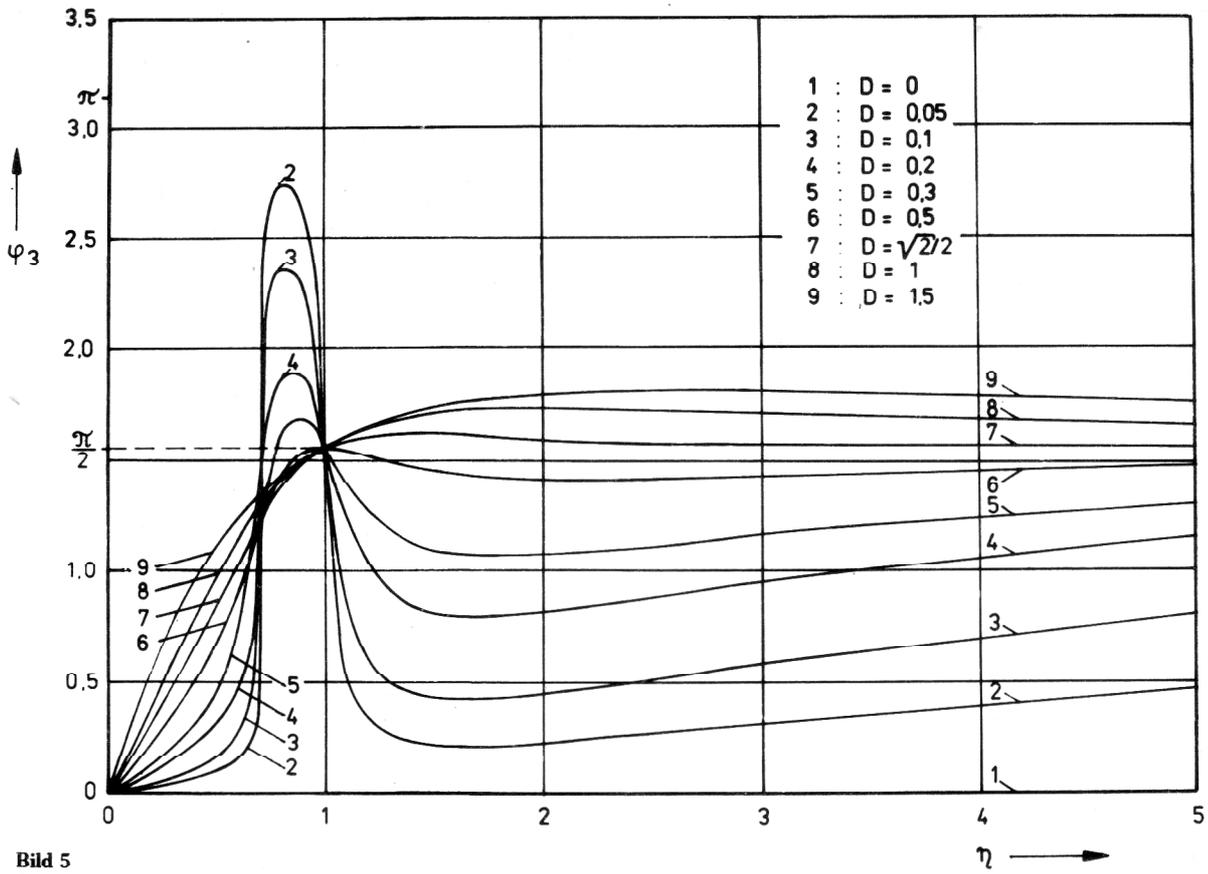
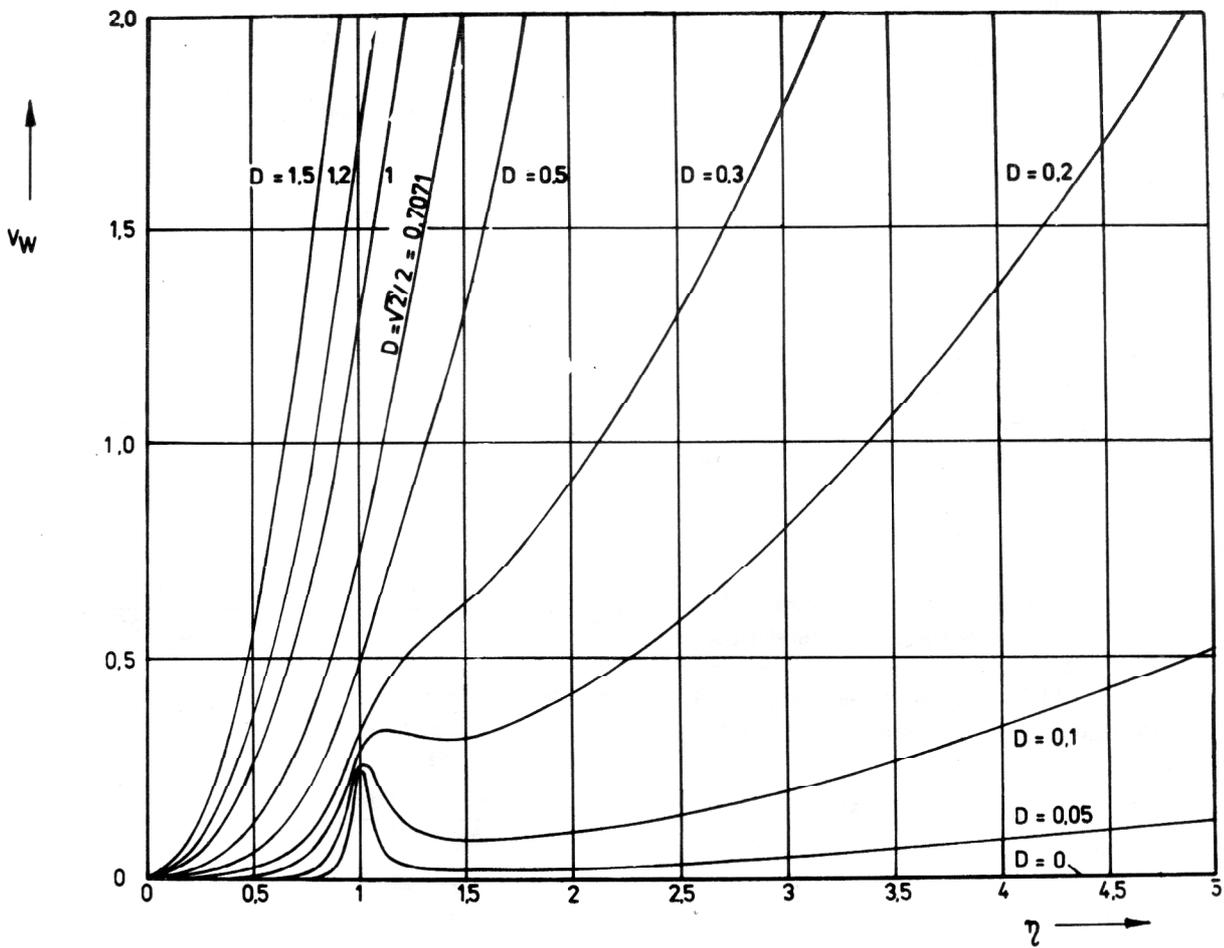
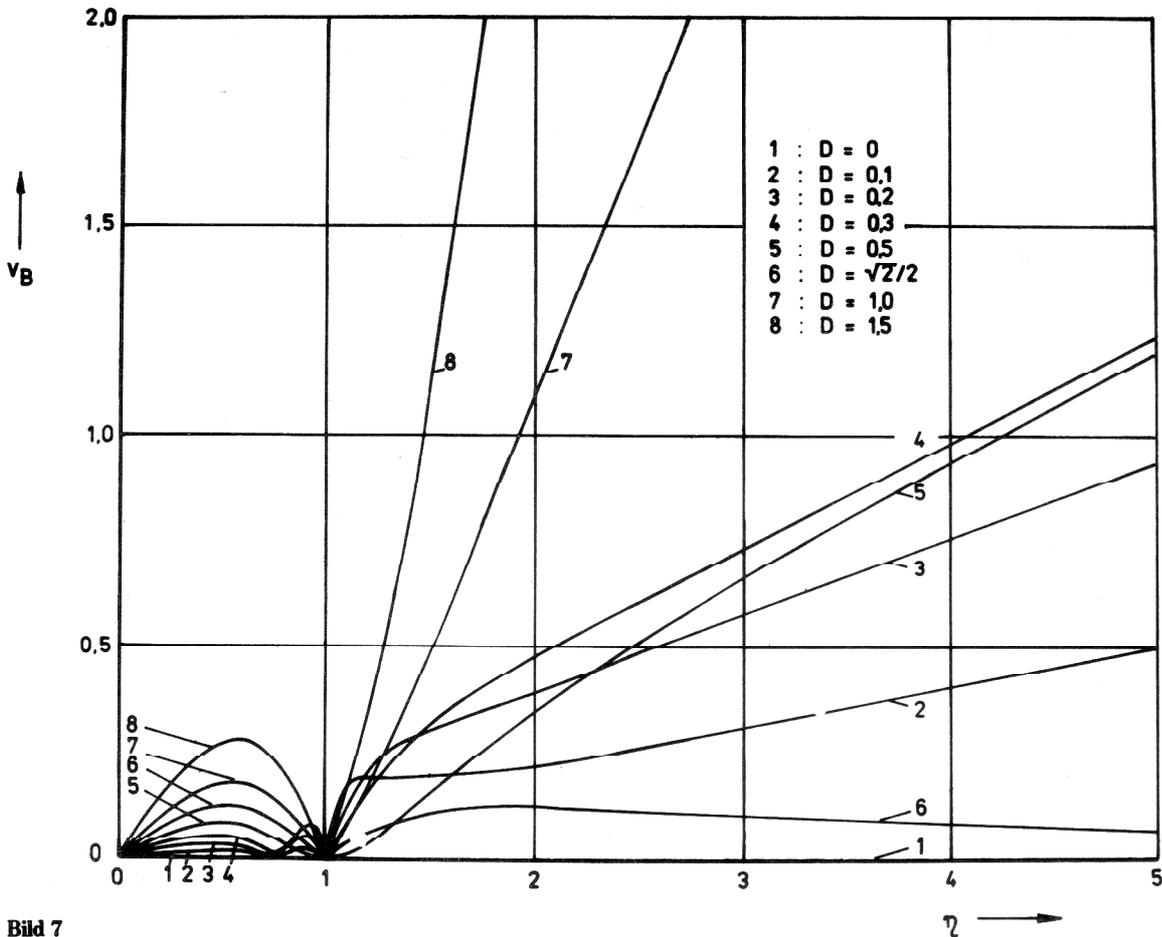


Bild 5  
Phasenverschiebungswinkel  $\varphi_3$

Bild 6  
Übertragungsfunktion  $V_W$  zur Ermittlung der Wirkleistung





**Bild 7**  
Übertragungsfunktion  $V_B$  zur Ermittlung der Blindleistung

$$P_B^* = V_B c_1 \frac{c_1 + c_2}{k_1 + k_2} u_0^2 = \left(1 + \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{LV - N}{W^2}\right) D \eta c_1 \frac{c_1 + c_2}{k_1 + k_2} u_0^2.$$

Bei Übereinstimmung der Feder- und Dämpfungswerte ergeben sich die in den Bildern 6 und 7 dargestellten Vergrößerungsfunktionen

$$V_W = \left(2 - \frac{1 - 2\eta^2 + 4D^2\eta^2}{W^2}\right) D^2 \eta^2$$

$$V_B = \left|1 - \frac{1 - \eta^2 + (1 + \eta^2) 4D^2\eta^2}{2W^2}\right| D \eta.$$

Erwartungsgemäß geht hieraus hervor, daß beim Antrieb dämpfungsfreier Schwingungssysteme mit Stützerregung keine Leistung umgesetzt wird. Gl. (7) und deren Resultat stellen damit gegenüber dem in [3, S. 115] Angegebenem eine Berichtigung dar.

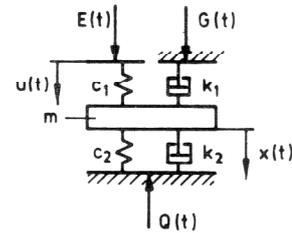
### 3. Federkrafterregung

In diesem und dem folgenden Abschnitt werden die Boden-, Stütz- und Erregerkräfte sowie die Antriebsleistung für die restlichen denkbaren Varianten des Schwingungssystems aufgeführt. Bild 8 zeigt das Modell für den Fall der Federkrafterregung. Unter Zugrundelegung der Bewegungs-Dgl.

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)\dot{x} + (c_1 + c_2)x = c_1(u - x)$$

lauten die Ergebnisse

$$x_0 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{1}{W} u_0$$



**Bild 8**  
Schwinger mit Federkrafterregung

$$\varphi_1 = -\arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$$

$$Q_0 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{\sqrt{1 + M^2}}{W} c_2 u_0$$

$$\varphi_2 = +\arctan(L^*/N^*)$$

$$E_0 = \sqrt{1 - 2 \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{1 - \eta^2}{W^2} + \left(\frac{c_1}{c_1 + c_2}\right)^2 \frac{1}{W^2}} c_1 u_0$$

$$\varphi_3 = \arctan \frac{2D\eta}{\frac{c_1 + c_2}{c_1} W^2 - (1 - \eta^2)}$$

$$G_0 = + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{2D\eta}{W} c_1 u_0$$

$$\varphi_4 = +\arctan \frac{1 - \eta^2}{2D\eta}$$

$$P_W^* = 2 \left( \frac{D\eta}{W} \right)^2 \cdot \frac{(c_1 u_0)^2}{k_1 + k_2}$$

$$P_B^* = \left( 1 - \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{1 - \eta^2}{W^2} \right) D\eta c_1 \frac{c_1 + c_2}{k_1 + k_2} u_0^2$$

#### 4. Dämpfungskrafteerregung

Bezogen auf das im Bild 9 dargestellte Modell, für das sich die Dgl.

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)\dot{x} + (c_1 + c_2)x = k_1(\dot{u} - \dot{x})$$

aufstellen läßt, führt die gleiche Vorgehensweise zu nachstehendem Resultat:

$$x_0 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{2D\eta}{W} u_0 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{R}{W} u_0$$

$$\varphi_1 = \arctan \frac{1 - \eta^2}{2D\eta}$$

$$Q_0 = \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{R\sqrt{1 + M^2}}{W} c_2 u_0$$

$$\varphi_2 = -\arctan(N^*/L^*)$$

$$E_0 = R \sqrt{1 - 2 \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{2D\eta R}{W^2} + \left( \frac{c_1}{c_1 + c_2} \right)^2 \cdot \frac{R^2}{W^2}} c_1 u_0$$

$$\varphi_3 = \arctan \frac{\frac{c_1 + c_2}{W^2} - 2D\eta R}{c_1 (1 - \eta^2) R}$$

$$G_0 = -\frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \frac{2D\eta}{W} c_1 u_0$$

$$\varphi_4 = \varphi_1 = +\arctan \frac{1 - \eta^2}{2D\eta}$$

$$P_W^* = \left( 1 - \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cdot \frac{2D\eta R}{W^2} \right) D\eta R c_1 \frac{c_1 + c_2}{k_1 + k_2} u_0^2$$

$$P_R^* = \frac{1 - \eta^2}{W^2} D\eta R^2 \frac{(c_1 u_0)^2}{k_1 + k_2}$$

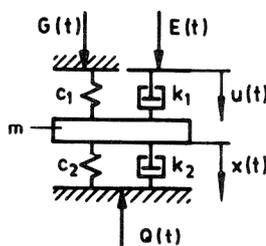


Bild 9  
Schwinger mit Dämpfungskrafteerregung

#### 5. Zusammenfassung

Für das kinematisch erregte Einmassen-Schwingungssystem und seiner möglichen Varianten werden alle Kräfte sowie die über die Zeit gemittelte Antriebsleistung berechnet. Graphisch dargestellte Verläufe von Übertragungsfunktionen und Phasenverschiebungswinkeln veranschaulichen das Charakteristische.

#### LITERATUR

- [1] Autorenkollektiv: Taschenbuch Maschinenbau. Band 1/II. VEB Verlag Technik Berlin 1975.
- [2] Klotter, K.: Technische Schwingungslehre. Band 1. Teil A. Lineare Schwingungen. Springer Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1981.
- [3] Weigand, A.: Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen. Band I. VEB Verlag Technik Berlin 1965.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Helmut Strümpfel  
Hochschule für Architektur und Bauwesen  
5300 Weimar  
Geschwister-Scholl-Straße 8