

# Zur Theorie der Cosserat-Platten

Holm Altenbach

## 1. Die kinematischen Beziehungen und die Bewegungsgleichungen für Cosserat-Platten

In Anlehnung an [1], [2] wird ein zweidimensionales, ebenes, deformierbares Cosserat-Kontinuum betrachtet. Im Falle der Beschränkung auf Aufgaben der Plattenbiegung genügt es, die Bewegungen des zweidimensionalen Kontinuums mit Hilfe von drei kinematisch unabhängigen Variablen zu beschreiben (Bild 1):

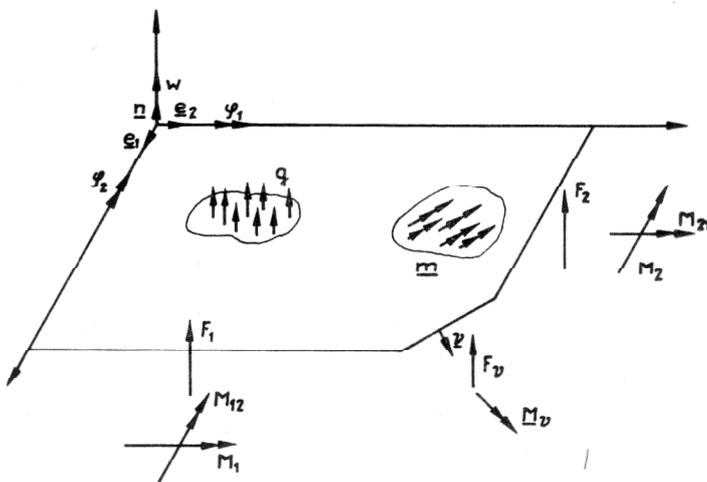


Bild 1  
Kinematische und Kraftgrößen der Cosserat-Platte

$w$  – Verschiebungen in Richtung der Normalen zur Plattenebene,

$$\underline{\varphi} = -\varphi_2 \underline{e}_1 + \varphi_1 \underline{e}_2 \quad (1.1)$$

als Vektor der Verdrehwinkel.  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  bilden die Vektorbasis auf der Platte,  $\underline{n}$  ist die Normale zur Plattenebene. In der Arbeit wird sich auf geometrisch lineare Probleme beschränkt, so daß nur kleine Verschiebungen und Verdrehwinkel betrachtet werden.

Der Spannungszustand des Cosserat-Kontinuums wird durch folgende Größen beschrieben (Bild 1):

$$\underline{F} = F_1 \underline{e}_1 + F_2 \underline{e}_2, \quad (1.2)$$

$$\underline{M} = -M_{12} \underline{e}_1 \underline{e}_1 + M_1 \underline{e}_1 \underline{e}_2 - M_2 \underline{e}_2 \underline{e}_1 + M_{21} \underline{e}_2 \underline{e}_2, \quad (1.3)$$

wobei  $\underline{F}$  der Vektor der Querkräfte und  $\underline{M}$  der Momententensor sind.

Wenn ein beliebiger Ausschnitt (A) aus dem Kontinuum betrachtet wird, so wirken auf den Rand (C) dieses Ausschnittes folgende Belastungen (Bild 1):

$$F_\nu = \underline{\nu} \cdot \underline{F}, \quad (1.4)$$

$$\underline{M}_\nu = \underline{\nu} \cdot \underline{M}, \quad (1.5)$$

wobei  $F_\nu$  die Randkraft,  $\underline{M}_\nu$  die Randmomente,  $\underline{\nu}$  die Normale zum Rand (C) darstellen ( $\underline{\nu} \cdot \underline{n} = 0$ ).

Auf die Platte können folgende Flächenlasten wirken (Bild 1):

$q$  – Flächenkräfte quer zur Platte,

$$\underline{m} = -m_2 \underline{e}_1 + m_1 \underline{e}_2 \quad (1.6)$$

als Vektor der Flächenmomente.

Jeder Punkt des zweidimensionalen Kontinuums ist ein starrer Körper. Seine Lage wird mit Hilfe des Radiusvektors  $\underline{r}$  beschrieben. Folgende Eigenschaften werden für jeden Punkt-Körper definiert:

$\rho$  – Massendichte,

$\rho \underline{\Theta}$  – Trägheitstensor.

Der Trägheitstensor kennzeichnet die Massenverteilung innerhalb der Punkt-Körper. Für glatte Platten mit konstanten Materialeigenschaften gelten folgende Beziehungen:

$$\rho = \langle \rho_* \rangle = \rho_* h, \quad (1.7)$$

$$\rho \underline{\Theta} = \langle \rho_* z^2 \rangle \underline{a} = \rho_* \frac{h^3}{12} \underline{a} = J \underline{a} \quad (\underline{a} = \underline{e}_1 \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \underline{e}_2).$$

In dieser Arbeit werden nur Platten betrachtet, die den Beziehungen (1.7) genügen. Dabei bedeuten  $\rho_*$  Massendichte des dreidimensionalen („realen“) Kontinuums,

$$\langle \underline{f} \rangle = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{f} dz, \quad (1.8)$$

$h$  die Plattendicke.

Die kinetische Energie der Platte läßt sich wie folgt darstellen ( $\dot{\underline{f}} = \frac{d}{dt} \underline{f}$ )

$$\rho K = \frac{1}{2} \rho \dot{w}^2 + \frac{1}{2} \dot{\underline{\varphi}} \cdot \rho \underline{\Theta} \cdot \dot{\underline{\varphi}} = \frac{1}{2} (\rho \dot{w}^2 + J \dot{\underline{\varphi}} \cdot \dot{\underline{\varphi}}). \quad (1.9)$$

Impuls  $\tilde{K}_1$  und Drehimpuls  $\tilde{K}_2$  kann man unter Beachtung von (1.9) wie folgt berechnen

$$\tilde{K}_1 = \int_{(A)} \frac{\partial K}{\partial \dot{w}} dA = \int_{(A)} \rho \dot{w} dA, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_2 &= \int_{(A)} \rho \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} + \underline{r} \times \frac{\partial K}{\partial \dot{\underline{w}}} \underline{n} \right) dA \\ &= \int_{(A)} (\underline{J} \dot{\varphi} + \rho \dot{\underline{w}} \underline{r} \times \underline{n}) dA, \end{aligned} \quad (1.11)$$

wobei  $\int_{(A)} \underline{f} dA$  das Flächenintegral über (A) ist.

Mit Hilfe der Gln. (1.10), (1.11) lassen sich Impulserhaltungssatz und Drehimpulserhaltungssatz wie folgt formulieren

$$\frac{d}{dt} \int_{(A)} \rho \dot{\underline{w}} dA = \int_{(A)} \underline{q} dA + \int_{(C)} \underline{F}_\nu dC, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_{(A)} (\underline{J} \dot{\varphi} + \underline{r} \times \rho \dot{\underline{w}} \underline{n}) dA \\ &= \int_{(A)} (\underline{m} + \underline{r} \times \underline{q} \underline{n}) dA + \\ &\int_{(C)} (\underline{M}_\nu + \underline{r} \times \underline{F}_\nu \underline{n}) dC, \end{aligned} \quad (1.13)$$

wobei  $\int_{(C)} \underline{f} dC$  das Kurvenintegral über (C) ist.

Mit Hilfe des Satzes von Gauß [2]

$$\int_{(C)} \underline{\nu} \cdot \underline{f} dC = \int_{(A)} \underline{\nabla} \cdot \underline{f} dA \quad (1.14)$$

lassen sich die Kurvenintegrale in den Gln. (1.12), (1.13) in Flächenintegrale unter Beachtung der Gln. (1.4), (1.5) überführen

$$\int_{(A)} (\rho \ddot{\underline{w}} - \underline{q} - \underline{\nabla} \cdot \underline{F}) dA = 0, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} &\int_{(A)} [\underline{J} \ddot{\varphi} - \underline{m} - \underline{\nabla} \cdot \underline{M} - \underline{F}_x \\ &+ \underline{r} \times (\rho \ddot{\underline{w}} - \underline{q} - \underline{\nabla} \cdot \underline{F}) \underline{n}] dA = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Hier bedeutet

$$\underline{F}_x = \underline{F} \underline{x} \underline{n}. \quad (1.17)$$

Außerdem wurde folgende Beziehung [3] berücksichtigt

$$\begin{aligned} &\int_{(C)} (\underline{r} \times \underline{\nu} \cdot \underline{F} \underline{n}) dC = - \int_{(C)} (\underline{\nu} \cdot \underline{F} \underline{n}) \underline{x} \underline{r} dC \\ &= - \int_{(A)} [(\underline{\nabla} \cdot \underline{F} \underline{n}) \underline{x} \underline{r} + \frac{1}{2} (\underline{n} \times \underline{F} - \underline{F} \times \underline{n})] dA \\ &= \int_{(A)} [\underline{r} \times (\underline{\nabla} \cdot \underline{F} \underline{n}) + \underline{F} \times \underline{n}] dA. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Die Gln. (1.15), (1.16) gelten für einen beliebigen Flächenausschnitt, folglich lauten die lokalen Bewegungsgleichungen

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} + \underline{q} = \rho \ddot{\underline{w}}, \quad (1.19)$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{M} + \underline{F}_x + \underline{m} = \underline{J} \ddot{\varphi}. \quad (1.20)$$

## 2. Thermodynamik der Cosserat-Platte bei isothermen Prozessen

Der Energieerhaltungssatz (1. Hauptsatz der Thermodynamik) läßt sich für die Cosserat-Platte wie folgt formulieren

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(A)} \rho (K + U) dA &= \int_{(A)} (\underline{q} \dot{\underline{w}} + \underline{m} \cdot \dot{\varphi} + \rho g) dA + \\ &\int_{(A)} (\underline{F}_\nu \dot{\underline{w}} + \underline{M}_\nu \cdot \dot{\varphi}) dC. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Hier sind

U die Dichte der inneren Energie,

g die Geschwindigkeit der Erwärmung unmittelbar im Kontinuum,

Die Umformung des Kurvenintegrals aus Gl. (2.1) erfolgt unter Beachtung von (1.14) und folgender Beziehung [3]:

$$\begin{aligned} &\int_{(C)} [(\underline{\nu} \cdot \underline{F} \dot{\underline{w}}) + \underline{\nu} \cdot \underline{M} \cdot \dot{\varphi}] dC \\ &= \int_{(A)} [\underline{\nabla} \cdot (\underline{F} \dot{\underline{w}}) + \underline{\nabla} \cdot (\underline{M} \cdot \dot{\varphi})] dC \\ &= \int_{(A)} [(\underline{\nabla} \cdot \underline{F}) \dot{\underline{w}} + \underline{\nabla} \dot{\underline{w}} \cdot \underline{F} \\ &+ (\underline{\nabla} \cdot \underline{M}) \cdot \dot{\varphi} + \underline{M} \cdot (\underline{\nabla} \dot{\varphi})^T] dA, \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei  $(\underline{f})^T$  das Zeichen für „Transponieren“, „für Doppelskalarprodukt ist.

Unter Berücksichtigung, daß die Flächenintegrale in (2.1) für einen beliebigen Ausschnitt gelten, erhält man den 1. Hauptsatz der Thermodynamik in der lokalen Form. Unter Beachtung der Gln. (1.19), (1.20) und der Identitäten

$$\underline{F}_x \cdot \dot{\varphi} = - \underline{F} \cdot \dot{\varphi}_x \quad (\dot{\varphi}_x = \dot{\varphi} \times \underline{n}), \quad (2.3)$$

$$\underline{M} \cdot (\underline{\nabla} \dot{\varphi})^T = \underline{M}^T \cdot \underline{\nabla} \dot{\varphi} \quad (2.4)$$

ergibt sich

$$\rho \dot{U} = \rho g - \underline{\nabla} \cdot \underline{h} + \underline{F} \cdot \underline{\gamma} + \underline{M}^T \cdot \underline{\kappa} \quad (2.5)$$

mit

$$\underline{\gamma} = \underline{\nabla} \underline{w} + \underline{\varphi}_x, \quad \underline{\kappa} = \underline{\nabla} \dot{\varphi}. \quad (2.6)$$

$\underline{\gamma}$  kennzeichnet die Querschubdeformationen,  $\underline{\kappa}$  ist der Tensor der Biege- und Drilldeformationen. Die hier abgeleitete Theorie ist somit eine Plattentheorie, die der Timoshenko-Reissner-Theorie entspricht. Im Falle der Annahme der Kirchhoff-Hypothese ist  $\underline{\gamma} = 0$  und man erhält den Zusammenhang zwischen den Durchbiegungen und Verdrehwinkeln.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik lautet in der Integralform

$$\frac{d}{dt} \int_{(A)} \rho S dA \geq \int_{(A)} \frac{\rho g}{T} dA \quad (2.7)$$

T ist die absolute Temperatur der Platte und S die Entropiedichte. Unter Berücksichtigung der Gl. (1.14) kann man den 2. Hauptsatz auch in der lokalen Form angeben

$$\rho ST \geq \rho g. \quad (2.8)$$

Die Auswertung des 1. und des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik (2.5), (2.8) führt auf

$$\underline{F} \cdot \underline{\dot{\gamma}} + \underline{M}^T \cdot \underline{\dot{\kappa}} - \rho \dot{H} \geq 0. \quad (2.9)$$

Dabei ist

$$H = U - ST$$

die Dichte der freien (Helmholtzschen) Energie. Die Gl. (2.9) wird auch dissipative Ungleichung genannt, die dissipative Funktion  $\Phi$  ist mit

$$\Phi = \underline{F} \cdot \underline{\dot{\gamma}} + \underline{M}^T \cdot \underline{\dot{\kappa}} - \rho \dot{H} \quad (2.10)$$

im Falle der hier betrachteten Cosserat-Platten definiert.

Folglich geht (2.9) in

$$\Phi \geq 0 \quad (2.11)$$

über. Das Gleichheitszeichen steht für reversible Prozesse (ohne Energiedissipation), die Ungleichheit steht für irreversible Prozesse.

### 3. Übergang zu neuen kinematischen und dynamischen Größen

Im Abschnitt 2 wurden folgende Parameter eingeführt:

1. die dynamischen (Kraftgrößen)  $\underline{F}$ ,  $\underline{M}$ ,
2. die kinematischen (Deformationsgrößen)  $\underline{\gamma}$ ,  $\underline{\kappa}$ ,
3. ein energetischer Parameter  $H$ .

In [7] schlägt Palmow folgende neue Größe vor: statt  $\underline{M}$  folgendes Vektorprodukt

$$\underline{G} = \underline{M} \times \underline{n}. \quad (3.1)$$

Die Einführung von  $\underline{G}$  hat den Vorteil, daß folgende Gl.

$$\underline{G} = \langle \underline{a} \cdot \underline{\tau} \cdot \underline{z} \cdot \underline{a} \rangle \quad (3.2)$$

Gültigkeit besitzt und bei der Betrachtung von nichtpolaren Materialien (der Spannungstensor  $\underline{\tau}$  für diese Materialklasse ist symmetrisch) die Symmetrie des Spannungstensors die Symmetrie des Momententensors zur Folge hat

$$\underline{G} = \underline{G}^T. \quad (3.3)$$

Es genügt dann, statt  $\underline{\kappa}$  folgenden Deformationstensor zu betrachten [7]

$$\underline{\mu} = (\underline{\kappa} \times \underline{n})^S - \frac{1}{2} [(\underline{\kappa} \times \underline{n}) + (\underline{\kappa} \times \underline{n})^T]. \quad (3.4)$$

Dies folgt aus der Identität

$$\underline{M}^T \cdot \underline{\kappa} = \underline{M} \cdot \underline{\kappa}^T = \underline{G} \cdot \underline{\mu}. \quad (3.5)$$

Damit gehen die Gln. (2.9) und (1.20) in folgende Gln. über

$$\underline{F} \cdot \underline{\dot{\gamma}} + \underline{G} \cdot \underline{\dot{\mu}} - \rho \dot{H} \geq 0, \quad (3.6)$$

$$\underline{v} \cdot \underline{G} - \underline{F} + \underline{m}_x = J \underline{\dot{\psi}}_x. \quad (3.7)$$

Dabei gilt

$$\underline{m}_x = \underline{m} \times \underline{n}.$$

### 4. Die Cosserat-Platte aus elastischem Material

**Definition:** Die Cosserat-Platte wird elastische Cosserat-Platte genannt, wenn die Querkräfte  $\underline{F}$ , der Momententensor  $\underline{G}$  und die freie Energie  $\rho H$  nur von den Deformationsgrößen  $\underline{\gamma}$ ,  $\underline{\mu}$  abhängen.

Wenn  $\rho H$  eine Funktion von  $\underline{\gamma}$  und  $\underline{\mu}$  ist, so gilt

$$\rho \dot{H} = \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\gamma}} \cdot \underline{\dot{\gamma}} + \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\mu}} \cdot \underline{\dot{\mu}}. \quad (4.1)$$

Nach Einsetzen von (4.1) in (3.6) erhält man

$$\left( \underline{F} - \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\gamma}} \right) \cdot \underline{\dot{\gamma}} + \left( \underline{G} - \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\mu}} \right) \cdot \underline{\dot{\mu}} \geq 0. \quad (4.2)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung von (4.2) ist

$$\underline{F} = \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\gamma}}, \quad \underline{G} = \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\mu}}. \quad (4.3)$$

Im Falle der geometrisch linearen Theorie kann für  $\rho H$  folgende quadratische Approximation verwendet werden:

$$\rho H = \frac{1}{2} \underline{\gamma} \cdot \underline{\Gamma} \cdot \underline{\gamma} + \frac{1}{2} \underline{\mu} \cdot \underline{\tilde{C}} \cdot \underline{\mu}. \quad (4.4)$$

Für isotropes Material ist in [4] gezeigt, daß der Tensor der Querschubsteifigkeiten  $\underline{\Gamma}$  (Tensor 2. Stufe) und der Tensor der Biegesteifigkeiten  $\underline{\tilde{C}}$  (Tensor 4. Stufe) folgende Struktur haben

$$\underline{\Gamma} = \Gamma_0 \underline{a}, \quad (4.5)$$

$$\underline{\tilde{C}} = C_1 \underline{c} \underline{c} + C_2 (\underline{a}_2 \underline{a}_2 + \underline{a}_4 \underline{a}_4), \quad (4.6)$$

wobei

$$\underline{a}_2 = \underline{e}_1 \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \underline{e}_2,$$

$$\underline{c} = \underline{e}_1 \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \underline{e}_1, \quad \underline{a}_4 = \underline{e}_1 \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \underline{e}_1$$

bedeuten. Die im Abschnitt 3 beschriebene Transformation hat zur Folge, daß  $\underline{\tilde{C}}$  in

$$\underline{\tilde{C}} = C_1 \underline{a} \underline{a} + C_2 (\underline{a}_2 \underline{a}_2 + \underline{a}_4 \underline{a}_4) \quad (4.7)$$

übergeht.

Nach dem Einsetzen von (4.4) in (4.3) unter Beachtung von (4.5) und (4.7) erhält man

$$\underline{F} = \Gamma_0 \underline{\gamma} \quad (4.8)$$

$$\underline{G} = \underline{\tilde{C}} \cdot \underline{\mu} = (C_1 - C_2) (\underline{a} \cdot \underline{\mu}) \underline{a} + 2 C_2 \underline{\mu} \quad (4.9)$$

Die Bestimmung der Steifigkeitsparameter  $\Gamma_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  für die Cosserat-Platte geschieht mit Hilfe des Vergleichs von Lösungen geeigneter Randwertaufgaben der klassischen Elastizitätstheorie und der hier abgeleiteten Plat-

tentheorie. Dabei wird die Gültigkeit der Gl. (3.2) und der Gl.

$$\underline{\underline{F}} = \langle \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{n}} \rangle \quad (4.10)$$

sowie des Hookeschen Gesetzes

$$\underline{\underline{\tau}} = 2G \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \vartheta \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\epsilon}} \right), \vartheta = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}$$

vorausgesetzt. Hier ist  $\underline{\underline{E}}$  der dreidimensionale Einheits-tensor,  $\underline{\underline{\epsilon}}$  der Deformationstensor der Elastizitätstheorie,  $G$ ,  $\nu$  Schubmodul und Querkontraktionszahl. Entsprechende Rechnungen [6] zeigen, daß für elastische Cosserat-Platten folgende Steifigkeitsparameter bei konstanten Werten für  $G$  und  $\nu$  gelten

$$C_2 = \frac{Gh^3}{12}, C_1 = C_2 \frac{1+\nu}{1-\nu}, \Gamma_o = \left( \frac{\pi^2}{h^2} \right) C_2. \quad (4.11)$$

Diese Werte werden auch in Rechnungen anderer Autoren [7], [8] bestätigt. Bei Annahme der Kirchhoff-Hypothese geht  $\Gamma_o \rightarrow \infty$  und, da die Querkräfte  $\underline{\underline{F}}$  endlich sein müssen, muß  $\underline{\underline{\gamma}}$  folglich Null werden. Die Gln. (4.8), (4.9) lassen sich leicht nach den Deformationsgrößen auflösen

$$\underline{\underline{\gamma}} = \Gamma_o^{-1} \underline{\underline{F}}, \quad (4.12)$$

$$2 C_2 \underline{\underline{\mu}} = \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \left( \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{a}} \right) \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{a}} \cdot \text{Dev } \underline{\underline{G}}. \quad (4.13)$$

Dabei entspricht die Definition des Momentendeviators  $\text{Dev } \underline{\underline{G}}$  der Definition des Spannungsdeviators in der klassischen Elastizitätstheorie [7], [9]:

$$\underline{\underline{G}} = \text{Dev } \underline{\underline{G}} + \frac{1}{3} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{G}}) \underline{\underline{E}}. \quad (4.14)$$

Für  $\nu = 0,5$  verschwindet das erste Glied in (4.13). Damit kennzeichnet der Momentendeviator die Deformationen, die nicht mit „Volumenänderungen“ verbunden sind. Das erste Glied beschreibt Deformationen, die mit „Volumenänderungen“ verbunden sind. Das Ersatzmodell der elastischen Cosserat-Platte ist auf Bild 2 gezeigt.

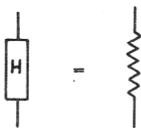


Bild 2  
Ersatzmodell der elastischen Cosserat-Platte

## 5. Die Cosserat-Platte aus viskosem Material

**Definition** [7]: Die Cosserat-Platte wird viskose Cosserat-Platte genannt, wenn der Querkraftvektor  $\underline{\underline{F}}$ , der Momententensor  $\underline{\underline{G}}$  und die freie Energie  $\rho H$  nur von den Deformationsgeschwindigkeiten  $\underline{\underline{\gamma}}$ ,  $\underline{\underline{\mu}}$  abhängen.

Für isotropes Material gilt

$$\rho H = \rho H(\underline{\underline{\gamma}}, \underline{\underline{\mu}}), \quad (5.1)$$

$$\underline{\underline{F}} = \check{\Gamma}_o \cdot \underline{\underline{\gamma}} = \check{\Gamma}_o \underline{\underline{\gamma}}, \quad (5.2)$$

$$\underline{\underline{G}} = (4) \check{C}_2 \underline{\underline{\mu}} = (\check{C}_1 - \check{C}_2) (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{\mu}}) \underline{\underline{a}} + 2 \check{C}_2 \underline{\underline{\mu}}. \quad (5.3)$$

Die Gln. (5.2), (5.3) sind analog zu den Gln. (4.8) und (4.9) formuliert. Unter Beachtung von

$$\rho \dot{H} = \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\underline{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}} + \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\underline{\mu}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mu}}} \quad (5.4)$$

erhält man nach Einsetzen von (5.2) bis (5.4) in die dissipative Ungleichung (3.6)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \check{\Gamma}_o \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}} + \frac{1}{2} (\check{C}_1 - \check{C}_2) (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mu}}})^2 \\ & + \check{C}_2 \underline{\underline{\dot{\mu}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mu}}} - \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\underline{\gamma}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\gamma}}} - \frac{\partial \rho H}{\partial \underline{\underline{\mu}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mu}}} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Erfüllung der Beziehung (5.5) sind

$$H = \text{konstant}(\underline{\underline{\gamma}}, \underline{\underline{\mu}}), \quad (5.6)$$

$$\check{\Gamma}_o \geq 0, \check{C}_1 - \check{C}_2 \geq 0, \check{C}_2 \geq 0. \quad (5.7)$$

Ohne eine weitere Einschränkung vorzunehmen, kann

$$H = 0 \quad (5.8)$$

gesetzt werden, da die Energie nur bis auf eine additive Konstante genau ermittelt werden kann.

Die Koeffizienten  $\check{\Gamma}_o$ ,  $\check{C}_1$ ,  $\check{C}_2$  sind wie im vorhergehenden Fall elastischen Materials zu ermitteln. Das Materialgesetz für viskoses Material wird analog dem Hookeschen Gesetz formuliert

$$\underline{\underline{\tau}} = 2 \eta \left( \vartheta \underline{\underline{E}} \frac{\kappa}{1-2\kappa} + \underline{\underline{\epsilon}} \right). \quad (5.9)$$

Dabei sind  $\eta$ ,  $\kappa$  die Materialparameter des viskosen Materials. Die Lösung entsprechender Vergleichsaufgaben für das dreidimensionale und das zweidimensionale Kontinuum führt auf

$$\check{C}_2 = \frac{\eta h^3}{12}, \check{C}_1 = \check{C}_2 \frac{1+\kappa}{1-\kappa}, \check{\Gamma}_o = \left( \frac{\pi^2}{h^2} \right) \check{C}_2. \quad (5.10)$$

Die ermittelten Koeffizienten (5.10) erfüllen offensichtlich die Bedingungen (5.7). Weiterhin gelten folgende Beziehungen

$$\underline{\underline{\gamma}} = \check{\Gamma}_o^{-1} \underline{\underline{F}}, 2 \check{C}_2 \underline{\underline{\mu}} = \frac{1-2\kappa}{3(1+\kappa)} (\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{a}}) \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{a}} \cdot \text{Dev } \underline{\underline{G}}. \quad (5.11)$$

Das Ersatzmodell der viskosen Cosserat-Platte ist auf Bild 3 gezeigt.

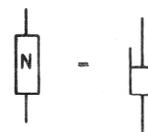


Bild 3  
Ersatzmodell der viskosen Cosserat-Platte

## 6. Die Cosserat-Platte aus plastischem Material

**Definition [7]:** Die Cosserat-Platte wird plastische Cosserat-Platte genannt, wenn sie sich unterhalb eines Grenzwertes der Norm des Querkraftvektors und des Momententensors nicht verformt. Wenn die Norm des Querkraftvektors und des Momententensors den Grenzwert erreichen, so verhält sich die plastische Cosserat-Platte wie eine viskose Cosserat-Platte aus inkompressiblem Material.

Folgende konstitutive Gln. gelten dann

$$\begin{aligned} N(\underline{F}) < F_s, \quad \dot{\underline{\gamma}} &= 0, \\ N(\underline{F}) = F_s, \quad \dot{\underline{\gamma}} &= \alpha \underline{F}, \quad \alpha \geq 0, \\ N(\underline{G}) < G_s, \quad \dot{\underline{\mu}} &= 0, \\ N(\underline{G}) = G_s, \quad \dot{\underline{\mu}} &= \beta \underline{a} \cdot \text{Dev } \underline{G}, \quad \beta \geq 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

$\alpha, \beta$  sind Koeffizienten, die aus den Fließbedingungen zu ermitteln sind.

Die Norm der Querkräfte ist der Absolutbetrag des Querkraftvektors

$$N(\underline{F}) = |\underline{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = F_N. \quad (6.2)$$

In der klassischen Elastizitätstheorie wird als Norm des Spannungstensors  $\underline{\tau}$  die Intensität der Schubspannungen verwendet [10]. Analog gilt für die Norm des Momententensors

$$N(\text{Dev } \underline{G}) = \sqrt{\frac{1}{2} \text{Dev } \underline{G} \cdot \text{Dev } \underline{G}} = G_N. \quad (6.3)$$

Bei Problemen der Plattenbiegung kann man von folgendem Spannungstensor ausgehen [7]

$$\underline{\tau} = \underline{\tau}_0 \text{ sign } z + \underline{n} \underline{\tau} + \underline{\tau} \underline{n}. \quad (6.4)$$

Nach dem Einsetzen von (6.4) in (4.10) und (3.2) erhält man

$$\underline{G} = \underline{\tau}_0 \frac{h^2}{4}, \quad \underline{F} = \underline{\tau} h. \quad (6.5)$$

Wenn  $\tau_s$  die Fließgrenze des Materials ist, so gilt

$$\frac{1}{2} \text{Dev } \underline{\tau}_0 \cdot \text{Dev } \underline{\tau}_0 + \underline{\tau}^2 = \tau_s^2. \quad (6.6)$$

Wenn beide Seiten der Gl. (6.6) mit  $\frac{h^2}{16}$  multipliziert werden, so erhält man

$$G_N^2 + \frac{h^2}{16} F_N^2 = G_s^2. \quad (6.7)$$

Die entsprechenden Fließgrenzen  $F_s$  und  $G_s$  ergeben sich mit

$$F_s = \tau_s h, \quad G_s = \tau_s \frac{h^2}{4}. \quad (6.8)$$

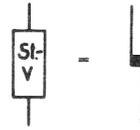
Damit kann man statt (6.1) eine Gl. für die Platte aus plastischem Material formulieren [7]

$$G_N^2 + \frac{h^2}{16} F_N^2 \leq G_s^2, \quad \dot{\underline{\gamma}} = 0, \quad \dot{\underline{\mu}} = 0, \quad (6.9)$$

$$G_N^2 + \frac{h^2}{16} F_N^2 = G_s^2, \quad \dot{\underline{\gamma}} = A \alpha \underline{F}, \quad \dot{\underline{\mu}} = \beta \underline{a} \cdot \text{Dev } \underline{G}.$$

$A$  ist ein zu ermittelnder Koeffizient [7].

Das Ersatzmodell der plastischen Cosserat-Platte ist auf Bild 4 gezeigt.



**Bild 4**  
Ersatzmodell der plastischen Cosserat-Platte

## 7. Die Cosserat-Platte mit kompliziertem Materialverhalten

### 7.1. Einleitende Bemerkungen

In den Abschnitten 4 bis 6 wurden die konstitutiven Gleichungen für Cosserat-Platten aus klassischen Materialien (elastisch, viskos, plastisch) formuliert. Offensichtlich reichen die drei Grundmodelle nicht aus, um alle experimentell ermittelten Fakten für das Verhalten realer Werkstoffe auch analytisch zu beschreiben. Komplizierte Werkstoffeigenschaften lassen sich durch neue konstitutive Gleichungen beschreiben. Für diese müsste jedoch erneut die Erfüllung der Gl. (2.9) überprüft werden, was oftmals schwierig ist. In dieser Arbeit wird daher eine aus der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik bekannte Methode angewendet werden: die Methode der rheologischen Modelle. Ausführlich sind die wichtigsten Elemente der Methode in [11], [12] beschrieben. Danach lassen sich mit Hilfe der 3 rheologischen Grundmodelle (elastisch, plastisch, viskos) neue Modelle durch „Parallelschaltung“ bzw. durch „Reihenschaltung“ ermitteln. Im Falle der „Reihenschaltung“ gilt [12] (Bild 5):

- die Deformationen für jedes Element summieren sich zur Gesamtdeformation,
- die Spannungen sind überall gleich.



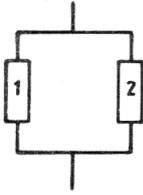
**Bild 5**  
Reihenschaltung von 2 Grundmodellen

Für die „Parallelschaltung“ gilt analog [12] (Bild 6):

- die Spannungen in jedem Element addieren sich zur Gesamtspannung,
- die Deformationen sind überall gleich.

Außerdem gilt für beide Verbindungsarten, daß sich die freie Energie für jedes Element zur Gesamtenergie addiert. Der Vorteil der Anwendung der Methode der rheo-

logischen Modelle besteht darin, daß die nach den beiden Verbindungsarten neu gebildeten Gleichungen automatisch die Gl. (2.9) erfüllen [12]. Nachfolgend werden die Grundgedanken der Methode der rheologischen Modelle auf die Cosserat-Platten angewendet.



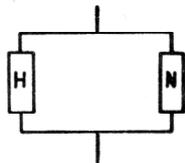
**Bild 6**  
Parallelschaltung von 2 Grundmodellen

## 7.2. Konstitutive Gleichungen für Cosserat-Platten, die durch Kombination von zwei Grundelementen gebildet werden

### 7.2.1. Die Cosserat-Platte aus Kelvin-Voigt-Material

Das erste Beispiel stellt eine „Parallelschaltung“ des elastischen und des viskosen Grundmodells der Cosserat-Platte dar (Bild 7). Analog zu dem Kelvin-Voigt-Modell [11] der dreidimensionalen Mechanik gilt hier:

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{F}^{el} + \underline{F}^{visk}, \\ \underline{G} &= \underline{G}^{el} + \underline{G}^{visk}, \\ \underline{\gamma} &= \underline{\gamma}^{el} = \underline{\gamma}^{visk}, \\ \underline{\dot{\mu}} &= \underline{\dot{\mu}}^{el} = \underline{\dot{\mu}}^{visk}. \end{aligned} \quad (7.1)$$



**Bild 7**  
Die Cosserat-Platte aus Kelvin-Voigt-Material

Hier steht „el“ für „elastischen Anteil“, „visk“ für „viskosen Anteil“.

Die Ausdrücke für  $\underline{F}^{el}$ ,  $\underline{F}^{visk}$ ,  $\underline{G}^{el}$ ,  $\underline{G}^{visk}$  ergeben sich aus den Gln. (4.8), (5.2), (4.9), (5.3). Folglich gilt:

$$\underline{F} = \Gamma_o \underline{\gamma} + \check{\Gamma}_o \underline{\dot{\gamma}}, \quad (7.2)$$

$$\underline{G} = {}^{(4)}\underline{C} \cdot \underline{\mu} + {}^{(4)}\underline{C} \cdot \underline{\dot{\mu}}. \quad (7.3)$$

Die erhaltenen Gln. gestatten die Beschreibung der Elastizitätsverzögerung [11] der Cosserat-Platte.

### 7.2.2. Die Cosserat-Platte aus Maxwell-Material

In diesem Fall kann das Materialverhalten durch eine „Reihenschaltung“ des elastischen und des viskosen Grundmodells dargestellt werden (Bild 8). Damit gilt

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{F}^{el} = \underline{F}^{visk}, \\ \underline{G} &= \underline{G}^{el} = \underline{G}^{visk}, \\ \underline{\dot{\gamma}} &= \underline{\dot{\gamma}}^{el} + \underline{\dot{\gamma}}^{visk}, \\ \underline{\dot{\mu}} &= \underline{\dot{\mu}}^{el} + \underline{\dot{\mu}}^{visk}. \end{aligned} \quad (7.4)$$



**Bild 8**  
Die Cosserat-Platte aus Maxwell-Material

Dabei wird  $\underline{\dot{\gamma}}^{el}$ ,  $\underline{\dot{\gamma}}^{visk}$ ,  $\underline{\dot{\mu}}^{el}$ ,  $\underline{\dot{\mu}}^{visk}$  aus (4.12), (4.13), (5.11) bestimmt:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\gamma}} &= \Gamma_o^{-1} \underline{\dot{F}} + \check{\Gamma}_o^{-1} \underline{F}, \\ \underline{\dot{\mu}} &= \frac{1}{2C_2} \left[ \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} (\underline{\dot{G}} \cdot \underline{a}) \underline{a} + \underline{a} \cdot \text{Dev } \underline{\dot{G}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2C_2} \left[ \frac{1-2\kappa}{3(1+\kappa)} (\underline{\dot{G}} \cdot \underline{a}) \underline{a} + \underline{a} \cdot \text{Dev } \underline{\dot{G}} \right]. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Mit den erhaltenen Gln. läßt sich das Relaxationsverhalten der Cosserat-Platte beschreiben.

### 7.2.3. Die Cosserat-Platte aus Prandtl-Material

Die Cosserat-Platte aus Prandtl-Material stellt eine „Reihenschaltung“ aus plastischem und elastischem Grundmodell dar [11] (Bild 9). Damit gilt

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \underline{F}^{el} = \underline{F}^{pl}, \\ \underline{G} &= \underline{G}^{el} = \underline{G}^{pl}, \\ \underline{\dot{\gamma}} &= \underline{\dot{\gamma}}^{el} + \underline{\dot{\gamma}}^{pl}, \\ \underline{\dot{\mu}} &= \underline{\dot{\mu}}^{el} + \underline{\dot{\mu}}^{pl}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

„pl“ steht hier für „plastischen Anteil“.



**Bild 9**  
Die Cosserat-Platte aus Prandtl-Material

Entsprechend den Gln. (4.12), (4.13), (6.1) gilt

$$\underline{\dot{\gamma}} = \Gamma_o^{-1} \underline{\dot{F}} + \begin{cases} 0 & , N(\underline{F}) < F_s \\ \alpha \underline{F}, \alpha \geq 0 & , N(\underline{F}) = F_s \end{cases} \quad (7.7)$$

$$\underline{\dot{\mu}} = \frac{1}{2C_2} \left[ \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} (\underline{\dot{G}} \cdot \underline{a}) \underline{a} \right] + \underline{a} \cdot \text{Dev } \underline{\dot{G}} + \begin{cases} 0 & , N(\underline{G}) < G_s \\ \beta \underline{a} \cdot \text{Dev } \underline{G} & , N(\underline{G}) = G_s \end{cases} \quad (7.8)$$

### 7.2.4. Die plastische Cosserat-Platte mit linearer Verfestigung

Die konstitutiven Gln. für diese Platte erhält man durch „Parallelschaltung“ des elastischen und des plastischen Grundmodells (Bild 10):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{F}}^{el} + \underline{\underline{F}}^{pl}, \\ \underline{\underline{G}} &= \underline{\underline{G}}^{el} + \underline{\underline{G}}^{pl}, \\ \underline{\underline{\gamma}} &= \underline{\underline{\gamma}}^{el} = \underline{\underline{\gamma}}^{pl}, \\ \underline{\underline{\dot{\mu}}} &= \underline{\underline{\dot{\mu}}}^{el} = \underline{\underline{\dot{\mu}}}^{pl}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

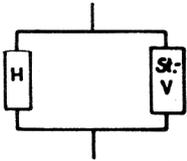


Bild 10  
Die plastische Cosserat-Platte mit linearer Verfestigung

Damit erhält man folglich

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \Gamma_0 \underline{\underline{\gamma}} + \underline{\underline{F}}^{pl}, \\ \underline{\underline{G}} &= (C_1 - C_2) (\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{\mu}}) \underline{\underline{a}} + 2C_2 \underline{\underline{\mu}} + \underline{\underline{G}}^{pl} \end{aligned} \quad (7.10)$$

und die Gln. (6.1).

### 7.3. Weitere konstitutive Gleichungen

Nach der hier dargestellten Methode lassen sich ohne Schwierigkeiten weitere konstitutive Gln. finden. So ergibt beispielsweise die Parallelschaltung eines elastischen Grundmodells mit dem Maxwell-Modell ein neues Plattenmodell, das in der Literatur [11] als Poynting-Thompson-Material bezeichnet wird. Die Cosserat-Platte aus Bingham-Material ist eine Reihenschaltung aus elastischem Grundmodell und einem Modell, das eine Parallelschaltung des viskosen und des plastischen Grundmodells darstellt. Weitere Modelle für komplizierte Materialien sind in [11], [12] bzw. [13] für die Kontinuumsmechanik angegeben. Sie lassen sich leicht auf Cosserat-Platten übertragen.

## 8. Diskussion der Ergebnisse

Die hier dargestellte Theorie der Cosserat-Platten stellt einen Sonderfall der u. a. in [5] beschriebenen Theorie einfacher Schalen dar. Im Gegensatz zu vielen anderen Autoren wird dabei die Theorie direkt formuliert. Ein Vorteil dieser Formulierungsmethode ergibt sich aus dem nicht notwendigen Übergang vom dreidimensionalen zum zweidimensionalen Kontinuum. Die in der Arbeit betrachtete Variante der allgemeinen Theorie, die eine Analogie zur Timoshenko-Reissner-Theorie darstellt, gestattet auch eine problemfreie Formulierung der Randbedingungen. In den Arbeiten von Shilin erfolgt eine Konkretisierung auf thermoelastisches Material. Analog zu den in [7] von Palmow gemachten Vorschlägen wurden in dieser Arbeit weitere Materialgesetze aufgenommen. Zweifellos ist die Bestimmung der Materialparameter für die Cosserat-Platte aus der Betrachtung

entsprechender Testaufgaben eine so komplizierte Aufgabe, daß sie als Nachteil der direkten Formulierungsmethode genannt werden muß. Dies tritt besonders deutlich bei der Betrachtung plastischen Materials hervor. Für elastisches und viskoses Material ist die Ermittlung geeigneter Ersatzparameter nicht so problematisch. In [4] und [6] ist dies ausführlich beschrieben (wobei sogar Material mit sich über die Plattendicke ändernden Materialeigenschaften – z. B. geschichtetes Material – betrachtet wird). Die Kompliziertheit der Ermittlung der Ersatzparameter stellt damit die Aufgabe, bei der Modellauswahl mehr Vorüberlegungen anzustellen. So stellen zwar die hier abgeleiteten Grundgleichungen das theoretische Maximum im Rahmen der hier betrachteten geometrisch linearen Theorie für Cosserat-Platten dar, jedoch lassen sich für bestimmte Aufgabenklassen weitere Einschränkungen treffen, so daß man im Sinne der Ergebnisgenauigkeit vertretbare Lösungen erhalten kann, die insgesamt weniger Aufwand fordern. Ein Beispiel dafür ist die Theorie für dünne Platten, bei denen der Querschubeffluß oft vernachlässigt werden kann ( $\Gamma_0 \rightarrow \infty$ ,  $\underline{\underline{\gamma}} = 0$ ). Diese Einschränkungen führen zu einer weiteren Reduzierung der Anzahl der konstitutiven Gln. von 5 auf 3. Eine weitere mögliche Vereinfachung besteht in der Vernachlässigung der Kompressibilität des Plattenmaterials.

Die hier vorgeschlagene Betrachtungsweise gestattet, übersichtlich und nach einem einheitlichen Schema komplizierte Materialeigenschaften bei Platten zu modellieren. Die hier gesammelten Erfahrungen können auch auf Schalen bzw. geschichtete Konstruktionen angewendet werden. Eigene Ergebnisse dazu werden zu einem späteren Zeitpunkt veröffentlicht.

Die in der Arbeit dargestellten Ergebnisse entstanden in enger Diskussion mit den Kollegen des Lehrstuhls für Mechanik und Regelungsprozesse des Polytechnischen Instituts Leningrad. Für die gegebene Unterstützung und die Hinweise sei hiermit gedankt.

### LITERATUR

- [1] Palmow, W. A., Altenbach, H.: Über eine Cosseratsche Theorie für elastische Platten. Technische Mechanik, 3 (1982), H. 3, S. 5 – 9.
- [2] Altenbach, H.: Die Grundgleichungen einer linearen Theorie für dünne, elastische Platten und Scheiben mit inhomogenen Materialeigenschaften in Dickenrichtung. Technische Mechanik, 5 (1984), H. 2, S. 51 – 58.
- [3] Лурье, А. И.: Нелинейная теория упругости. Москва, Наука, 1980.
- [4] Altenbach, H.: Die Ermittlung der Deformationsenergie für dünne Platten und Schalen mit in Dickenrichtung veränderlichen Materialeigenschaften. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg, 28 (1984), H. 2, S. 29 – 33.
- [5] Жилин, П. А., Скворцов, В. Р.: Описание простого краевого эффекта теорией оболочек и пространственной теорией упругости. Изв. АН СССР, Мех. тв. тела, 1983, 5, 137 – 147.
- [6] Altenbach, H.: Die Ermittlung von Ersatzigenschaften für mehrschichtige und inhomogene Platten. Tagungsberichte X. IKM.
- [7] Пальмов, В. А.: К теории пластин Коссера. Труды ЛПИ, 1982, № 386, Ленинград, 3 – 8.

- [ 8 ] Reissner, E.: On bending of elastic Plates. Quart. Appl. Math., 1947, Vol. 5, Nr. 1, S. 55 ff.
- [ 9 ] Лурье, А. И.: Нелинейная теория упругости. Москва, Наука, 1980.
- [10] Качанов, Л. М. Основы теории пластичности. Наука, Москва, 1969.
- [11] Reiner, M.: Rheologie. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1967.
- [12] Пальмов, В. А.: Колебания упруго-пластических тел, Наука, Москва, 1976.
- [13] Пальмов, В. А.: Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел. Успехи механики, т. 3, вып. 3, 1980, 76 – 115.

**Anschrift des Verfassers:**

Dr.-Ing. H. Altenbach  
Technische Hochschule „Otto von Guericke“  
Sektion Dieselmotoren, Pumpen und Verdichter  
3010 Magdeburg  
PSF 124