

# Zur Dissipation beim plastischen Fließen

Helge Bergander, Michael Luther

## 1. Einleitung

Die thermodynamisch konsistente Formulierung der Materialgleichungen stößt auf die Behandlung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und die Erweiterung der den Zustand des Materials beschreibenden inneren Parameter. Damit wird neben dem Deformationsgesetz die Einführung weiterer Materialgleichungen erforderlich. Auf der Grundlage von Experimenten von Farren und Taylor [1] führen Lee [2] und Argyris [3] für die Dissipation bei plastischem Material ein einfaches empirisches Gesetz ein. Nach Untersuchung einfacher Modelle für plastisches Material läßt sich unter Verwendung des zweiten Hauptsatzes zeigen, daß die Dissipation aus den vorhandenen Deformationsgesetzen unter sinnvollen Annahmen abgeleitet werden kann. Das genannte Experiment diente zur Einschätzung der numerischen Auswertung der verschiedenen Materialmodelle.

## 2. Thermodynamische Grundlagen

Das nichtisotherme gekoppelte Feldproblem muß folgenden Bedingungen genügen:

1. Die mechanische Zulässigkeit, d. h. die Sätze über die Erhaltung der Masse, des Impulses und des Drehimpulses sowie der Energie müssen erfüllt werden.
2. Die thermodynamische Zulässigkeit beinhaltet Restriktionen insbesondere durch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.
3. Die konstitutive Zulässigkeit ist durch 11 Materialgleichungen beschreibbar.

Für das Ziel dieser Arbeit werden nur der Energieerhaltungssatz und der zweite Hauptsatz in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung benötigt [4]

$$\rho \dot{e} = \underline{\sigma}^T \dot{\underline{\epsilon}} - \operatorname{div} \underline{q} + \rho r \quad (2.1)$$

$$\rho T \dot{\eta} - \rho \dot{e} + \underline{\sigma}^T \dot{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{T} \underline{q}^T \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (2.2)$$

wobei  $e$  die innere Energiedichte,  $r$  die innere Energiequellendichte,  $\eta$  die Entropiedichte,  $T$  die absolute Temperatur,  $\rho$  die Dichte,  $\underline{q}^T = (q_1, q_2, q_3)$  der Wärmestromvektor,  $\underline{\sigma}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13})$  der Spannungsvektor und  $\underline{\epsilon}^T = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13})$  der Dehnungsvektor sind. Nach Lee [2], Argyris [3] u. a. kann die Dehnungsrate in den elastischen und den inelastischen Anteil zerlegt werden.

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\underline{\epsilon}}_e + \dot{\underline{\epsilon}}_i \quad (2.3)$$

Der Zustand des Körpers wird durch die Temperatur, die elastische Dehnung und einen den inelastischen Zustand charakterisierenden Satz innerer Parameter  $\underline{h}$  beschrieben. Für eine Auswertung der C-D-Ungleichung er-

weist sich die Einführung der freien Energiedichte als günstig.

$$\Phi = e - \eta T = \Phi(\underline{\epsilon}_e, T, \underline{h}) \quad (2.4)$$

Die Verwendung von (2.4) und (2.3) in (2.2) liefert

$$\left( \frac{1}{\rho} \underline{\sigma}^T - \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\epsilon}_e} \right) \dot{\underline{\epsilon}}_e - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \eta \right) \dot{T} + \frac{1}{\rho} \underline{\sigma}^T \dot{\underline{\epsilon}}_i - \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{h}} \dot{\underline{h}} - \frac{1}{\rho T} \underline{q}^T \operatorname{grad} T \geq 0. \quad (2.5)$$

Die Erfüllung dieser Ungleichung an jedem Punkt des Kontinuums unter Beachtung der Tatsache, daß es an Größe und Richtung von  $\dot{\underline{\epsilon}}_e$  und  $\dot{T}$  bezüglich eines Punktes keine Einschränkungen gibt, fordert, daß die ersten beiden Glieder den Wert Null annehmen müssen.

$$\underline{\sigma} = \rho \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\epsilon}_e} \quad (2.6)$$

$$\eta = - \frac{\partial \Phi}{\partial T} \quad (2.7)$$

Der letzte Term in (2.5) ist die Fourier-Ungleichung. Wenn bei reinen Wärmeleitvorgängen keine inelastischen Formänderungen auftreten, folgt

$$\underline{q}^T \cdot \operatorname{grad} T \leq 0. \quad (2.8)$$

Ebenso gilt im isothermen Fall.

$$\frac{1}{\rho} \underline{\sigma}^T \dot{\underline{\epsilon}}_i - \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{h}} \dot{\underline{h}} \geq 0 \quad (2.9)$$

Die Aufspaltung in die beiden Ungleichungen (2.8) und (2.9) soll auch im gekoppelten Fall gültig sein. Da der erste Term in (2.9) die Zuwachsrate der spezifischen inelastischen Arbeit ist, muß der zweite Term ein Ausdruck gleicher Dimension sein. Da die freie Energie nur die reversiblen Anteile der inneren Energie enthält, stellt der zweite Term in (2.9) den reversiblen Anteil der Zuwachsrate der spezifischen inelastischen Arbeit dar.

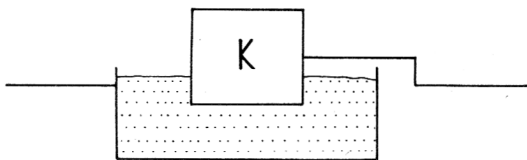
$$\dot{W}_i - \dot{W}^r = \dot{W}^d \geq 0 \quad (2.10)$$

$\dot{W}^d$  ist dann die Dissipationsleistung.

## 3. Thermodynamische Untersuchung einfacher eindimensionaler Grundmodelle

Plastisches Materialverhalten kann durch Kombination von isotropen und kinematischen Materialmodellen nachgebildet werden.

### 3.1. Isotrope Verfestigung



**Bild 1**  
Das Sandkastenmodell

Die isotrope Verfestigung lässt sich durch das Modell einer Reibfläche in Form der Oberfläche eines Sandhaufens interpretieren. Der (schwere) Körper K setzt sich in Bewegung, wenn die momentane Fließspannung  $\sigma_F$ , die stets positiv ist und mit jeder Bewegung monoton wächst, überwunden wird. Die verrichtete Arbeit ist vollständig irreversibel.

Die Bedingung für die Bewegung ist

$$F = |\sigma| - \sigma_F(h) = 0. \quad (3.1)$$

Sie hört auf, wenn  $|\sigma|$  kleiner wird.

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = \dot{\sigma} \langle \sigma \rangle < 0 \quad (3.2)$$

wobei  $\langle \sigma \rangle = \text{sign } \sigma$  bedeutet. Die Bewegung wird durch

$$\dot{\epsilon}_p = \begin{cases} 0 & F < 0 \text{ oder } \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} < 0 \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} & \text{für } F = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

beschrieben, wobei  $\lambda$  ein positiver skalarer Faktor ist. Die Evolutionsgleichung für den inneren Parameter  $h$  lautet

$$\dot{h} = \dot{\epsilon}_v = |\dot{\epsilon}_p|. \quad (3.4)$$

Die Funktion  $\sigma_F(h)$  ist die das Material beschreibende Verfestigungsfunktion mit

$$H = \frac{\partial \sigma}{\partial h} \geq 0. \quad (3.5)$$

Die spezifischen Leistungen sind infolge der genannten Modellvorstellungen

$$\rho \dot{W}^r = 0 \quad (3.6)$$

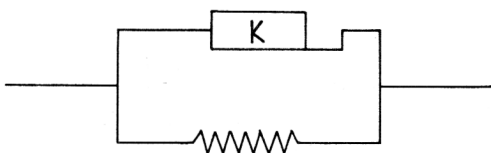
$$\rho \dot{W}^p = \rho \dot{W}^d = \sigma \dot{\epsilon}_p. \quad (3.7)$$

Im Falle des Fließens ist  $\dot{\epsilon}_p \neq 0$  und

$$\rho \dot{W}^d = \lambda \sigma \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \lambda \sigma \langle \sigma \rangle = \lambda \sigma_F > 0. \quad (3.8)$$

Die C-D-Ungleichung ist somit stets erfüllt.

### 3.2. Linear-kinematische Verfestigung



**Bild 2**  
Das Feder-Gleitschuh-Modell

Dieser Verfestigungstyp lässt sich durch eine Parallelschaltung einer Feder mit einem Gleitschuh modellieren. Die Dehnungen beider Elemente sind gleich, die Spannungen addieren sich.

$$\sigma = \sigma_E + \sigma_G = E \epsilon_p + \sigma_G = a + \sigma_G \quad (3.9)$$

Der Gleitschuh folgt als Sonderfall aus dem Sandmodell mit  $\sigma_F = \text{konstant}$  und  $H = 0$ .

$$F = |\sigma - a| - \sigma_F \quad (3.10)$$

Nach (3.3) gilt also

$$\dot{\epsilon}_p = \begin{cases} 0 & F < 0 \text{ oder } \dot{\sigma} \langle \sigma - a \rangle < 0 \\ \lambda \langle \sigma - a \rangle & \text{für } F = 0 \text{ und } \dot{\sigma} \langle \sigma - a \rangle \geq 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Die Evolutionsgleichung für  $a$  ergibt sich aus der Definition nach (3.9)

$$\dot{a} = E \dot{\epsilon}_p. \quad (3.12)$$

Mit (3.10 – 12) lautet der Faktor  $\lambda$

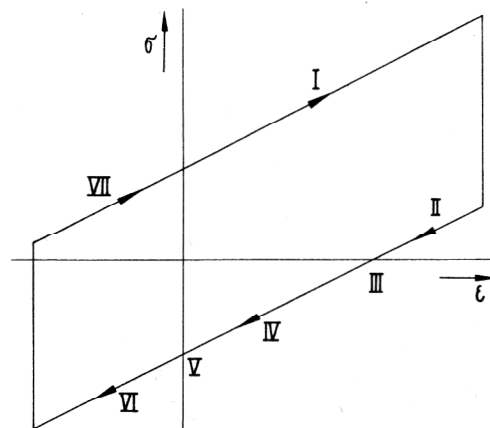
$$\lambda = \frac{\dot{\sigma}}{E} \langle \sigma - a \rangle. \quad (3.13)$$

Die Arbeit am Gleitschuh ist völlig irreversibel, die an der Feder komplett reversibel. Für  $F = 0$  und  $\dot{\sigma} \langle \sigma - a \rangle \geq 0$  ergeben sich daher die Leistungen

$$\rho \dot{W}^d = \sigma_G \dot{\epsilon}_p = (\sigma - a) \frac{\dot{\sigma}}{E} = |\sigma - a| \lambda > 0 \quad (3.14)$$

$$\rho \dot{W}^r = \sigma_E \dot{\epsilon}_p = a \frac{\dot{\sigma}}{E}. \quad (3.15)$$

Während  $\dot{W}^r$  beliebige Werte annehmen kann, ist die Einschränkung durch die C-D-Ungleichung stets erfüllt, wie die letzte Identität der Gleichung (3.14) beweist.



**Bild 3**  
Ein Belastungsumlauf mit dem einfachen kinematischen Deformationsgesetz

Das Verhalten der Arbeitsinkremente in den einzelnen Abschnitten des durch das Deformationsgesetz (3.11, 13) erzeugten Spannungs-Dehnungsverlaufes (Bild 3, Tab. 1) wird für die qualitative Auswertung der Experimente von Farren und Taylor [1] benötigt.

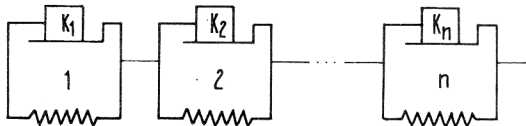
Be	$\langle \sigma \rangle$	$\langle \dot{\sigma} \rangle$	$\langle a \rangle$	$\langle \dot{w}^r \rangle$	$\langle \dot{w}^p \rangle$	Bemerkungen	$\xi = \dot{w}^d / \dot{w}^p$
I	+	+	+	+	+	$\dot{w}^p > \dot{w}^r > 0$	$1 > \xi > 0$
II	+	-	+	-	-	$-\dot{w}^r > \dot{w}^d > 0$	$0 > \xi > -\infty$
III	$\sigma=0$	-	+	-	$\dot{w}^p=0$	$-\dot{w}^r = \dot{w}^d > 0$	-
IV	-	-	+	-	+	$\dot{w}^d > -\dot{w}^r > 0$	$\infty > \xi > 1$
V	-	-	$a=0$	$\dot{w}^r=0$	+	$\dot{w}^p = \dot{w}^d > 0$	$\xi = 1$
VI	-	-	-	+	+	$\dot{w}^p > \dot{w}^r > 0$	$1 > \xi > 0$
VII	+	+	-	-	+	$\dot{w}^d > \dot{w}^r > 0$	$\infty > \xi > 1$

**Tabelle 1**  
Qualitative Auswertung des einfachen kinematischen Deformationsgesetzes

#### 4. Eindimensionales idealkinematisches Stoffgesetz

##### 4.1. Theoretische Grundlagen

Idealkinematisches Materialverhalten kann durch Parallel- oder Reihenschaltung [5] von entsprechend vielen Feder-Gleitschuhmodellen nachgebildet werden, wobei hier nur der zweite Fall untersucht wird. Ohne Einschränkung sind damit nur konvexe Fließkurven reproduzierbar.



**Bild 4**  
Das idealkinematische Materialmodell

Die Energieraten ergeben sich nun durch Überlagerung der in Abschnitt 3.2. erhaltenen Ausdrücke.

$$\rho \dot{w}^r = \left[ \sum_{i=1}^n \Theta_i \frac{a_i}{E_i} \right] \dot{\sigma} \quad (4.1)$$

$$\rho \dot{w}^d = \left[ \sum_{i=1}^n \Theta_i \frac{1}{E_i} (\sigma - a_i) \right] \dot{\sigma} \quad (4.2)$$

$$\rho \dot{w}^p = \left[ \sum_{i=1}^n \Theta_i \frac{1}{E_i} \right] \sigma \dot{\sigma} \quad (4.3)$$

mit

$$F_i = |\sigma - a_i| - \sigma_{Fi} \quad (4.4)$$

$$\dot{a}_i = \Theta_i \dot{\sigma}_i \quad (4.5)$$

$$\Theta_i = \begin{cases} 0 & \text{für } F_i < 0 \text{ oder } \dot{\sigma} \langle \sigma - a_i \rangle < 0 \\ 1 & \text{für } F_i = 0 \text{ und } \dot{\sigma} \langle \sigma - a_i \rangle \geq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Diese Formeln lassen sich ohne weiteres auf eine stetige Verteilung unendlich vieler differentiell benachbarter Modelle erweitern. Es sei

$$\Gamma(\sigma) = \frac{d^2 \epsilon_E}{d\sigma^2} > 0 \quad (4.7)$$

die zweite Ableitung der einachsigen Erstbelastungskurve. Die stetigen Grenzfälle von (4.1) bis (4.6) ergeben sich zu

$$\rho \dot{w}^r = \int_{\sigma_{FO}}^{\sigma_{Fmax}} \Theta(K) \Gamma(K) a(K) dK \dot{\sigma} \quad (4.8)$$

$$\rho \dot{w}^d = \int_{\sigma_{FO}}^{\sigma_{Fmax}} \Theta(K) \Gamma(K) (\sigma - a(K)) dK \dot{\sigma} \quad (4.9)$$

$$\rho \dot{w}^p = \int_{\sigma_{FO}}^{\sigma_{Fmax}} \Theta(K) \Gamma(K) dK \sigma \dot{\sigma} \quad (4.10)$$

mit

$$F(K) = |\sigma - a(K)| - K \quad (4.11)$$

$$\dot{a}(K) = \Theta(K) \dot{\sigma} \quad (4.12)$$

$$\Theta(K) = \begin{cases} 0 & \text{für } F(K) < 0 \text{ oder } \dot{\sigma} \langle \sigma - a(K) \rangle < 0 \\ 1 & \text{für } F(K) = 0 \text{ und } \dot{\sigma} \langle \sigma - a(K) \rangle \geq 0 \end{cases}$$

##### 4.2. Auswertung der Experimente von Farren und Taylor [1]

In [1] wurde die Temperaturerhöhung in verschiedenen weichen Metallen bei plastischer Deformation gemessen und mit der dabei verrichteten plastischen Arbeit verglichen. Beim einachsigen Zugversuch entsteht auf Grund homogener Verhältnisse über dem Querschnitt (also auch an der Oberfläche) ein konstantes Temperaturfeld. Die Belastungs- und Meßzeit muß jedoch sehr klein sein, um adiabatischen Verhältnissen zu entsprechen (ideal  $t_{B+M} = 0$ , real wurden etwa 10 s benötigt). Zur Berücksichtigung der Dehnungsabhängigkeit ist in 3 bzw. 5 Lastschritten jeweils ein solcher Dehnungszuwachs aufgebracht worden, daß eine Temperaturerhöhung  $\Delta T_M$  von ungefähr 3 grad. gemessen werden konnte. Unter Beachtung des Energieerhaltungssatzes kann dann mit der Annahme vollständiger Dissipation der plastischen Arbeit eine Äquivalenttemperaturerhöhung  $\Delta T_A$  errechnet werden.

$$\Delta T_A = \frac{\Delta W^p}{c} \quad (4.13)$$

wobei c die spezifische Wärmekapazität ist. Für die Auswertung der Temperatur- und Energieverhältnisse eignet sich der Verhältniswert  $\xi$  (vgl. Tabelle 1).

$$\xi = \frac{\Delta T_M}{\Delta T_A} = \frac{\Delta \dot{w}^d}{\Delta \dot{w}^p} \quad (4.14)$$

Für den Vergleich mit dem Experiment wurden die inneren Parameter des N-Feder-Gleitschuhmodells so bestimmt, daß die im Experiment ermittelten Spannungs-Dehnungskurven gut wiedergegeben werden konnten.

Material	Lastschritt	$\epsilon$ [%]	$\Delta T_{\lambda}$ [K]	Experiment		Numerisch	
				$\Delta T_M$	$\bar{\xi}_M$	$\Delta T_N$	$\bar{\xi}_N$
Kupfer $c=0,092$ Kcal/kg K $\rho=8,93$ kg/dm <sup>3</sup>	1	8,76	2,72	2,41	0,885	1,77	0,651
	2	15,35	3,23	2,94	0,91	2,04	0,631
	3	20,20	2,76	2,53	0,915	2,09	0,756
	total	20,20	8,71	7,88	0,905	5,89	0,676
Stahl $c=0,106$ $\rho=7,8$	1	3,99	2,79	2,39	0,86	2,56	0,916
	2	8,13	3,72	3,18	0,855	3,25	0,873
	3	11,83	3,72	3,27	0,88	3,30	0,889
	total	11,83	10,23	8,84	0,865	9,11	0,891
Aluminium $c=0,212$ $\rho=2,7$	1	9,16	2,03	1,88	0,925	1,47	0,724
	2	15,91	2,09	1,97	0,945	1,78	0,852
	3	21,88	1,95	1,83	0,94	1,75	0,897
	total	21,88	6,07	5,68	0,935	5,00	0,824
Aluminium Einkristall $c=0,212$ $\rho=2,7$	1	16,19	2,37	2,28	0,96	2,03	0,857
	2	25,75	1,77	1,67	0,945	1,53	0,864
	3	37,7	2,38	2,25	0,945	1,96	0,824
	4	46,52	1,82	1,73	0,95	1,7	0,934
	5	55,72	1,93	1,82	0,945	1,91	0,988
	total	55,72	10,27	9,75	0,945	9,13	0,889

Tabelle 2  
Gegenüberstellung der experimentellen [1]  
und numerischen Ergebnisse

Die numerisch ermittelten Temperaturerhöhungen  $\Delta T_N$  liegen bei Kupfer, Aluminium bzw. Aluminium-Einkristall um rund 25 %, 12 % bzw. 6 % niedriger und bei Stahl etwa 3 % höher als bei den experimentellen Werten. Diese Abweichungen können verschiedene Ursachen haben.

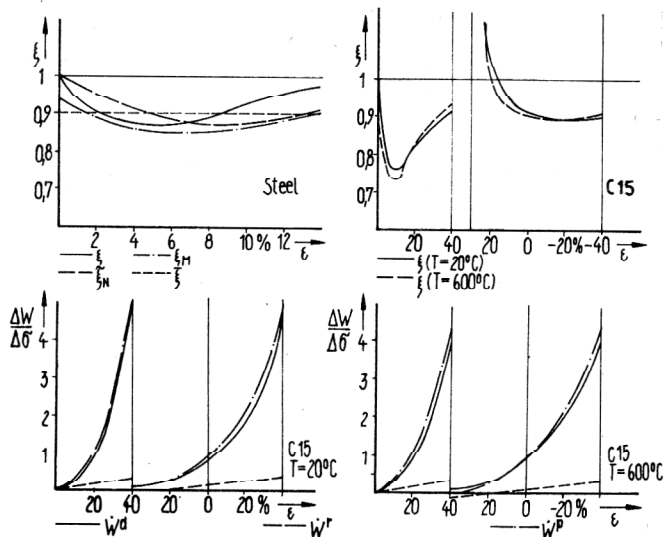
1. Das idealkinematische Modell liefert eine untere Schranke bezüglich der Dissipation und diese muß bei realen Werkstoffen höher liegen, wenn isotrope Verfestigung und viskose Einflüsse berücksichtigt werden. Aluminium und Kupfer werden demnach durch das idealkinematische Deformationsgesetz nicht gut beschrieben.
2. Die gemessene Temperatur ist fehlerhaft, da nur eine endliche Belastungs- und Meßzeit realisiert werden kann.
3. Die Materialkennwerte sind Durchschnittswerte und entsprechen demzufolge nicht exakt den real verwendeten Werkstoffen. Sie hängen außerdem von den Zustandsgrößen ab.
4. Die für die numerische Auswertung abgelesenen Meßpunkte der Spannungs-Dehnungs-Kurven sind fehlerhaft. Die Fließkurven sind nicht ideal konvex. Es kann nur eine diskrete Zahl von Fließgrenzen berücksichtigt werden.

Das Verhalten von Stahl kann von dem idealkinematischen Modell relativ gut wiedergespiegelt werden. Deshalb bleibt die weitere Auswertung darauf beschränkt. Da für die Lösung eines nichtlinearen Feldproblems eine inkrementelle Schreibweise verwendet werden muß, ist es sinnvoll,  $\xi$  wie in Tab. 1 zu definieren (4.14).

$$\xi = \frac{\dot{W}_d}{\dot{W}_P} \quad (4.15)$$

In Bild 5 ist  $\bar{\xi}_M$ ,  $\bar{\xi}_N$ ,  $\xi$  für kleine Lastinkremente und  $\xi = 0,9$ , verwendet von Argyris [3] und Lee [2], aufgetragen. Zur Charakterisierung des Temperatureinflusses und der Lastumkehr wurde ein Stahl C15 bei 20 °C und 600 °C [6] untersucht. Im Bereich der Belastung ist  $\xi = 0,9$  sicherlich eine gute Näherung, da außerdem das ideal-kinematische Modell eine untere Schranke für die Bestimmung der Dissipation ist. Allerdings wird der Anfangsbereich ( $\xi = 1$ ) nicht gut wiedergegeben. Dieser Fakt spielt sicherlich keine wesentliche Rolle, da eine zu berücksichtigende Temperaturerhöhung erst bei höheren Verformungen auftritt ( $\Delta T$  nach dem gesamten Lastverlauf war beim C15 192 K bzw. 14 K). Beim C15 erfolgte die Belastung soweit, daß die Fließgrenze außerhalb des Spannungsnulldpunktes lag. Der Wert  $\xi$  verhält sich ähnlich, wie es für das einfache Modell in Tabelle 1 angegeben wurde.  $\dot{W}_d = \dot{W}_P$  und  $\dot{W}_r = 0$  tritt hier jedoch nicht bei  $\epsilon = 0$ , sondern in beiden Fällen schon bei  $\epsilon = 20$  % auf und bedeutet, daß nicht alle Federn auf Null zurückgestellt werden können. Die Aussage des zweiten Hauptsatzes  $\dot{W}_d \geq 0$  wird immer erfüllt, auch wenn der Fall  $\dot{w}_P < 0$  eintreten sollte. Die in den Federn gespeicherte Energie kann durch Lastzyklen nie vollständig wiedergewonnen werden. Der Verlauf der Arbeitsinkremente ist bei beiden Temperaturen ähnlich. Die Abweichung der beiden Kurven der Verhältnisse  $\xi$  für C15 ist sehr gering und beträgt höchstens 4 %. Demnach verbleibt das Verhältnis von Dissipation und plastischer Arbeit von der Höhe der Temperatur relativ unbeeinflusst.

Die Verwendung von  $\xi$  zur Bestimmung des dissipativen Anteils der Arbeit ist sicherlich nicht notwendig, da dieser selbst aus dem Deformationsgesetz abgeleitet werden kann. Es sind Experimente notwendig, um eine energie-



**Bild 5**  
Auswertung der Materialeigenschaften von Stahl und C15 bei 20°C und 600°C

gerechte Konzeption eines Deformationsgesetzes als Kombination von kinematischen, isotropen und eventuell viskosen Modellen erstellen zu können.

### 5. Mehrdimensionales idealkinematisches Deformationsgesetz

Die Übertragung des Gedankens der Parallelschaltung entsprechend dem Feder-Gleitschuh-Modell auf den mehrachsigen Spannungszustand mit

$$\underline{\epsilon}_p = \underline{\epsilon}_E = \underline{\epsilon}_G \quad (5.1)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_E + \underline{\sigma}_G \quad (5.2)$$

wobei für das Gleitschuhmodell die ideal-plastische Fließtheorie

$$\underline{\dot{\epsilon}}_G = \begin{cases} 0 & \text{für } F < 0 \text{ oder } \underline{\varphi}^T \underline{\dot{\sigma}}_G < 0 \\ \lambda \underline{\varphi}(\underline{\sigma}_G) & \text{für } F = 0 \text{ und } \underline{\varphi}^T \underline{\dot{\sigma}}_G = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

mit der Fließgrenzfläche

$$F(\underline{\sigma}_G) = 0 \quad (5.4)$$

und

$$\underline{\varphi}(\underline{\sigma}) = \frac{\partial F(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \quad (5.5)$$

als Erweiterung der idealen Reibung und für das Federmodell die lineare Elastizitätstheorie Anwendung finden

$$\underline{\sigma}_E = \underline{C} \underline{\epsilon}_E, \quad (5.6)$$

ergibt bekanntermaßen das Pragersche Modell der kinematischen Verfestigung. Die Beschränkung auf isotropes und inkompressibles Verhalten liefert für den Deviator  $\underline{a}$  von  $\underline{\sigma}_E$

$$\underline{a} = c \underline{T}_E \underline{\epsilon}_E. \quad (5.7)$$

Hierin ist  $\underline{C}$  eine Materialkonstante und  $\underline{T}_E$  eine konstante Matrix mit dimensionslosen Elementen. Das Ergebnis lautet

$$\underline{\dot{\epsilon}}_p = \begin{cases} 0 & \text{für } F(\underline{\sigma} - \underline{a}) < 0 \text{ oder } \underline{\varphi}^T(\underline{\sigma} - \underline{a}) \underline{\dot{\sigma}} < 0 \\ \lambda \underline{\varphi}(\underline{\sigma} - \underline{a}) & \text{für } F(\underline{\sigma} - \underline{a}) = 0 \text{ und } \underline{\varphi}^T(\underline{\sigma} - \underline{a}) \underline{\dot{\sigma}} \geq 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

mit der Evolutionsgleichung

$$\underline{\dot{a}} = c \underline{T}_E \underline{\dot{\epsilon}}_p. \quad (5.9)$$

Aus der differenzierten Fließbedingung (5.4), dem assoziierten Fließgesetz (5.8) und der Evolutionsgleichung (5.9) folgt

$$\lambda = \frac{\underline{\varphi}^T}{c \underline{\varphi}^T \underline{T}_E \underline{\varphi}} \underline{\dot{\sigma}} \quad (5.10)$$

Die entsprechenden Leistungsanteile sind, solange Fließen stattfindet:

$$\rho \dot{W}^d = (\underline{\sigma} - \underline{a})^T \underline{\dot{\epsilon}}_p = \frac{(\underline{\sigma} - \underline{a})^T \underline{\varphi} \underline{\varphi}^T \underline{\dot{\sigma}}}{c \underline{\varphi}^T \underline{T}_E \underline{\varphi}} > 0 \quad (5.11)$$

$$\rho \dot{W}^r = \underline{a}^T \underline{\dot{\epsilon}}_p = \frac{\underline{a}^T \underline{\varphi} \underline{\varphi}^T \underline{\dot{\sigma}}}{c \underline{\varphi}^T \underline{T}_E \underline{\varphi}}. \quad (5.12)$$

Die Überlagerung von  $n$  Komponenten im Sinne von (4.1) bis (4.6) gibt

$$\rho \dot{W}^d = \left[ \sum_{i=1}^n \Theta_i \frac{(\underline{\sigma} - \underline{a}_i)^T \underline{\varphi}_i \underline{\varphi}_i^T}{c_i \underline{\varphi}_i^T \underline{T}_E \underline{\varphi}_i} \right] \underline{\dot{\sigma}} \quad (5.13)$$

$$\rho \dot{W}^r = \left[ \sum_{i=1}^n \Theta_i \frac{\underline{a}_i^T \underline{\varphi}_i \underline{\varphi}_i^T}{c_i \underline{\varphi}_i^T \underline{T}_E \underline{\varphi}_i} \right] \underline{\dot{\sigma}} \quad (5.14)$$

mit

$$\Theta = \begin{cases} 0 & \text{für } F_i < 0 \text{ oder } \underline{\varphi}_i^T \underline{\dot{\sigma}} < 0 \\ 1 & \text{für } F_i = 0 \text{ und } \underline{\varphi}_i^T \underline{\dot{\sigma}} \geq 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

und

$$\underline{a}_i = \Theta_i \frac{\underline{T}_E \underline{\varphi}_i \underline{\varphi}_i^T}{\underline{\varphi}_i^T \underline{T}_E \underline{\varphi}_i} \underline{\dot{\sigma}}. \quad (5.16)$$

Das den Gleichungen (4.8) bis (4.13) zugeordnete Modell mit stetiger Verteilung lautet (vgl. auch [5])

$$\rho \dot{W}^r = \int_{\sigma_{F0}}^{\sigma_{Fmax}} \Theta(K) \gamma_0 \Gamma(K) \frac{\underline{a}^T(K) \underline{\varphi}(K) \underline{\varphi}^T(K)}{\underline{\varphi}^T(K) \underline{T}_E \underline{\varphi}(K)} dK \underline{\dot{\sigma}} \quad (5.17)$$

$$\rho \dot{W}^d = \int_{\sigma_{F0}}^{\sigma_{Fmax}} \Theta(K) \gamma_0 \Gamma(K) \frac{(\underline{\sigma} - \underline{a}(K))^T \underline{\varphi}(K) \underline{\varphi}^T(K)}{\underline{\varphi}^T(K) \underline{T}_E \underline{\varphi}(K)} dK \underline{\dot{\sigma}} \quad (5.18)$$

mit

$$\Theta(K) = \begin{cases} 0 & \text{für } F(K) < 0 \text{ oder } \underline{\varphi}^T(K) \underline{\dot{\sigma}} < 0 \\ 1 & \text{für } F(K) = 0 \text{ und } \underline{\varphi}^T(K) \underline{\dot{\sigma}} \geq 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

und

$$\underline{\dot{a}}(K) = \Theta(K) \frac{\underline{T}_E \underline{\varphi}(K) \underline{\varphi}^T(K)}{\underline{\varphi}^T(K) \underline{T}_E \underline{\varphi}(K)} \underline{\dot{\sigma}}. \quad (5.20)$$

Dabei bestimmt sich die Normierungszahl  $\gamma_0$  aus

$$\gamma_0 \cdot J_{11} = 1 \quad (5.21)$$

mit dem Element  $J_{11}$  der Matrix

$$\underline{J} = \frac{\varphi \varphi^T}{\varphi^T \underline{T}_E \varphi} \quad (5.22)$$

im Falle des einachsigen Zuges.

Die einfachste, praktisch aber bedeutsame Fließbedingung (5.4) hat eine quadratische Form

$$F = (\underline{\sigma} - \underline{a})^T \cdot \underline{T}_v \cdot (\underline{\sigma} - \underline{a}) - \sigma_F^2 = 0. \quad (5.23)$$

Hierin ist die Matrix  $\underline{T}_v$  konstant und dimensionslos,  $\sigma_F$  ist eine Materialkonstante. Bei diskreter Fließgrenzenverteilung nach (5.15) gilt

$$F_i = (\underline{\sigma} - \underline{a}_i)^T \cdot \underline{T}_v \cdot (\underline{\sigma} - \underline{a}_i) - \sigma_{Fi}^2 = 0 \quad (5.24)$$

und im Falle der stetigen Verteilung ergibt sich schließlich

$$F(K) = (\underline{\sigma} - \underline{a}(K))^T \cdot \underline{T}_v \cdot (\underline{\sigma} - \underline{a}(K)) - K^2 = 0 \quad (5.25)$$

Die Matrix  $\underline{T}_v$  wird durch Vergleich mit einer entsprechenden Tensorformulierung gewonnen. Für den isotropen Ausgangszustand (Huber-Mises-Hencky) gilt z. B. im ebenen Spannungszustand

$$\underline{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T \quad (5.26)$$

$$\underline{\epsilon}_p = [\epsilon_{11}^p, \epsilon_{22}^p, \epsilon_{12}^p]^T \quad (5.27)$$

$$\underline{T}_v = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$\underline{T}_E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

## 6. Deformationsgesetze mit isotrop-kinematischer Verfestigung

Die Simulation realer Verfestigungskurven durch das ideal-kinematische Modell erfordert eine ganze Anzahl von Fließbedingungen gemäß (5.15), die alle unterschiedliche Fließgrenzen haben und jeweils durch einen Zustandsvektor  $\underline{a}$  charakterisiert werden. (Im Falle der stetigen Verteilung führt die numerische Realisierung ebenfalls auf eine endliche diskrete Verteilung zurück [7]). Die große Anzahl von Zustandsvektoren macht dieses Modell sehr aufwendig.

Daher liegt es nahe, andere Modelle zu suchen, die mit weniger Zustandsparameter auskommen. Solche Modelle beruhen in der Regel auf einer einzigen Fließbedingung gemäß (5.23) und verwenden lediglich etwas kompliziertere Evolutionsgleichungen als (5.9).

So schlägt z. B. Koczyk [8]

$$\underline{\dot{a}} = c(W) \cdot \underline{T}_E \cdot \underline{\dot{\epsilon}}_p \quad (6.1)$$

mit

$$W = \frac{1}{\sigma_F^2} \underline{a}^T \underline{T}_E \cdot (\underline{\sigma} - \underline{a}) \quad (6.2)$$

vor, während Backhaus [9] mit

$$\underline{a}(\epsilon_v) = \int_0^{\epsilon_v} b(\bar{\epsilon}_v, \epsilon_v - \bar{\epsilon}_v) \underline{T}_E \frac{d\epsilon_p(\bar{\epsilon}_v)}{d\bar{\epsilon}_v} d\bar{\epsilon}_v \quad (6.3)$$

arbeitet, wobei

$$b(\bar{\epsilon}_v) = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{\epsilon}_v} [(\sigma_E(\bar{\epsilon}_v) - \sigma_F(\bar{\epsilon}_v)) \cdot \varphi(\bar{\epsilon}_v - \epsilon_v)]. \quad (6.4)$$

Hierin ist  $\sigma_E(\bar{\epsilon}_v)$  die Erstbelastungskurve.

Beide Autoren lassen zugleich eine isotrope Verfestigung

$$\sigma_F = \sigma_F(\epsilon_v) \quad (6.5)$$

mit

$$\underline{\dot{\epsilon}}_v = \sqrt{\frac{2}{3}} \underline{\dot{\epsilon}}_p^T \underline{T}_E \underline{\dot{\epsilon}}_p \quad (6.6)$$

zu. Die Funktion  $\varphi(\Delta \epsilon_v)$ , die für die Form der Kurve nach der Lastumkehr verantwortlich ist, wird zweckmäßig als Exponentialreihe angesetzt

$$\varphi(\Delta \epsilon_v) = \sum_{n=0}^N \varphi_n \exp(-\kappa_n \Delta \epsilon_v). \quad (6.7)$$

Mit diesem Ansatz läßt sich das Nachwirkungsintegral (6.3) durch einen Satz von Evolutionsgleichungen ersetzen [10].

Für die Dissipationsrate und den Zuwachs des reversiblen Anteils der Arbeit werden nun generell die Annahmen übertragen, die am idealen Modell getroffen wurden. So ergibt sich

$$\rho \dot{W}^d = (\underline{\sigma} - \underline{a})^T \underline{\dot{\epsilon}}_p \quad (6.8)$$

$$\rho \dot{W}^r = \underline{a}^T \underline{\dot{\epsilon}}_p. \quad (6.9)$$

Einsetzen von (5.8), (5.5), (5.23) führt auf

$$\rho \dot{W}^d = 2 \dot{\lambda} \sigma_F^2 \quad (6.10)$$

$$\rho \dot{W}^r = 2 \dot{\lambda} \underline{a}^T \underline{T}_v (\underline{\sigma} - \underline{a}). \quad (6.11)$$

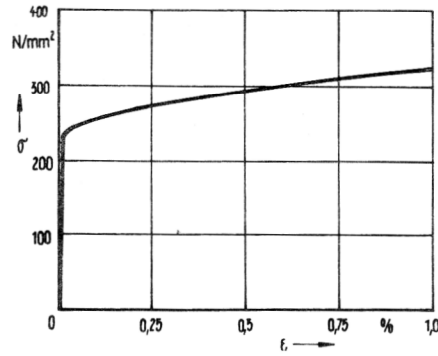
Der Skalar  $\dot{\lambda}$  kann wieder aus der differenzierten Fließbedingung (5.23) und der jeweiligen Evolutionsbedingung berechnet und wahlweise durch  $\underline{\dot{\sigma}}$  oder  $\underline{\dot{\epsilon}}$  ausgedrückt werden [10]. Da diese Größe nicht negativ sein kann, zeigt (6.10) die Erfüllung der C-D-Ungleichung. Schließlich ergibt sich der Faktor  $\xi$  der relativen Dissipationsrate entsprechend (4.15) mit (6.10), (6.11)

$$\xi = \frac{\sigma_F^2}{\underline{\sigma}^T \underline{T}_v (\underline{\sigma} - \underline{a})} \quad (6.12)$$

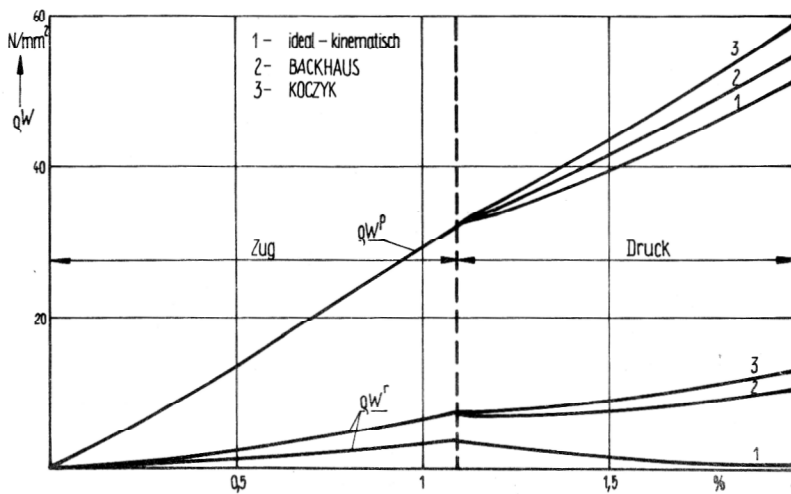
## 7. Numerische Ergebnisse

Das idealkinematische Modell wurde mit den Modellen von Koczyk und Backhaus verglichen, wobei dem Vergleich folgende Annahmen zugrunde lagen:

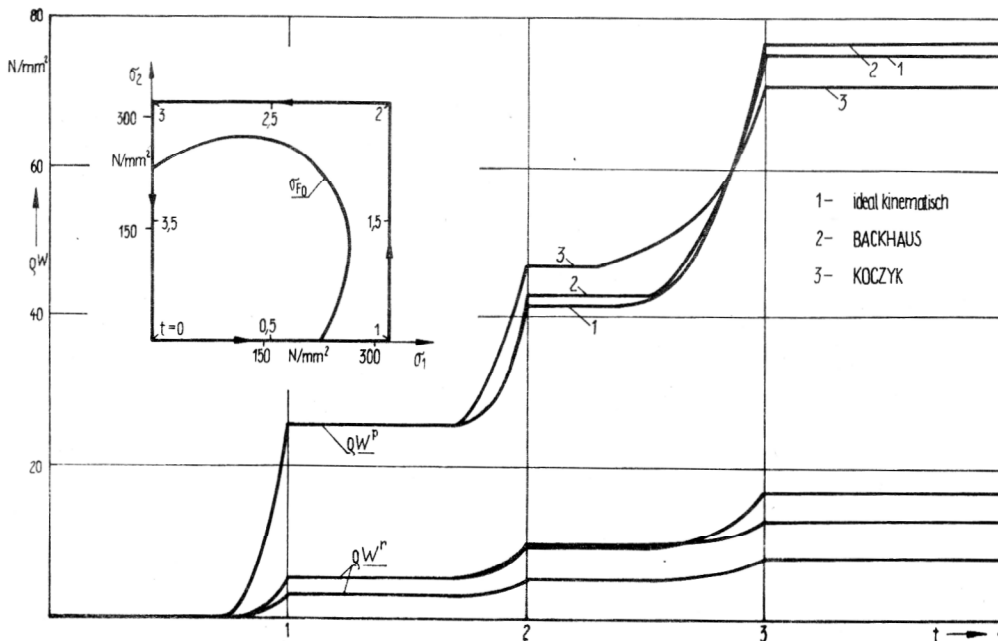
1. Für alle Modelle wurde die Huber-Mises-Hencky-Fließbedingung im Ausgangszustand angenommen.
2. Die einachsige Erstbelastungskurve war für alle Modelle identisch.
3. Die isotrope Verfestigung wurde vernachlässigt.
4. Die Funktion  $\varphi$  nach (6.7) wurde so bestimmt, daß im Mittel gleiche einachsige Lastumkehrkurven wie im idealkinematischen Fall entstanden.



**Bild 6**  
Spannungs-Dehnungs-Verlauf von St nach [1]



**Bild 7**  
Verlauf der plastischen Arbeit  $\rho_{WP}$  und des reversiblen Anteils  $\rho_{WF}$  beim Zug-Druck-Wechsel



**Bild 8**  
Verlauf der plastischen Arbeit  $\rho_{WP}$  und des reversiblen Anteils  $\rho_{WF}$  beim nichtproportionalen Belastungsweg im Spannungsraum

Die numerischen Berechnungen erfolgten mittels einer differentiellen Standardformulierung [10], die mit Hilfe eines vorhandenen Rahmenprogrammes [11] numerisch nach Runge-Kutta integriert wurden. Dabei wurden die Energieraten (5.13), (5.14), (6.8) und (6.9) als zusätzliche Elemente in den Vektor der internen Variablen aufgenommen.

Die Vergleiche wurden für den Stahl nach [1] durchgeführt. Bild 6 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Kurve, die allen Modellen zugrunde liegt. Bild 7 zeigt den Vergleich von  $\rho_{WP}$  und  $\rho_{W^d}$  als Funktion der plastischen Vergleichsdehnung  $\epsilon_v$  bei einem Zug-Druck-Versuch. Die plastische Arbeit beim Zug ist bei allen Modellen definitionsgemäß gleich, die Unterschiede nach dem Lastwechsel resultieren aus unterschiedlichen  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurven gemäß Verfestigungsmodell. Deutlich ausgeprägt ist jedoch der wesentlich überhöhte reversible Anteil der Modelle mit nur einer Fließbedingung gegenüber dem idealkinematischen Modell.

Bild 8 zeigt nun die entsprechende Arbeitsentwicklung bei einer nichtproportionalen Belastung. Der höhere Anteil reversibler Arbeit (und damit die zu geringe Dissipation) ist auch hier zu erkennen.

Eine entsprechende Zusammensetzung der gleichen Erstbelastungskurve aus isotroper und kinematischer Verfestigung ließe eine Korrektur des Anteils der Dissipation auf den der idealkinematischen Verfestigung zu und würde damit dem Experiment (Tabelle 2) besser gerecht.

## LITERATUR

- [ 1 ] Farren, W. S., Taylor, G. I.: „The heat developed during plastic extension of metals”. Proceedings of the Royal Society London, Series A. Vol. 107, 1925 pp. 422 – 451.
- [ 2 ] Lee, E. H., Wierzbicki, T.: „Analysis of the propagation of plane elastic-plastic waves of finite strain”. J. Appl. Mech. 34 (1967) 932 – 935.
- [ 3 ] Argyris, S. H., Doltsinis, J. St.: „On the natural formulation and analysis of large deformation coupled thermo-mechanical problems”. Compt. Meth. Appl. Mech. Eng. 25 (1981) 195 – 253.
- [ 4 ] Eringen, A. C.: „Mechanics of continua”. John Wiley & Sons, INC New York, London, Sydney 1967.
- [ 5 ] Iwan, W. D.: „On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems”. J. Appl. Mech. 34 (1967) 612 – 617.
- [ 6 ] Fritzsche, G., Siegel, R.: Kalt- und Warmfließkurven von Baustählen. Zentralinstitut für Fertigungstechnik und Maschinenbau, Karl-Marx-Stadt 1965.
- [ 7 ] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. ZAMM 58 (1978), S. 489 – 499.
- [ 8 ] Autorenkollektiv: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. Leipzig: Fachbuchverlag 1982. S. 35 – 45.
- [ 9 ] Backhaus, G.: Fließspannungen und Fließbedingungen bei zyklischen Verformungen. ZAMM 56 (1976), S. 337 – 348.
- [ 10 ] Bergander, H.: Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung. ZAMM 60 (1980), S. 509 – 519.
- [ 11 ] Bergander, H.: Anwendungsbeschreibung und Programmierschrift für das Programm NIMEHS, TU Dresden 1981.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Helge Bergander  
 Dipl.-Ing. Michael Luther  
 Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt  
 Sektion Maschinen-Bauelemente  
 9010 Karl-Marx-Stadt, PSF 964