

# Anwendung der Konjugierte-Gradienten-Methode bei der Lösung elastoplastischer Aufgaben mit Hilfe der Methode der finiten Elemente

Dobril Christow, Marco Todorow

## 1. Einleitung

Untersuchungen von plastischen Spannungs- und Verformungszuständen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente benutzen hauptsächlich die Methode der Anfangs-(Zusatz-)lasten [1], [8]. Die Methode der veränderlichen Steifigkeit [1], [8] wird selten verwendet, weil die Rechenzeiten zur Lösung der Gleichungssysteme durch direkte Methoden unverträglich lang sind. Es ist aber bekannt [2], [9], daß sie physikalisch genauer die plastische Verformung beschreibt und schneller, was die Anzahl der Iterationsschritte betrifft, als die anderen Verfahren konvergiert.

In der vorliegenden Arbeit wird die Methode der veränderlichen Steifigkeit mit der Konjugierte-Gradienten-Methode (KGM) [3], [4], [6], [10] verbunden, die in diesem Falle bestimmte Vorteile vor den direkten Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen besitzt.

## 2. Die Konjugierte-Gradienten-Methode

Der Grundgedanke der Methode der finiten Elemente, angewendet auf das Funktional der gesamten potentiellen Energie, führt bei der linearen Elastizität zur Gleichung

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{b}. \quad (1)$$

Hier sind:

- $\Pi(\mathbf{u})$  – die gesamte potentielle Energie des elastischen Systems,
- $\mathbf{u}$  – die unbekanntes verallgemeinerten Knotenverschiebungen,
- $\mathbf{b}$  – die vorgegebenen verallgemeinerten Knotenkräfte,
- $\mathbf{K}$  – die Gesamtsteifigkeitsmatrix.

Die Matrix  $\mathbf{K}$  ist symmetrisch und bei korrekt eingebauten Randbedingungen positiv definit.

Die Forderung nach Extremum von (1) führt zum linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (2)$$

Die Lösung von (2) mit Hilfe der KGM erfolgt nach dem Algorithmus [4]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{r}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{K} \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{p}_i &= \mathbf{K} \mathbf{v}_i, \\ \alpha_i &= \frac{\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{r}_i}{\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{p}_i}, \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{v}_i, \\ \mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i - \alpha_i \mathbf{p}_i, \\ \beta_i &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T \cdot \mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{r}_i}, \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{r}_{i+1} + \beta_i \mathbf{v}_i \end{aligned} \right\} \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Hier sind

- $\mathbf{u}_0$  – eine beliebige Anfangsnäherung,
- $\mathbf{r}_i$  – die Abweichung,
- $\mathbf{v}_i$  – der Richtungsvektor,
- $n$  – die Anzahl der Gleichungen in (2).

Theoretisch kommt man zur exakten Lösung von (2) nach  $n$  Iterationsschritten. Eine Reihe von Forschungen [6], [10] zeigen aber, daß man eine für die Praxis ausreichende Genauigkeit nach bedeutend weniger Iterationen  $m$  erhalten kann. Mit

$$m = \gamma \cdot n, \quad (4)$$

für die in [6] untersuchten Gleichungssysteme ( $n = 363 \dots 2421$ ) gilt  $\gamma = 0,1 \dots 0,23$ . Die gleichen Verfasser bemerken, daß mit wachsendem  $n$ ,  $\gamma$  kleiner wird.

Zur Beendigung der Prozedur (3) kann man verschiedene Kriterien verwenden. In [10] wird die Befriedigung der Ungleichung

$$e_T = \sqrt{\frac{\mathbf{r}_i^T \cdot \mathbf{r}_i}{\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b}}} \leq \epsilon_1 \quad (5)$$

vorgeschlagen. Dabei ist  $\epsilon_1$  der vorgeschriebene Fehler für die mittlere quadratische Abweichung vom Gleichgewichtszustand der Knoten. Als ein anderes Kriterium [3] wird die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungen benutzt:

$$e_x = \frac{\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}\|}{\|\mathbf{u}_{i-1}\|} = \alpha_i \frac{\|\mathbf{v}_i\|}{\|\mathbf{u}_{i-1}\|} \leq \epsilon_2, \quad (6)$$

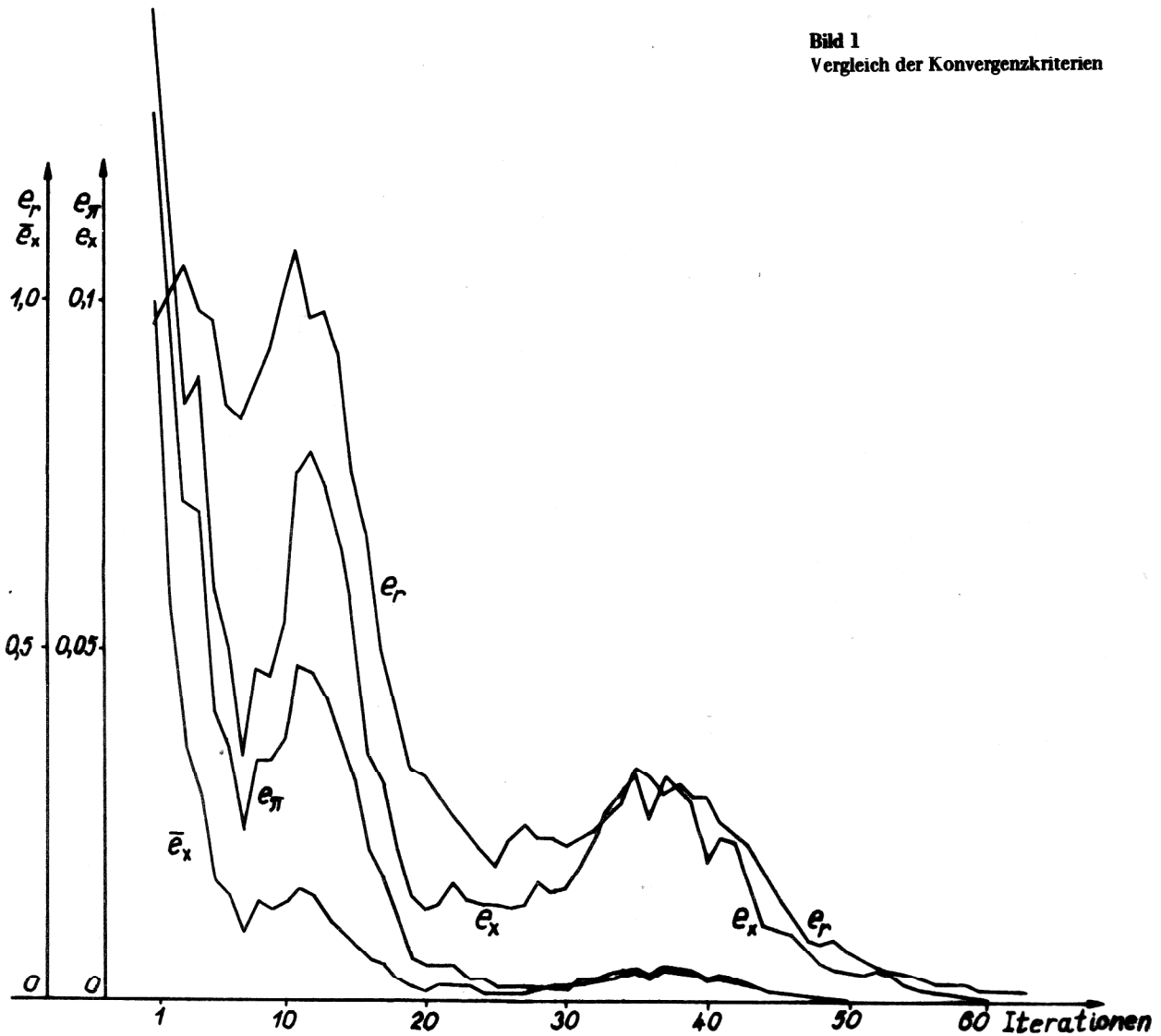
wobei  $\|\dots\|$  als Euklid-, bzw. als Maximumnorm aufzufassen ist.

Man kann zeigen [4], daß für jedes  $i$  der Prozedur (3) die Ungleichung

$$\Pi(\mathbf{u}_{i+1}) < \Pi(\mathbf{u}_i)$$

erfüllt ist. Dieser Umstand gewährleistet die Konvergenz der KGM. Man kann weiterhin zeigen, daß gilt

**Bild 1**  
Vergleich der Konvergenzkriterien



$$\Pi(u_{i+1}) - \Pi(u_i) = -\frac{1}{2} \alpha_i r_i^T r_i, \quad (7)$$

Bezeichnet man mit  $\Pi^*$  eine Näherungsschätzung für die Arbeit der äußeren Kräfte, so kann man als Kriterium für die Exaktheit der Lösung auch die Ungleichung

$$e_{\Pi} = \frac{\alpha_i r_i^T r_i}{2 \Pi^*} \leq \epsilon_3 \quad (8)$$

verwenden.

Auf Bild 1 sind die relativen Fehler entsprechend (5), (6) und (8) über der Anzahl der Iterationen aufgetragen. Die Kurven beziehen sich auf die Lösung des Gleichungssystems für das Beispiel von Bild 6. Man sieht, daß zwischen den einzelnen Kurven kein großer qualitativer Unterschied existiert. Bei der weiteren Arbeit wurde deshalb das Kriterium (5) angenommen, welches einen klaren physikalischen Sinn hat.

Die Vorteile der KGM vor der Lösung der linearen FEM-Gleichungssysteme mit direkten Verfahren sind folgende:

a) Die Steifigkeitsmatrix kann in voll verdichteter Form dargestellt werden. Dabei werden alle Nullelemente ausgeschlossen. Das führt zu Verminderung der Anzahl der Fließkommaoperationen und der erforderlichen Spei-

cherplätze. Gleichzeitig erhöht sich aber die Anzahl der Operationen mit ganzen Zahlen, die aber bedeutend schneller als die Fließkommaoperationen durchgeführt werden. Bezeichnet man mit  $\lambda$  die mittlere Zahl der Knoten, die einen Beitrag zum Gleichgewicht eines bestimmten Knotens haben, und mit  $\kappa$  die Anzahl der Unbekannten pro Knoten, so gilt für die Anzahl  $N$  der von Null verschiedenen Elemente der Matrix  $K$

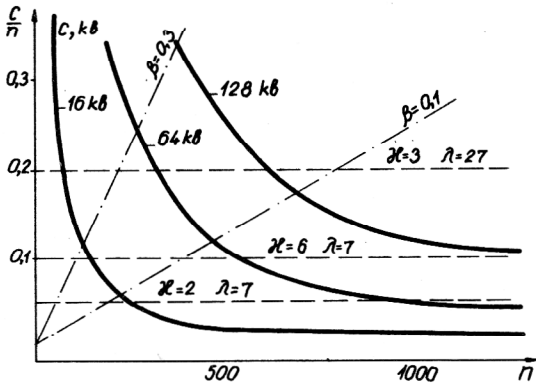
$$N = \frac{n_v \kappa}{2} (\lambda \kappa + \kappa + 1), \quad (9)$$

worin  $n_v$  die Knotenanzahl ist.

Der Koeffizient  $\lambda$  hängt von den topologischen Eigenschaften des Netzes und von der Ordnung der Formfunktion ab. Für ebene Aufgaben und finite Elemente mit linearen Ansätzen für die Verschiebungen ist  $\lambda \approx 7$ ; für quadratische Ansätze ist  $\lambda \approx 15$ . Für räumliche Probleme und lineare Verschiebungsfunktionen ist  $\lambda \approx 27$ . Die verdichtete Darstellung der Matrix  $K$  erfordert zusätzliche Speicherplätze für die auf die Lage der von Null verschiedenen Elemente hinweisende Information. Es kann gezeigt werden, daß dafür

$$N_1 = \frac{n_v}{2} (\lambda + 4) \quad (10)$$

ganze Zahlen notwendig sind. Auf Bild 2 ist die Größe



**Bild 2**

Die erforderlichen Hauptspeicherplätze in Kbyte für die Unterbringung des Gleichungssystems bei:

- verdichteter Speicherung
- - - sky-line-Speicherung

$\frac{C}{n}$  über  $n = n_v \cdot \kappa$  aufgetragen, wobei C die notwendigen Speicherplätze in Kbyte sind.

In den für die verdichtete Speicherung der Matrix K notwendigen Speicherplätzen sind auch Plätze für die Arbeitsfelder zur Lösung des Gleichungssystems und die Adressenmatrizen vorgesehen. Auf demselben Bild sind ebenfalls die notwendigen Speicherplätze aufgetragen, für den Fall, daß die Matrix K als Band-sky-line-Matrix gespeichert wird. Der Koeffizient

$$\beta = \frac{\Delta + 1}{n_v} \quad (11)$$

wobei  $\Delta$  die größte Knotennummerdifferenz ist, hängt von der Art der Nummerierung ab. Falls sie günstig ist, nimmt  $\beta$  meistens Werte im Intervall 0,07 bis 0,3 an. Aus Bild 2 ist ersichtlich, daß bei vorhandenem Speicherraum von 64 Kb und verdichteter Matrix, ohne externe Speicher bis 1000 Gleichungen gelöst werden können. Bei Bandmatrix ( $\beta = 0,1$ ) kann man unter gleichen Bedingungen nicht mehr als 400 Gleichungen lösen.

b) Die Matrix K ändert sich nicht während der Prozedur (3) der KGM. Wird es notwendig, die Werkstoffkonstanten bzw. die geometrischen Kennwerte eines finiten Elementes zu verändern, trifft dies auf ganz definite Weise leicht bestimmbare Teile der Gesamtsteifigkeitsmatrix K. Falls man dagegen eine direkte Lösungsmethode verwendet, muß man die ganze Matrix K neu bilden, bzw. von einem externem Speicher neu einlesen.

c) Die Lösung des Gleichungssystems kann mit einer beliebig vorgeschriebenen Genauigkeit durchgeführt werden. Das ist besonders wichtig bei den nichtlinearen Problemen, da sie zur Lösung einer Reihenfolge linearer Aufgaben führen. Für die Zwischenschritte ist keine hohe Genauigkeit notwendig, was insgesamt die Anzahl der Rechenoperationen verringert.

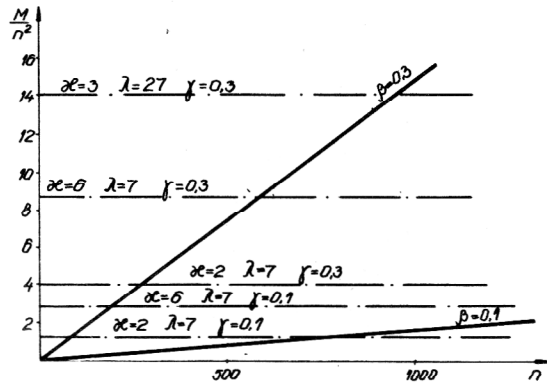
d) Es verringert sich ebenfalls die Anzahl der Fließkommaoperationen. Bei dem Lösen des Gleichungssystems nach Cholesky ist die Anzahl der Fließkommaoperationen  $M_1$  annähernd

$$M_1 \approx \frac{1}{6} \beta^2 n^3, \quad (12)$$

und bei verdichteter Matrix und der KGM —

$$M_2 \approx \frac{1}{2} \gamma n^2 (\lambda \kappa + \kappa + 11). \quad (13)$$

Auf Bild 3 ist die Größe  $M/n^2$  als Funktion der Anzahl der Gleichungen n aufgetragen.



**Bild 3**

Die erforderliche Anzahl von Fließkommaoperationen bei der Lösung eines Gleichungssystems nach:

- dem Cholesky-Verfahren
- - - der KGM mit verdichteter Matrix

e) Beim Arbeiten mit verdichteter Matrix K ist die Reihenfolge der Knoten- und Elementennummerierung für die Rechenzeit bedeutungslos. Dieser Umstand gestattet, bei Notwendigkeit, leichtes Hinzufügen von neuen finiten Elementen zum ursprünglich untersuchten Objekt.

Der wesentliche Nachteil der KGM, der sie konkurrenzunfähig den direkten Lösungsmethoden gegenüber macht, ist die Tatsache, daß für jede neue rechte Seite die Prozedur (3) voll durchzuführen ist. Bei nur einem Belastungsfall, kann die KGM wie bereits oben gezeigt, effektiver als die direkten Verfahren sein.

### 3. Methode der veränderlichen elastischen Parameter in Zusammenhang mit der Deformationstheorie der Plastizitätslehre

Bei der Methode der veränderlichen elastischen Parameter [2] (Methode der Sekantensteifigkeit) werden die physikalischen Gleichungen der Deformationstheorie der Plastizität auf die Form des Hookeschen Gesetzes zurückgeführt:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E^*} [\sigma_x - \mu^* (\sigma_y + \sigma_z)], \dots, \gamma_{zx} = \frac{1}{G^*} \tau_{zx}. \text{ Hier sind}$$

$$E^* = \frac{\sigma_i / \epsilon_i}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} \cdot \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}}, \quad \mu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{3E} \cdot \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}}{1 + \frac{1-2\mu}{3E} \cdot \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}}, \quad G^* = \sigma_i / 3\epsilon_i \quad (14)$$

die veränderlichen elastischen Parameter, 
$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (15)$$

ist die äquivalente Dehnung und  $\sigma_i$  ist die entsprechende Spannung nach der Werkstoffverformungskurve. Die Anwendung der Methode der veränderlichen elastischen Parameter ist aus Bild 4 ersichtlich.

#### 4. Verbindung der Konjugierte-Gradienten-Methode der veränderlichen elastischen Parameter

Der Grundgedanke der vorliegenden Arbeit besteht darin, die Iterationsprozesse beider Methoden miteinander zu verbinden. Zu diesem Zweck wird bei der ursprünglichen Gesamtsteifigkeitsmatrix  $K$  und bei voller Belastung  $b$  eine Anzahl KGM-Iterationen durchgeführt, ohne hohe Genauigkeit zu fordern (man kann z. B. die Bedingung (5) bei  $\epsilon_1 = 0,1$  erfüllen). Es ist anzunehmen, daß diese Anzahl 0,5 bis 0,75 von der gesamten für die Lösung mit hoher Genauigkeit ( $\epsilon_1 = 0,01$ ) erforderlichen Iterationenzahl sein kann. Es sei danach die äquivalente Spannung

$$\sigma_{i1}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (16)$$

in einigen finiten Elementen höher geworden als die, der erreichten Dehnung  $\epsilon_{i1}$  auf der Verformungskurve entsprechende Spannung  $\sigma_{i1}$  (Bild 4). Die Werkstoffkonstanten dieser Elemente werden nach (14) Neuberechnet und ihre neuen Elementsteifigkeitsmatrizen in die Gesamtsteifigkeitsmatrix eingearbeitet. Die Iterationsprozedur (3) der KGM wird dann bei der so modifizierten Matrix fortgesetzt. Als Anfangsnäherung  $u_0$  wird dabei die bereits gewonnene Lösung angenommen.

Ein Blockdiagramm des so beschriebenen Algorithmus ist auf Bild 5 dargestellt.

#### 5. Das Computerprogramm

Nach dem beschriebenen Algorithmus wurde ein Programm in FORTRAN für den Minicomputer ISOT 310 zur Lösung von elastoplastischen ebenen Aufgaben geschrieben. Die Unterprogramme zur Bildung der Elementensteifigkeiten sind so aufgebaut, daß sie direkt die Differenz zwischen den „neuen“ und den „alten“ Elementensteifigkeitsmatrizen berechnen. Die Einarbeitung dieser Differenz in die Gesamtsteifigkeitsmatrix führt automatisch zu ihrer Erneuerung. Die kinematischen Randbedingungen werden allgemein in der Form  $u_i = c u_j$  eingebaut, wobei  $i$  und  $j$  beliebig sind. Ist  $c = 0$ , so wird der entsprechende Freiheitsgrad gleich Null gesetzt. Diese Randbedingungen sind so in die KGM-Prozedur eingebaut, daß sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix nicht ändert. Die Berücksichtigung von Federkonstanten ist leicht möglich.

Das Programm arbeitet in Dialogbetrieb. Die Anzahl der durchzuführenden Iterationen wird über die Angabe des zulässigen Fehlers (5) gesteuert. Man kann die Zwischenergebnisse analysieren und entscheiden, ob die Lösung abzubrechen ist.

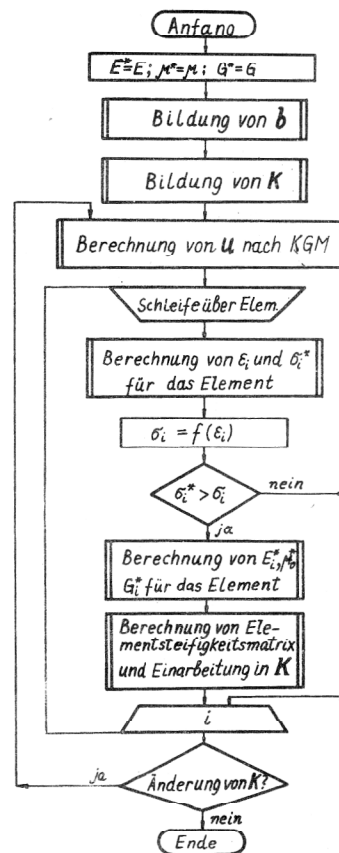
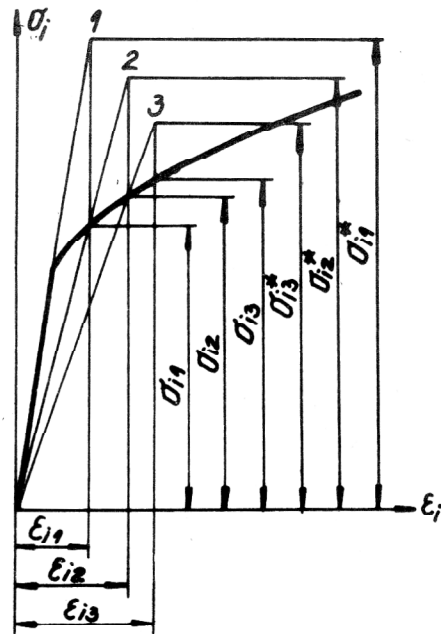


Bild 5  
Blockdiagramm des Algorithmus

Das Unterprogramm, das die Bedingung

$$\sigma_i^*(\epsilon_i) = \sigma_i(\epsilon_i)$$

prüft und bei Notwendigkeit die elastischen Parameter verändert, ist so aufgebaut, daß es sowohl den ideal-elastoplastischen Werkstoff als auch solchen mit Fließebene und Verfestigung modellieren kann.

## 6. Beispiele

### 6.1. Kreisscheibe mit Öffnung unter Innendruck

Die analytische Lösung für den elastoplastischen Zustand einer gelochten Kreisscheibe mit konstanter Dicke unter Innendruck ist in [2, § 35] angeführt. Bei einem Innendurchmesser von 20 mm, Außendurchmesser 40 mm,

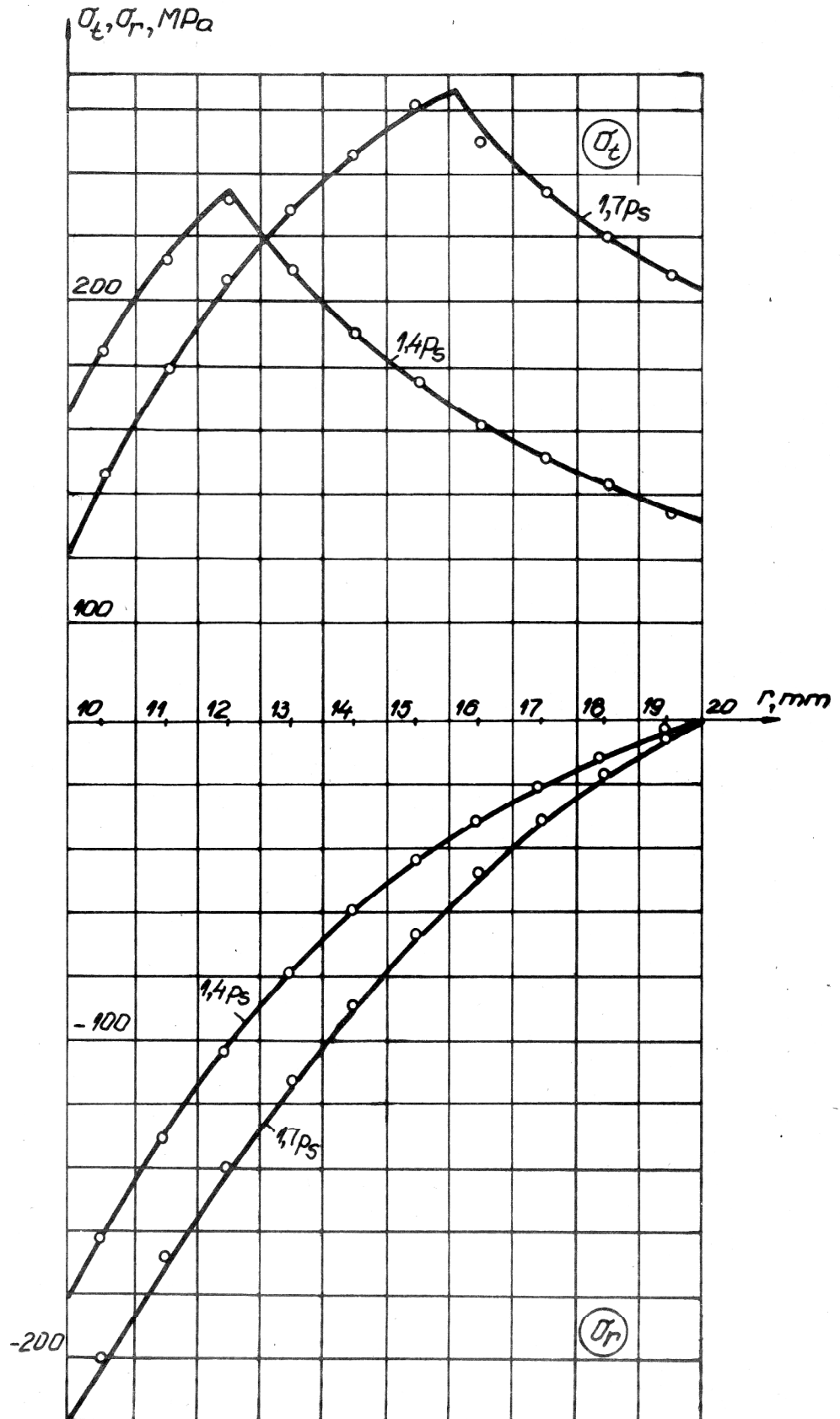


Bild 6  
Kreisscheibe mit Öffnung  
unter Innendruck

Dicke 1 mm und Fließgrenze  $\sigma_F = 300$  MPa ist der nach der Gestaltänderungsenergiehypothese berechnete Druck  $p_s$ , bei dem das erste Fließen an der Öffnung ansetzt, gleich 128,6 MPa. Diese Scheibe ist in zehn ringförmige finite Elemente [5] mit einer Differenz zwischen dem äußeren und dem inneren Durchmesser jedes Elementes von 1 mm aufgeteilt. Die Anzahl der Gleichungen ist 11. Es wurden zwei Lösungen durchgeführt – bei  $1,4 p_s$  bzw.  $1,7 p_s$ . Die berechneten Radial- und Tangentialspannungen sind im Bild 6 gezeigt, worin die ausgezogenen Linien die nach [2] analytisch bestimmten Werte darstellen. Bei  $p = 1,4 p_s$  ist Konvergenz nach 101 Iterationen erreicht, bei  $p = 1,7 p_s$  – nach 187 Iterationen.

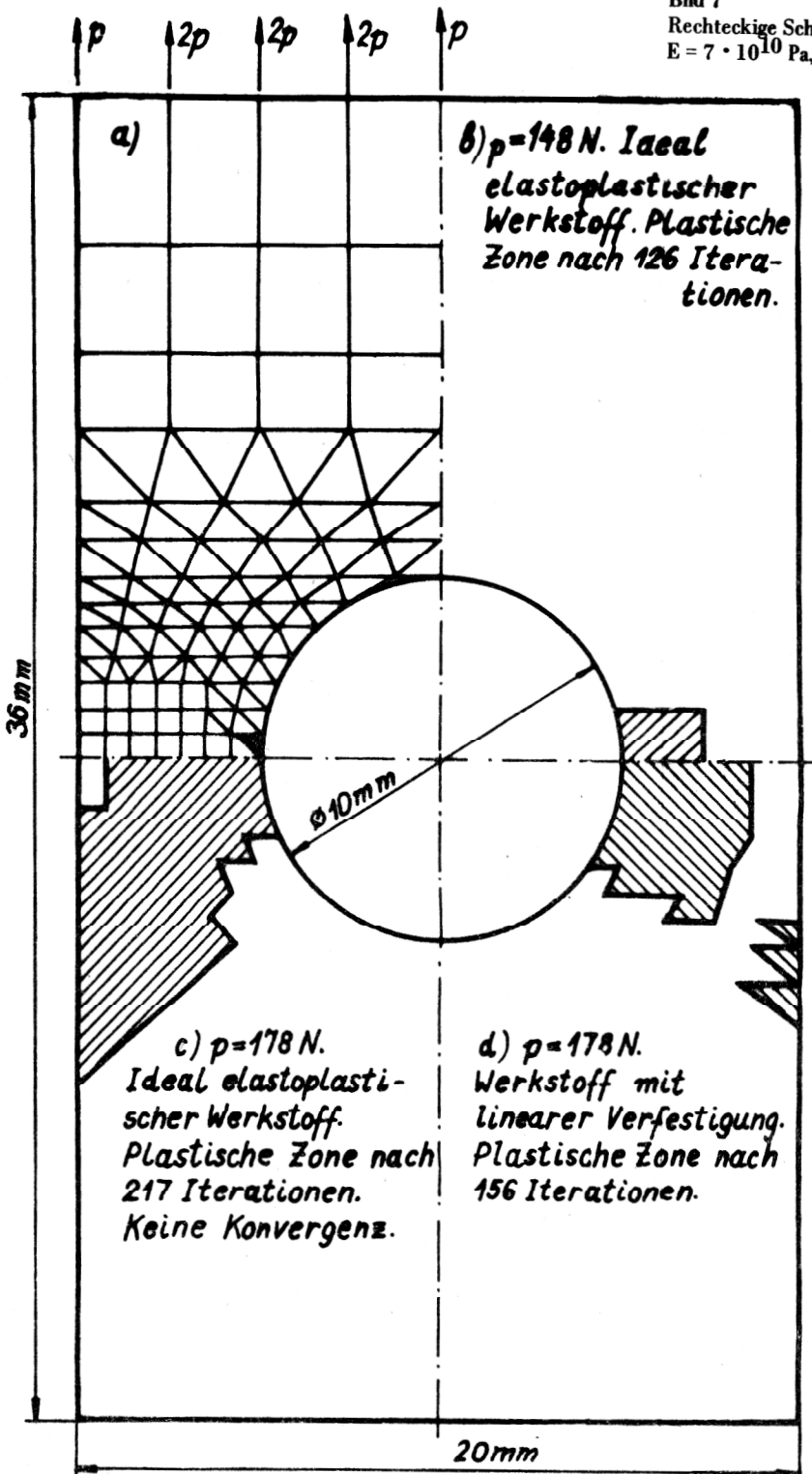
## 6.2. Gelochte Scheibe unter Zugbelastung

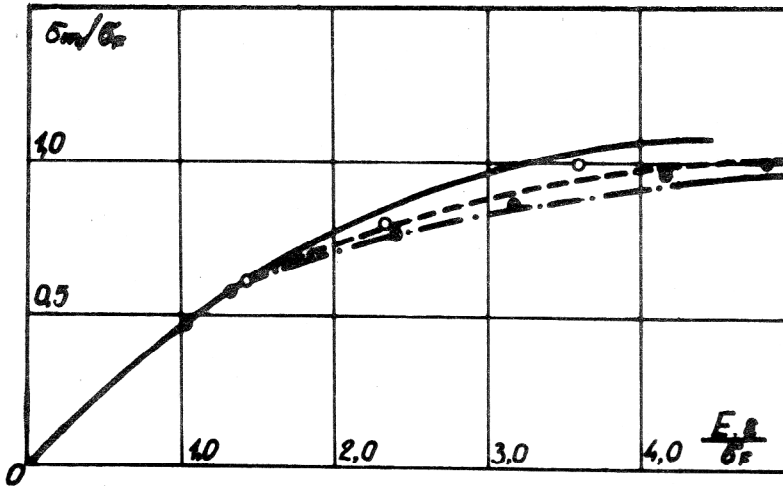
Nach der Methode der Anfangsspannungen ist dieses Problem in [1, S. 363] und nach der Deformationstheorie in [9] untersucht.

Bei der Vernetzung nach Bild 7 gewinnt man eine ausreichend genaue elastische Lösung ( $\epsilon_r < 0,01$ ) nach 63 Iterationen. Es wurden 4 Rechnungen bei nichtelastischen Werkstoffverhalten durchgeführt. Bei  $p = 81$  N fließt nur ein einziges Element (Bild 7, a). Es wären 70 Iterationen notwendig, davon 3 mit Änderung der elastischen Parameter.

Bei  $p = 148$  N und 126 Iterationen, davon 14 mit Plasti-

Bild 7  
Rechteckige Scheibe mit Öffnung. 94 Knoten,  
 $E = 7 \cdot 10^{10}$  Pa,  $M = 0,2$ ,  $\sigma_F = 243$  MPa, Dicke 1 mm





zierung kommt man zu der plastischen Zone nach (Bild 7, b).

Die Belastung  $p = 178 \text{ N}$  bei ideal elastoplastischem Werkstoff führt zu Plastizierung über die ganze Breite der Scheibe (Bild 7, c). In diesem Fall wurde nach 217 Iterationen keine Konvergenz festgestellt. Die gleiche Belastung ergibt, bei Werkstoff mit linearer Verfestigung ( $E' = 2250 \text{ MPa}$ ), eine Fließzone nach Bild 7, d. Sie wurde nach 156 Iterationen, davon 21 plastische, gewonnen. Auf Bild 8, das dem Bild 2 aus [9] entspricht, ist die mittlere nominale Zugspannung im Schnitt durch die Öffnung (Bild 7)

$$\sigma_m = \frac{F_z}{A} = \frac{16p}{10}$$

über die größte Längsdehnung  $\epsilon$  aufgetragen. Man sieht, daß die hier berechneten Werte näher an den experimentellen Ergebnissen von Theokaris und Marketos [1], [9] liegen, als die nach anderen Verfahren [1], [9] gewonnenen Resultate.

#### LITERATUR

- [1] Zienkiewicz O. C.: Methode der finiten Elemente. Leipzig 1974.
- [2] Малинин Н.: Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва, 1975
- [3] Миямото Х., Миеси Т.: Определение коэффициента интенсивности напряжений для растягиваемой пластины с трещиной, выходящей на поверхность. В сб. Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ, том 1, Ленинград, 1974.

**Bild 8**

Scheibe mit Öffnung: Abhängigkeit der mittleren Zugspannung von der maximalen Längsdehnung

- experimentelle Ergebnisse von Theokaris und Marketos (nach [9])
- - - - - ideal elastoplastischer Werkstoff, Ergebnisse von Marcal und King (nach [9])
- · - · - Werkstoff mit Verfestigung, Ergebnisse von Marcal und King (nach [9])
- Werkstoff mit Verfestigung, Ergebnisse von King [9]
- Werkstoff mit Verfestigung, Ergebnisse der vorgeschlagenen Methodik.

- [4] Ralston A.: A First Course in Numerical Analysis. New York, 1965.
- [5] Христов Д.: Изследване на температурата, преместванията и напреженията, създадени от мигновен линеен заваръчен източник на топлина. Кандидатска дисертация, Русе, 1978.
- [6] Yettram A. L., Hirst M. J. S.: The Solution of Structural Equilibrium Equations by the Conjugate Gradient Method with Particular Reference to Plane Stress Analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. 7 (1971) p. 349 – 360.
- [7] Bathe K. J., Wilson E. L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis. New Jersey, 1976.
- [8] Argiris J. H., Scharpf D. W., Spooner J. B.: Die elastoplastische Berechnung von allgemeinen Tragwerken und Kontinua. Ing.-Archiv 37 (1969), S. 326 – 352.
- [9] Kim H. O.: Finite Element Formulation Based on Nádai's Deformation Theory for Elasto-plastic Analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. 17 (1981), p. 1861 – 1876.
- [10] Altenbach J., Sacharov A. S.: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. Leipzig, 1982.

Anschrift der Verfasser:

Doz. Dr.-Ing. Doril Christow  
Doz. Dr.-Ing. Marco Todorow  
Technische Hochschule  
Russe, VR Bulgarien  
Lehrstuhl für Informatik