

# Vergleich von Verfestigungsansätzen durch numerische Simulation beliebiger Belastungsvorgänge

Wolfgang Göhler

## 1. Einleitung

Der analytischen Erfassung des elastisch-plastischen Materialverhaltens sind viele Veröffentlichungen in den letzten Jahren gewidmet. Zu den wichtigsten zählen die Arbeiten von Backhaus und Valanis.

Backhaus entwickelte auf der Grundlage von Versuchsergebnissen verschiedene Verfestigungsansätze. Er bewegt sich dabei stets im Rahmen des assoziierten Fließgesetzes mit einer verallgemeinerten Mises-Fließbedingung [4], [5].

Valanis leitet seine endochronische Plastizitätstheorie aus thermodynamischen Betrachtungen her. Er kommt dabei zunächst zu einem Deformationsgesetz ohne Fließbedingung [6], [7]. Später modifiziert er diese Theorie, wodurch er eine Fließbedingung erhält [8]. Einer der Gründe für diese Modifizierung dürfte darin liegen, möglichst eine gute Übereinstimmung mit Experimenten zu erreichen.

Interessant ist, daß dabei für die kinematische Verfestigung eine Formulierung entsteht, die große Ähnlichkeit mit dem Ansatz von Backhaus aufweist.

Wie den meisten modernen Verfestigungsansätzen, ist auch denen von Backhaus und Valanis eine gewisse mathematische Kompliziertheit eigen. Deshalb findet man in der Literatur auch nur wenige Belastungsvorgänge, auf die derartige Verfestigungsansätze angewendet werden.

Ein entscheidender Schritt zur Überwindung dieser Schwierigkeit war die Aufstellung der Standardformulierung inelastischer Deformationsgesetze durch Bergander [2], [3]. Bergander hat für eine große Anzahl inelastischer Deformationsgesetze (z. B. auch für die Verfestigungsansätze von Backhaus) nachgewiesen, daß sie der von ihm gefundenen Standardformulierung genügen.

Der Autor hat in [1] gezeigt, daß mit Hilfe dieser Standardformulierung elastisch-plastische Deformationsgesetze mit komplizierten Verfestigungsansätzen numerisch so aufbereitet werden können, daß sie zur Nachrechnung jedes beliebigen Belastungsvorganges benutzbar sind.

Im folgenden Text wird die von Valanis in [8] modifizierte endochronische Plastizitätstheorie in die Standardformulierung überführt. Auf der Grundlage eines vom Autor erstellten EDV-Programms [1], werden anschließend die Ansätze von Backhaus an Hand einiger konkreter Belastungsvorgänge untereinander verglichen.

## 2. Standardformulierung elastisch-plastischer Deformationsgesetze

Einer der Vorzüge der Standardformulierung hinsichtlich der numerischen Umsetzung besteht darin, daß es gelungen ist, konsequent die Matrixschreibweise anzuwenden.

Dazu werden die 6 unabhängigen Komponenten des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  in einem Vektor  $\sigma$  zusammengefaßt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}$$

Um aus diesem  $\sigma$  den entsprechenden Vektor  $s$  der Deviatorspannungen berechnen zu können, muß eine Matrix  $T_D$  definiert werden:

$$s = T_D \sigma$$

Durch die Einführung einer weiteren Matrix  $T_s$ , kann das Produkt von zwei Tensoren zweiter Stufe in Matrixschreibweise ausgedrückt werden.

$$s_{ij} s_{ij} = s^T T_s s$$

Der dem Spannungsvektor  $\sigma$  zugeordnete Verzerrungsvektor  $\epsilon$  wird mittels der mechanischen Leistung  $\dot{w}$  bestimmt.

$$\dot{w} = \sigma^T \dot{\epsilon}$$

Auf der Grundlage der Fließtheorie mit einem assoziierten Fließgesetz kann nun die Standardformulierung abgeleitet werden. Im Einzelnen sind dabei folgende Voraussetzungen zu beachten:

- Die Verzerrungsgeschwindigkeiten bestehen aus elastischen und plastischen Anteilen

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p \quad (1)$$

Alle Verfestigungsparameter sind in einem Vektor  $h$  zusammengefaßt und genügen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche als Normalform der Verfestigungsansätze bezeichnet werden

$$\dot{h} = q \dot{\lambda}^1 \quad (2)$$

- Es existiert eine Fließbedingung

$$F(\sigma, h) = 0 \quad (3)$$

- Für die plastischen Verzerrungen gilt das assoziierte Fließgesetz

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \quad (4)$$

Während des Fließens (d. h.  $F = 0$ ) ändert sich die Fließbedingung (3) nach folgender Gleichung:

$$\dot{F} = \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T \dot{\sigma} + \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{h}} \right)^T \dot{\mathbf{h}} \quad (5)$$

Mit den beiden Abkürzungen

$$\varphi = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = - \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{h}} \right)^T \mathbf{q} \quad (7)$$

kann nach Einsetzen von (2) in (5) der Faktor  $\dot{\lambda}$  berechnet werden:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\mathbf{v}} \varphi^T \dot{\sigma}$$

Mit diesem Faktor  $\dot{\lambda}$  und den beiden Abkürzungen (6) und (7) erhält man unter Verwendung von (4) sowie (1) und (2) folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{J} \dot{\sigma} = (\mathbf{J}_{el} + \frac{1}{\mathbf{v}} \varphi \varphi^T) \dot{\sigma} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{A} \dot{\sigma} = \left( \frac{1}{\mathbf{v}} \mathbf{q} \varphi^T \right) \dot{\sigma} \quad (9)$$

Diese beiden Matrizengleichungen stellen die Standardformulierung elastisch-plastischer Deformationsgesetze dar.

Neben der Einhaltung der Fließbedingung (3) muß bei der Anwendung dieser Gleichungen auch ständig geprüft werden, ob Entlastung eintritt. Im Fall der Belastung im plastischen Bereich gilt

$$\varphi^T \dot{\sigma} > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{v} > 0$$

Falls diese Bedingung nicht erfüllt ist, oder wenn der Spannungsvektor noch vollständig im elastischen Bereich liegt ( $F < 0$ ), entfallen Gleichung (9) und der plastische Anteil von (10). Das Problem reduziert sich auf das Füllen der elastischen Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{J}_{el}$ .

### 3. Numerische Integration

In dem vom Autor erarbeiteten EDV-Programm [1] wird das durch die beiden Gleichungen (8) und (9) definierte Differentialgleichungssystem numerisch integriert. Die mathematische Grundlage dafür bildet das Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung.

Als Ausgangszustand wurde ein spannungs- und verformungsfreier Zustand gewählt, in dem noch keine Verfestigungsparameter ausgebildet sind:

$$\sigma(t=0) = \mathbf{0}$$

$$\epsilon(t=0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{h}(t=0) = \mathbf{0}$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{0}$  den Nullvektor.

Die Gleichung (8) kann teilweise oder vollständig invertiert werden. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, sechs Spannungs- und Dehnungsgeschwindigkeitskomponenten in beliebiger Kombination vorgeben zu können.

Das EDV-Programm errechnet alle Spannungs- und Verzerrungskomponenten, sowie sämtliche Verfestigungsparameter.

Es können alle möglichen Verfestigungsansätze angewendet werden, wenn sie der Normalform (2) genügen.

In [3] ist für eine ganze Reihe bekannter Ansätze nachgewiesen worden, daß sie in eine derartige Differentialgleichung umformbar sind.

Die unterschiedlichen Verfestigungstypen, wie isotrope, kinematische und anisotrope Verfestigung, oder auch Entfestigungsansätze wie bei Backhaus [5], werden als Teilvektoren  $\mathbf{h}_i$  des Vektors  $\mathbf{h}$  betrachtet

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_M \end{pmatrix} \quad (10)$$

Aus (2) folgt, daß auch für den Vektor  $\mathbf{q}$  eine zu (10) analoge Zerlegung in Teilvektoren  $\mathbf{q}_i$  gilt.

Die skalare Größe  $\mathbf{v}$  ergibt sich nun als Summe von Teilgrößen  $v_i$ :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^M v_i$$

$$v_i = - \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{h}} \right)^T \mathbf{q}_i$$

Für die Programmierung bietet es sich an, die zu den einzelnen Verfestigungstypen gehörigen  $\mathbf{q}_i$  und  $v_i$  durch ein System von Unterprogrammen zu erfassen. Dadurch lassen sich einerseits verschiedene Verfestigungstypen beliebig miteinander kombinieren, andererseits können unterschiedliche Ansätze für einen Verfestigungstyp leicht ausgetauscht werden.

### 4. Kinematischer Verfestigungsansatz von Backhaus

Alle von Backhaus publizierten Ansätze für Ver- oder Entfestigungsparameter beziehen sich auf eine Fließbedingung zylindrischer Art, welche in Matrixschreibweise folgende Form hat:

$$F = (\sigma - \mathbf{a})^T \mathbf{T}_D^T \mathbf{T}_A \mathbf{T}_D (\sigma - \mathbf{a}) - \sigma_F^2 = 0 \quad (11)$$

Mit einer derartigen Fließbedingung können folgende Verfestigungstypen berücksichtigt werden:

- isotrope Ver- und Entfestigung über  $\sigma_F$
- kinematische Verfestigung durch den Vektor  $\mathbf{a}$
- anisotrope Verfestigung durch die Matrix  $\mathbf{T}_A$ .

Es soll keine anisotrope Verfestigung betrachtet werden. In diesem Fall gilt

$$\mathbf{T}_A = \frac{3}{2} \mathbf{T}_s \quad (12)$$

Der kinematische Verfestigungsansatz wird durch folgendes Relaxationsintegral beschrieben:

$$\mathbf{a} = \int_0^{\epsilon_v} \mathbf{h}(\bar{\epsilon}_v, \epsilon_v - \bar{\epsilon}_v) \mathbf{T}_s^{-1} \frac{d\epsilon_p}{d\bar{\epsilon}_v} d\bar{\epsilon}_v \quad (13)$$

Die als Integrationsvariable benutzte plastische Vergleichsdehnung  $\epsilon_v$  ist wie üblich definiert.

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p^T \mathbf{T}_s^{-1} \dot{\epsilon}_p$$

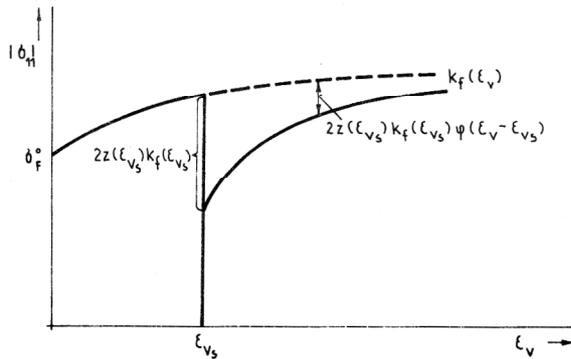
Die Funktion  $b$  wird als Ableitung eines Produktes zweier Funktionen angesetzt:

$$b(\bar{\epsilon}_v, \epsilon_v - \bar{\epsilon}_v) = \frac{\partial}{\partial \bar{\epsilon}_v} [\gamma(\bar{\epsilon}_v) \varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)] \text{ mit } \varphi(0) = 1$$

Die Funktion  $\gamma(\epsilon_v)$  hängt wiederum von der isotropen Aufweitungsfunktion  $\sigma_F(\epsilon_v)$  und der sogenannten Bauschingerkennzahl  $z(\epsilon_v)$  ab.

$$\gamma(\epsilon_v) = \frac{2}{3} \frac{z(\epsilon_v)}{1 - z(\epsilon_v)} \sigma_F(\epsilon_v) = \frac{2}{3} (k_f(\epsilon_v) - \sigma_F(\epsilon_v))$$

Bild 1 zeigt, wie die Materialfunktionen  $\sigma_F(\epsilon_v)$ ,  $z(\epsilon_v)$  und  $\varphi(\epsilon_v - \epsilon_{v_s})$  aus Versuchen bestimmt werden können. Mit  $k_f(\epsilon_v)$  ist die einsinnige Verfestigungskurve bezeichnet.



**Bild 1**  
Darstellung der Materialfunktionen von Backhaus an einer einachsigen Fließkurve mit Lastumkehr

Für den späteren Vergleich mit dem Valanis-Ansatz soll eine rein kinematische Verfestigung betrachtet werden, d. h. es gilt:

$$\sigma_F(\epsilon_v) = \sigma_F^0$$

$\sigma_F^0$  ist die Anfangsfließspannung.

Daraus ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für die Bauschingerkennzahl  $z(\epsilon_v)$ :

$$z(\epsilon_v) = 1 - \frac{\sigma_F^0}{k_f(\epsilon_v)}$$

Das Materialverhalten wird damit nur noch von zwei Funktionen bestimmt, der einsinnigen Verfestigungsfunktion  $k_f(\epsilon_v)$  und der Relaxationsfunktion  $\varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)$ . Um den Ansatz (13) in die Normalform bringen zu können, müssen noch einige Umformungen vorgenommen werden. Ausführlicher kann das in [1] und [3] nachgelesen werden.

Zunächst wird die Relaxationsfunktion in eine Exponentialreihe entwickelt:

$$\varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v) = \sum_{n=0}^N \varphi_n e^{-\kappa_n(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)}$$

Damit kann der Vektor  $\mathbf{a}$  nach (13) als Summe von  $N+1$  Teilvektoren  $\mathbf{a}_n$  dargestellt werden

$$\mathbf{a} = \sum_{n=0}^N \mathbf{a}_n$$

Für die zeitliche Ableitung eines Teilvektors  $\mathbf{a}_n$  erhält man die Gleichung

$$\dot{\mathbf{a}}_n = \varphi_n \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \epsilon_v} + \kappa_n \gamma \right) \mathbf{T}_s^{-1} \dot{\epsilon}_p - \kappa_n \mathbf{a}_n \dot{\epsilon}_v$$

Da keine anderen Verfestigungstypen berücksichtigt werden, setzt sich der Vektor  $\mathbf{h}$  aus den  $N+1$  Teilvektoren  $\mathbf{a}_n$  zusammen:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_N \end{pmatrix} \quad (14)$$

Mit Hilfe der Definitionsgleichung von  $\dot{\epsilon}_v$  und des assoziierten Fließgesetzes ergeben sich die entsprechenden Teilvektoren  $\mathbf{q}_n$ :

$$\mathbf{q}_n = \varphi_n \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \epsilon_v} + \kappa_n \gamma \right) \mathbf{T}_s^{-1} \underline{\varphi} - 2\kappa_n \sigma_F^0 \mathbf{a}_n$$

Die skalare Größe  $v$  kann aus folgender Gleichung errechnet werden:

$$v = \underline{\varphi}^T \sum_{n=0}^N \mathbf{q}_n \quad (15)$$

## 5. Der kinematische Verfestigungsansatz von Valanis

Valanis kommt in [8] ebenfalls zu einer quadratischen Fließbedingung der Form (11). Allerdings ist dabei von vornherein keine anisotrope Verfestigung enthalten, d. h. es gilt (12).

Im Gegensatz zu Backhaus formuliert Valanis seine Verfestigungsansätze nicht in Abhängigkeit von der plastischen Vergleichsdehnung  $\epsilon_v$ . Er benutzt die von ihm eingeführte „intrinsic time“  $\tau$ . Zwischen  $\tau$  und  $\epsilon_v$  besteht folgender Zusammenhang:

$$d\epsilon_v = g(\tau) d\tau \quad (16)$$

Die Materialfunktion  $g(\tau)$  beschreibt außerdem die isotrope Verfestigung:

$$\sigma_F = \sigma_F^0 g(\tau) \quad (17)$$

Die kinematische Verfestigung gibt auch Valanis als Relaxationsintegral an:

$$\mathbf{a} = \frac{2}{3} \int_0^{\tau} \mathbf{R}(\tau - \bar{\tau}) \mathbf{T}_s^{-1} \frac{d\epsilon_p}{d\bar{\tau}} d\bar{\tau} \quad (18)$$

Für die Ableitung der Normalform von (18) ist es günstig, daß die Relaxationsfunktion  $\mathbf{R}(\tau - \bar{\tau})$  nach [8] eine Exponentialreihe ist:

$$\mathbf{R}(\tau - \bar{\tau}) = \sum_{n=0}^N \mathbf{R}_n e^{-\alpha_n(\tau - \bar{\tau})} \quad (19)$$

Diese Funktion läßt sich aber nicht so einfach aus Experimenten bestimmen, wie es bei der Funktion  $\varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)$  des Backhaus-Ansatzes der Fall ist.

Um den Zusammenhang zu den anderen Materialfunktionen herstellen zu können, sind einige Umformungen notwendig (vgl. [1]). Als Resultat erhält man folgende Gleichung:

$$\int_0^{\tau} R(\tau - \bar{\tau}) g(\bar{\tau}) d\bar{\tau} = k_f(\tau) - \sigma_F^0 g(\tau) \quad (20)$$

Wenn kinematische und isotrope Verfestigung Berücksichtigung finden soll, muß zuerst die Funktion  $g(\tau)$  aus Lastwechselversuchen bestimmt werden. Danach kann man die Parameter von  $R(\tau - \bar{\tau})$  mit numerischen Methoden aus der Gleichung (20) ermitteln, vorausgesetzt die einsinnige Verfestigungsfunktion  $k_f(\tau)$  ist bekannt. Durch die Beschränkung auf kinematische Verfestigung vereinfacht sich dieser Lösungsweg etwas.

Infolge (16) und (17) sind dann  $\epsilon_v$  und  $\tau$  identisch und es gilt:

$$g(\tau) = 1$$

Bei Verwendung von (19) kann jetzt (20) vereinfacht werden:

$$\sum_{n=0}^N \frac{R_n}{\alpha_n} (1 - e^{-\alpha_n \epsilon_v}) \approx k_f(\epsilon_v) - \sigma_F^0$$

Zur Beschreibung des Materialverhaltens wird somit nur noch eine Materialfunktion, die einsinnige Verfestigungsfunktion  $k_f(\epsilon_v)$ , benötigt. Der Ansatz von Valanis besitzt demnach einen Freiheitsgrad weniger, als der von Backhaus.

Es bleibt noch die Umformung von (18) in die Normalform vorzunehmen. Dabei ist die formale Ähnlichkeit dieses Ansatzes zum Backhaus-Ansatz (13) nützlich.

$$\mathbf{a} = \sum_{n=0}^N \mathbf{a}_n$$

Als Zeitableitung eines Teilvektors  $\mathbf{a}_n$  ergibt sich

$$\dot{\mathbf{a}}_n = \frac{2}{3} R_n T_s^{-1} \dot{\epsilon}_p - \alpha_n \mathbf{a}_n \dot{\tau}$$

Der Vektor  $\mathbf{h}$  ist von der Form (14). Für einen Teilvektor  $\mathbf{q}_n$  der Normalform kann bei Verwendung des assoziierten Fließgesetzes, der Definitionsgleichung von  $\dot{\epsilon}_v$  und unter Berücksichtigung der vorliegenden Identität von  $\epsilon_v$  und  $\tau$  folgende Gleichung abgeleitet werden:

$$\mathbf{q}_n = \frac{2}{3} R_n T_s^{-1} \underline{\varphi} - 2\sigma_F^0 \alpha_n \mathbf{a}_n$$

Der Skalar  $v$  wird nach Gleichung (15) bestimmt.

## 6. Verwendete Materialfunktionen

In Anlehnung an [1] wurde folgende von Backhaus in [5] angegebene Verfestigungskurve verwendet:

$$k_f(\epsilon_v) = \sigma_F^0 (1 + 1.2 (1 - e^{-13 \epsilon_v})) \quad (21)$$

Diese Funktion ist durch Approximation experimenteller Ergebnisse bei Versuchen mit dem Stahl St 38 entstanden. Weiterhin wurden der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl von Stahl verwendet:

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,3$$

Als Anfangsfließspannung wurde angenommen

$$\sigma_F^0 = 200 \text{ MPa}$$

Für die Nachrechnung des Backhaus-Ansatzes benötigt man noch die Komponenten  $\varphi_n$  und  $\kappa_n$  der Relaxationsfunktionen  $\varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)$ . Auch diese Werte wurden aus

[1] entnommen, wobei 4 Reihenglieder Berücksichtigung fanden:

n	0	1	2	3
$\varphi_n$	0,0501	0,3365	0,424	0,1894
$\kappa_n$	0,0	83,2	363,5	2198,0

Die im Valanisansatz vorkommende Relaxationsfunktion  $R(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)$  wird direkt aus der Verfestigungskurve (21) berechnet (vgl. Abschnitt 5)

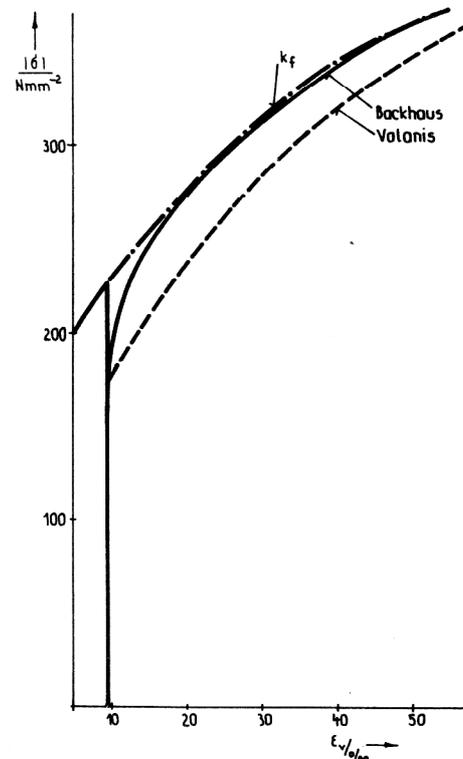
$$R(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v) = 3120 \text{ MPa} e^{-13(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)}$$

## 7. Diskussion der numerischen Ergebnisse

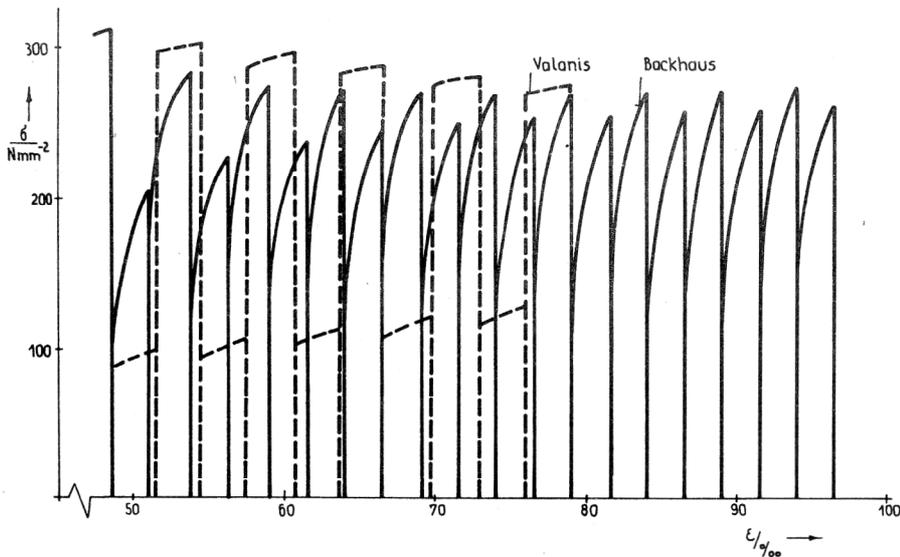
Als erstes Belastungsbeispiel wurde eine einmalige Lastumkehr Zug-Druck simuliert. Die Ergebnisse sind im Bild 2 dargestellt und zeigen bereits einen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Verfestigungsansätzen. Während bei Backhaus auf Grund der Wirkung der Materialfunktion  $\varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)$  die Fließkurve nach der Lastumkehr sich an die einsinnige Fließkurve anschmiegt, weist der Valanis-Ansatz in diesem Falle einen nahezu parallelen Verlauf von einsinniger und Umkehrfließkurve auf.

Auch im zweiten Beispiel, Zug-Druck-Zyklen mit kleiner konstanter Dehnungsamplitude nach einer größeren Vordehnung, tritt dieser Unterschied, besonders in den Kurvenverläufen zwischen den Zyklen, deutlich hervor (Bild 3).

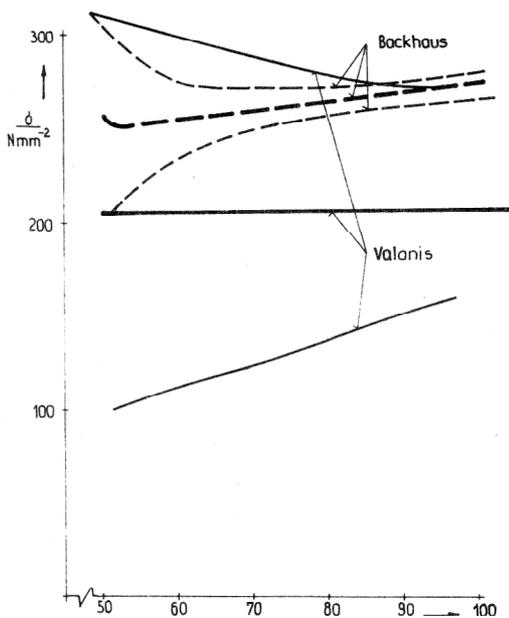
Beide Ansätze beschreiben sowohl den Bauschinger Effekt, als auch die Annäherung der Spannungsspitzen von



**Bild 2**  
Spannungs-Dehnungs-Kurve im plastischen Bereich bei einmaliger Lastumkehr



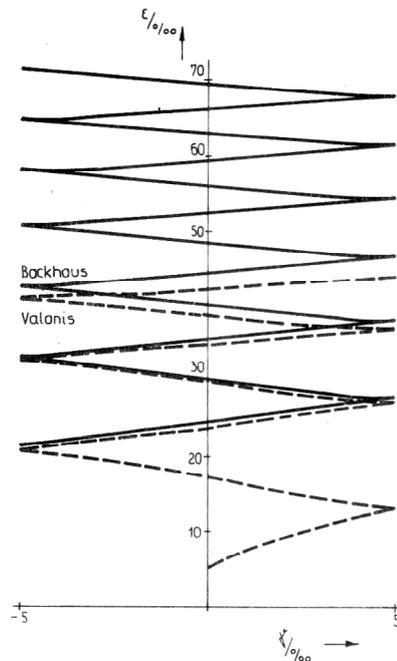
**Bild 3**  
 Spannung in Abhängigkeit von der plastischen Vergleichsdehnung bei 5 % Vordehnung mit anschließendem Lastwechseln konstanter Dehnungsamplitude  $\Delta\epsilon = 0.5\%$



**Bild 4**  
 Annäherung der Zug- und Druckspannungsspitzen bei Lastzyklen mit  $\Delta\epsilon = 0,5\%$  nach einer Vordehnung von 5 % sowie Verlauf des Mittelwertes aus Zug- und Druckspannungsspitze eines Zyklus

Zyklus zu Zyklus (Bild 3). Allerdings sind die quantitativen Unterschiede erheblich.

Ein weiterer Unterschied besteht im asymptotischen Verhalten der Spannungsspitzen. Besonders deutlich wird dieser Unterschied im Bild 4, wo der Mittelwert dieser Spannungen (die Hälfte der Summe aus maximaler Zug- und maximaler Druckspannung eines Zyklus, beginnend mit dem ersten Lastwechsel) über die Lastwechselzahl aufgetragen wurde. Während bei Valanis dieser Wert konstant ist und die Spannungsspitzen sich

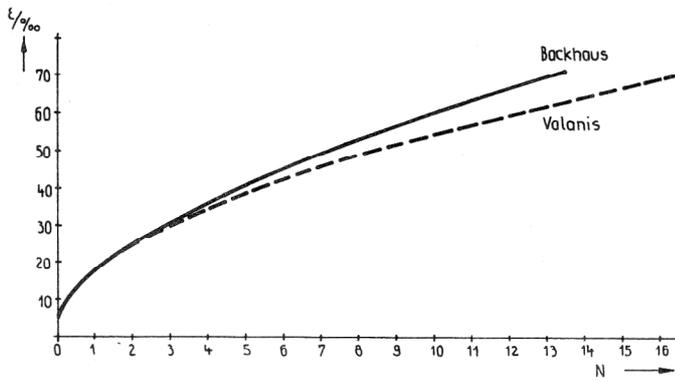


**Bild 5**  
 Anwachsen der Normaldehnung bei zyklischer Torsion im Anschluß an einen konstanten Zug

allmählich diesem Wert nähern, kommt es bei Backhaus mit wachsender Lastwechselzahl wieder zum Ansteigen der Spannungswerte.

Da dieser Effekt aber in einigen Fällen den experimentellen Ergebnissen widerspricht, führt Backhaus zwei neue Materialparameter (in neueren Arbeiten sogar Materialfunktionen) ein. Er nennt diesen Effekt zyklische Entfestigung und ordnet diese der isotropen Verfestigung zu.

Die Bilder 5 und 6 zeigen die Ergebnisse der Nachrechnung der Belastungsfolge Zug – zyklische Torsion. Wie

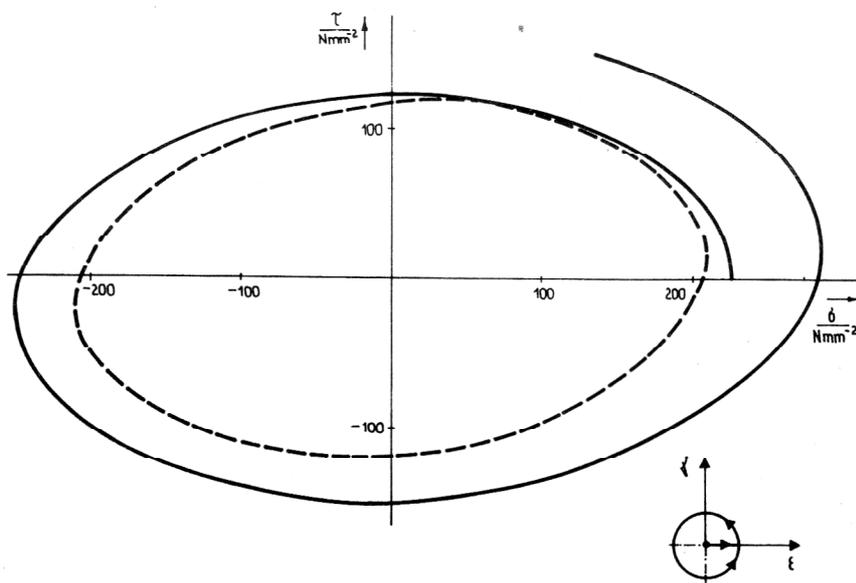


**Bild 6**  
Normaldehnungszuwachs bei zyklischer Torsion in Abhängigkeit von der Lastzyklenzahl

man sieht, ergeben beide Ansätze das gleiche qualitative Verhalten bei quantitativen Unterschieden.

Als letztes Beispiel wurde ein Prozeß stetiger Deformationsänderung nachvollzogen. Im Anschluß an eine Vordehnung wird im Raum der Dehnungen ein geschlossener Kreisweg durchfahren (vgl. Bild 7).

Der Unterschied zwischen beiden Verfestigungsansätzen, aus Bild 7 abzulesen, ist prägnant und wäre einer experimentellen Untersuchung wert.



**Bild 7**  
Änderung des Spannungszustandes ( $\sigma$  - Normalspannung,  $\tau$  - Schubspannung) beim Durchfahren eines Kreisweges im Dehnungsraum

#### LITERATUR

- [ 1 ] Göhler, W.: Numerische Integration elastisch-plastischer Deformationsgesetze mit komplizierten Verfestigungsansätzen. Dissertation A, TU Dresden, 1983.
- [ 2 ] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwertproblemen. ZAMM 58, 489 - 499, 1978.
- [ 3 ] Bergander, H.: Plastische Deformationsgesetze in differentieller Standardformulierung. ZAMM 60, 509 - 519, 1980.
- [ 4 ] Backhaus, G.: Vergleich einiger Ansätze zur Erfassung der Verformungsanisotropie und eine einfache Spannungs-Verzerrungs-Beziehung. ZAMM 56, 513 - 522, 1976.
- [ 5 ] Backhaus, G.: Fließspannungen und Fließbedingung bei zyklischen Verformungen. ZAMM 56, 337 - 348, 1976.
- [ 6 ] Valanis, K. C.: A theory of viscoplasticity without a yield surface, Part I. General theory. ARCH. MECH. 23, 517, 1971.
- [ 7 ] Valanis, K. C.: A theory of viscoplasticity without a yield surface, Part II. Application to mechanical behaviour of metals. ARCH. MECH. 23, 535, 1971.
- [ 8 ] Valanis, K. C.: Fundamental consequences of a new intrinsic time measure. Plasticity as a limit of the endochronis theory. ARCH. MECH. 32, 171 - 191, 1980.

Anschrift des Verfassers:  
Dr.-Ing. Wolfgang Göhler  
Technische Universität Dresden  
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens  
8027 Dresden  
Mommensenstraße 13