

Kompatible Übergangselemente für lokale Netzverfeinerungen bei 2D- und 3D-Finite-Elemente-Modellen

Eckhard Scholz, Johannes Altenbach

1. Einleitung

Bei Finite-Elemente-Modellen auf der Grundlage der Verschiebungsgrößenmethode ist die Berechnung hinreichend genauer Spannungen gegenwärtig mit einem sehr viel höheren Aufwand verbunden als die Berechnung der Verschiebungen, obwohl die genaue Kenntnis des Spannungszustandes für den Ingenieur in der Regel von größerer Bedeutung ist. Aufgrund der niedrigeren Konvergenzordnung der Spannungen gegenüber den Verschiebungen erfordert die Spannungsberechnung speziell in Gebieten mit hohen Spannungsgradienten, falls man die Ordnung der Elementansatzfunktionen nicht erhöht, eine wesentlich feinere Diskretisierung des Modells. Für die Genauigkeit der Lösung ist hierbei entscheidend, ob das gewählte Elementnetz entsprechend der Geometrie und den Elementabmessungen in der Lage ist, sich dem realen Lösungsverhalten anzupassen. In Gebieten mit schwach wechselnden Beanspruchungen ist eine relativ grobe Vernetzung daher meist schon in der Lage, das reale Lösungsverhalten hinreichend genau wiederzugeben und weitere Verfeinerungen würden keinen wesentlichen Genauigkeitsgewinn mehr liefern. Dagegen sollen lokale Netzverfeinerungen in Bereichen, in denen hohe Spannungsgradienten zu erwarten sind, wesentliche Verbesserungen der Lösung erbringen. Mit den konventionellen Dreiecks- und Viereckselementen lassen sich zwar lokale Netzverfeinerungen erzielen, die aber meist zu unregelmäßigen Strukturen führen und den Einsatz moderner Datengeneratoren beeinträchtigen. Beschränkt man sich auf Rechteckelemente, so führen lokale Netzverfeinerungen zu stark verzerrten Elementen, die das reale Steifigkeitsverhalten des Modells verfälschen. Es wurden daher vielfältige Anstrengungen unternommen, durch unkonventionelle Elementverknüpfungen bzw. durch die Konstruktion spezieller Koppellemente lokale Netzverfeinerungen zu realisieren ([1] bis [6]).

2. Die Realisierung lokaler Netzverfeinerungen über unkonventionell verknüpfte Elemente

Zur Veranschaulichung sollen zuerst grundsätzliche Verknüpfungsmöglichkeiten der drei in Bild 1 a) dargestellten Rechteckelemente mit 4 Knoten und linearem Verschiebungsansatz untersucht werden. Bei einer einfachen inkompatiblen Verknüpfung entsprechend Bild 1 b) treten bei der Verformung der Elemente Klaffungen bzw. Überlappungen der gemeinsamen Elementkanten auf, die zu einer Verfälschung der Lösung führen. Die in Bild 1 c) dargestellte Verknüpfungsmöglichkeit, ist mit der Elimination der Freiheitsgrade des Knotens 5 iden-

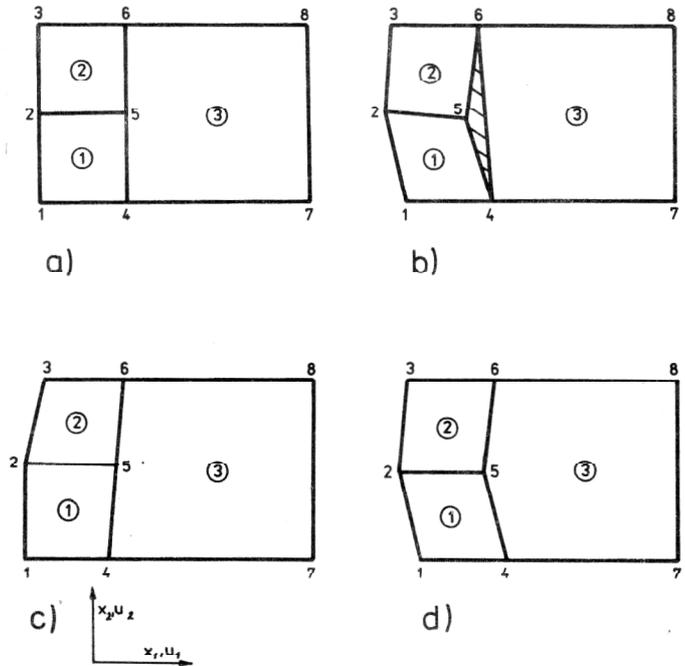


Bild 1
Möglichkeiten der Verknüpfung von Elementen:
a) FE-Struktur
b) inkompatible Verknüpfung
c) Erfüllung von Zwangsbedingungen
d) kompatible Verknüpfung

tisch und führt auf die Erfüllung der Zwangsbedingungen:

$$u_{i5} = 0,5 u_{i4} + 0,5 u_{i6} \quad (1)$$

$$i = 1, 2.$$

Welche Möglichkeiten der Erfüllung solcher Zwangsbedingungen sich anbieten, wurde in [5] ausführlich diskutiert und soll nicht Gegenstand weiterer Betrachtungen sein. Eine Verknüpfungsmöglichkeit, die die Freiheitsgrade des Knotens 5 in Bild 1 d) berücksichtigt, führt auf die Konstruktion spezieller Koppellemente und soll im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

3. Die Konstruktion spezieller Koppellemente mit stückweise definierten Ansatzfunktionen am Beispiel eines Rechteckelementes mit vier Knoten

Mit der Problematik kompatibler Verknüpfungen entsprechend Bild 1 d) befassen sich u. a. die Arbeiten [1] bis [3] und [6]. Der gemeinsame Grundgedanke dieser Arbeiten besteht in der Konstruktion spezieller Element-

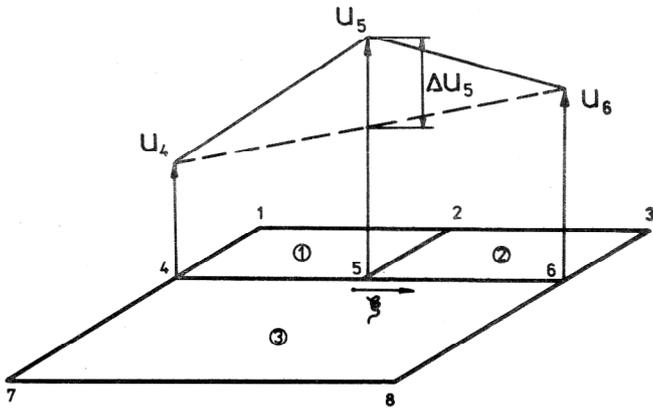


Bild 2
Verknüpfung von drei Elementen mit linearem Verschiebungsansatz

te, die über stückweise definierte Ansatzfunktionen eine solche Verknüpfung kompatibel ermöglichen. Die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Konstruktion entsprechender Ansätze soll anhand der in Bild 2 dargestellten drei Elemente mit linearem Verschiebungsansatz veranschaulicht werden. Dazu soll nur ein Freiheitsgrad senkrecht zur Elementebene betrachtet werden. Bei einem konventionellen 4-Knoten-Element ergibt sich für das Element 3 die Verschiebung am Knoten 5 zu:

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(1 - \xi) u_4 + \frac{1}{2}(1 + \xi) u_6, \quad (2)$$

wie es durch die unterbrochene Linie in Bild 2 dargestellt ist. ξ ist hierbei als eine kantenbezogene Koordinate im Intervall $-1 \leq \xi \leq +1$ zu verstehen, die am Knoten 5 den Wert Null annimmt. Läßt man den Freiheitsgrad am Knoten 5 entsprechend Bild 2 zu, so ergibt sich der Verschiebungsverlauf zu:

$$u = \frac{1}{2}(1 - \xi) u_4 + \frac{1}{2}(1 + \xi) u_6 + (1 - |\xi|) \Delta u_5. \quad (3)$$

Da ξ am Knoten 5 den Wert Null besitzt, ergibt sich speziell für den Knoten 5:

$$u_5 = \frac{1}{2} u_4 + \frac{1}{2} u_6 + \Delta u_5. \quad (4)$$

Stellt man jetzt die Gleichung (4) nach Δu_5 um und setzt (4) in (3) ein, so erhält man als endgültigen Verschiebungsansatz:

$$u = \frac{1}{2} (|\xi| - \xi) u_4 + \frac{1}{2} (|\xi| + \xi) u_6 + (1 - |\xi|) u_5. \quad (5)$$

Damit liegen die Ansätze für ein Koppellement mit 5 Knoten und stückweisem Verschiebungsansatz auf einer Seite vor.

4. Die Konstruktion ebener und räumlicher isoparametrischer Koppellemente mit quadratischen Verschiebungsansätzen

Das eben im Prinzip erläuterte Verfahren läßt sich ganz analog auf quadratische Verschiebungsansätze erweitern. Um die Leistungsfähigkeit solcher Elemente zu erproben, wurde für das Programmsystem COSAR/E84, vgl. [4] und [8], auf der Grundlage des isoparametri-

schen Scheibenelementes SRK 16 das Scheibenelement SRK 32 entwickelt, welches wahlweise über 8, 10, 12, 14 oder 16 Knoten verfügt, wobei sich die Anzahl der Knoten ausschließlich nach geometrischen Koppelerfordernissen richtet (Bild 3). Ein möglicher Verschiebungsverlauf der oberen Elementkante ist in Bild 4 dargestellt. Der ursprüngliche Verschiebungsverlauf des SRK 16 (unterbrochene Linie) läßt sich durch Gl. 6 beschreiben.

$$\bar{u} = G_1 u_1 + G_3 u_3 + G_5 u_5. \quad (6)$$

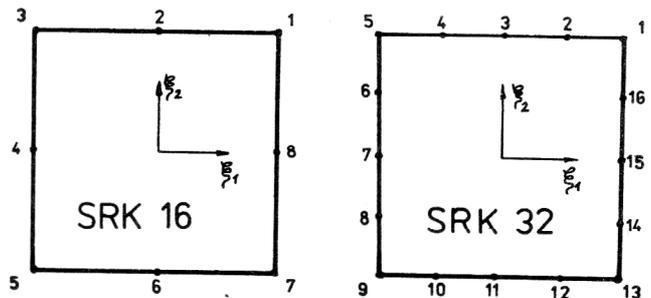


Bild 3
Isoparametrisches Scheibenelement SRK 16 und abgeleitetes Koppellement SRK 32

Hierbei ergeben sich die Ansatzfunktionen G_i zu:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{4} (1 + \xi_2) (1 + \xi_1) (\xi_2 + \xi_1 - 1) \\ G_3 &= \frac{1}{2} (1 + \xi_2) (1 - \xi_1^2) \\ G_5 &= \frac{1}{4} (1 + \xi_2) (1 - \xi_1) (\xi_2 - \xi_1 - 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Für das SRK 32 kommen jetzt die beiden zusätzlichen Ansatzfunktionen der Gl. 8 für die Freiheitsgrade der Knoten 2 und 4 hinzu.

$$\begin{aligned} G_2 &= (1 + \xi_2) (1 - \xi_1) (|\xi_1| + \xi_1) \\ G_4 &= (1 + \xi_2) (1 + \xi_1) (|\xi_1| - \xi_1) \end{aligned} \quad (8)$$

Der neue Verschiebungsverlauf ergibt sich damit zu:

$$u = G_1 u_1 + G_2 \Delta u_2 + G_3 u_3 + G_4 \Delta u_4 + G_5 u_5 \quad (9)$$

Aus der Lage der neuen Knoten bei $\xi_1 = \pm \frac{1}{2}$ resultiert damit:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{3}{8} u_1 + \frac{6}{8} u_3 - \frac{1}{8} u_5 + \Delta u_2 \\ u_4 &= -\frac{1}{8} u_1 + \frac{6}{8} u_3 + \frac{3}{8} u_5 + \Delta u_4 \end{aligned} \quad (10)$$

Das Umstellen der Gln. 10 nach Δu_2 bzw. Δu_4 und Einsetzen in Gl. 9 liefert dann den endgültigen Verschiebungsansatz dieser Elementkante entsprechend Gl. 11.

$$u = \sum_{i=1}^5 \bar{G}_i u_i \quad (11)$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{G}_1 &= G_1 - \frac{3}{8}G_2 + \frac{1}{8}G_4 & \bar{G}_2 &= G_2 \\ \bar{G}_3 &= G_3 - \frac{6}{8}(G_2 + G_4) & \bar{G}_4 &= G_4 \\ \bar{G}_5 &= G_5 - \frac{3}{8}G_4 + \frac{1}{8}G_2\end{aligned}\quad (12)$$

Beim Aufsummieren der Ansatzfunktionen (\bar{G}_i) ist zu erkennen, daß sich die Funktionen G_2 und G_4 herausheben, so daß je nach den entsprechenden Koppelerfordernissen auf den ursprünglichen Verschiebungsansatz des SRK 16 reduziert werden kann (Bild 4). In analoger Weise wurden für das Programmsystem COSAR/E 84 drei räumliche Koppellemente entwickelt, die in Bild 5 dargestellt sind. Als Basiselement für diese dreidimensio-

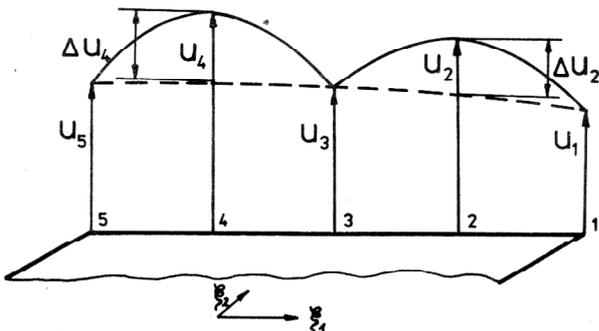


Bild 4
Verschiebungsverlauf an einer Elementkante des SRK 32

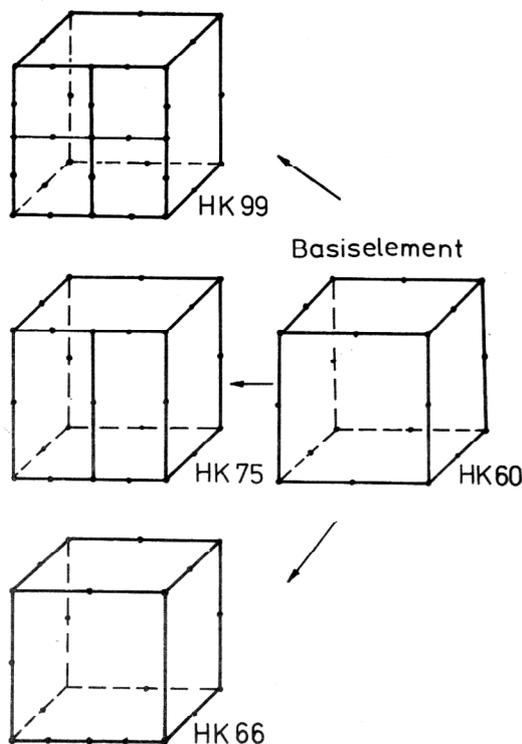


Bild 5
Räumliche Koppellemente des Programmsystems COSAR/E 84

nalen Koppellemente dient das Hexaederelement HK 60. Aus diesem Element lassen sich in gleicher Weise wie aus dem SRK 16 die drei vorgestellten Elemente entwickeln. Das HK 99 ermöglicht den kompatiblen Anschluß von vier Hexaederelementen an eine Elementfläche und das HK 75 gestattet es, zwei Hexaederelemente an eine Fläche anzukoppeln. Das HK 66 ergibt sich mit Notwendigkeit bei der Verwendung des HK 99 und des HK 75, wie später anhand des Bildes 14 a) deutlich wird. Da die Ableitung der Ansatzfunktionen in genau der gleichen Weise erfolgt, wie beim SRK 32, soll auf detailliertere Ausführungen verzichtet werden. Bei allen vorgestellten Elementen handelt es sich um vollkompatible, isoparametrische Elemente mit quadratischen bzw. stückweise quadratischen Verschiebungsansätzen. Derartige Koppellemente lassen sich problemlos in vorhandene Programme einarbeiten. Die einzige Abweichung ergibt sich aus den nur stückweise differenzierbaren Ansatzfunktionen, die die allgemein übliche Gauß-Integration über das gesamte Element erschweren. Am zweckmäßigsten führt man eine Koordinatentransformation durch. Für das ebene Koppellement (Bild 3) gelten hierfür die Gln. 13.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{1}{2}(z_1 + 1) \quad \text{für } \xi_1 > 0, \quad i = 1, 2 \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(z_2 + 1) \\ \xi_1 &= \frac{1}{2}(z_3 - 1) \quad \text{für } \xi_1 < 0, \quad i = 1, 2 \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}(z_4 - 1)\end{aligned}\quad (13)$$

Die Integration einer Funktion $F(\xi_1, \xi_2)$ über die Fläche $-1 \leq \xi_i \leq +1, i = 1, 2$, kann dann wie folgt aufgespalten werden.

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F\left(\frac{1}{2}(z_3 - 1), \frac{1}{2}(z_4 - 1)\right) dz_3 dz_4 \right. \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F\left(\frac{1}{2}(z_3 - 1), \frac{1}{2}(z_2 + 1)\right) dz_3 dz_2 \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F\left(\frac{1}{2}(z_1 + 1), \frac{1}{2}(z_4 - 1)\right) dz_1 dz_4 \\ &\quad \left. + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F\left(\frac{1}{2}(z_1 + 1), \frac{1}{2}(z_2 + 1)\right) dz_1 dz_2 \right] \quad (14)\end{aligned}$$

Es kann jetzt die Gauß-Integration auf die entstandenen vier Einheitsquadrate unverändert angewendet werden. Zur Verdeutlichung der Notwendigkeit dieser Transformation sollen die Formfunktionen G_2 und G_4 über die Elementkante im Bereich von $-1 \leq \xi_1 \leq +1$ integriert werden.

$$G_i = f(\xi_2) \begin{cases} \left[(1 - \xi_1)(|\xi_1 + \xi_1|) \right] & \xi_1 \geq 0 \\ \left[(1 - \xi_1^2) - \frac{6}{8} \left\{ \begin{matrix} (1 + \xi_1)(|\xi_1 - \xi_1|) \\ (1 + \xi_1)(|\xi_1 - \xi_1|) \end{matrix} \right\} \right] & \xi_1 \leq 0 \end{cases}$$

Integrationsstyp	Anzahl der Gaußpunkte	$\int_{-1}^{+1} G_{2i} d\eta$	Δ in %
exakt	-	0,833333	0,0
Gauß-Integration (geschlossen)	3	1,042338	+25,0
	4	0,769531	- 7,7
	5	0,916058	+ 9,9
	6	0,803493	- 3,6
	7	0,877525	+ 5,3
	8	0,816042	- 2,1
	9	0,960799	+ 3,3
Gauß-Integration (stückweise)	1	0,750000	-10,0
	2	0,833333	0,0
	3	0,833333	0,0

Bild 6
Ergebnisvergleich verschiedener Varianten der Gauß-Integration entlang einer Elementkante mit stückweise definierter Ansatzfunktion

Unter Vernachlässigung des Faktors $f(\xi_2)$, der im betrachteten Intervall als konstant angesehen werden kann, ergeben sich die in Bild 6 dargestellten Werte. Die Ergebnisse belegen anschaulich die deutliche Überlegenheit der stückweise durchgeführten Integration gegenüber einer herkömmlichen Gauß-Integration höherer Ordnung. Die Vorgehensweise für die räumlichen Koppellemente nach Bild 5 ist analog. Gl. 15 beschreibt die Koordinatentransformation in 8 Einheitswürfel.

$$\xi_1 = \frac{1}{2} (z_1 + 1)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} (z_2 + 1) \quad \text{für } \xi_i > 0, i = 1, 2, 3$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} (z_3 + 1)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} (z_4 - 1)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} (z_5 - 1) \quad \text{für } \xi_i < 0, i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

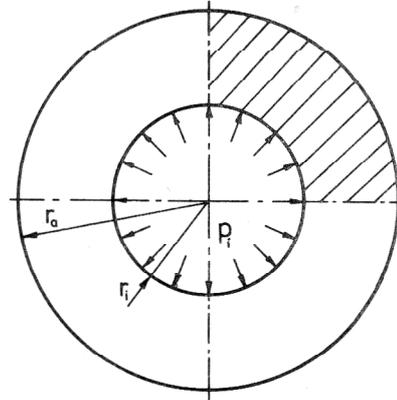
$$\xi_3 = \frac{1}{2} (z_6 - 1)$$

5. Numerische Tests

Um die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Elemente zu verdeutlichen, wurden Testbeispiele ausgewählt, zu denen eine analytische Lösung vorliegt.

Als erstes Beispiel wurde mit ebenen Scheibenelementen eine Kreisringscheibe unter Innendruck (Bild 7) berechnet. Aus Symmetriegründen wurde dabei lediglich eine Viertelscheibe vernetzt.

Um einen Vergleich des Aufwandes zur Ergebnisgüte zu ermöglichen, wurden die vier in Bild 8 dargestellten Varianten berechnet. Variante 1 und 2 sind konventionelle Vernetzungen mit dem Scheibenelement SRK 16. Bei der Variante 3 wurde das vorgestellte Koppellement SRK 32 verwendet. Variante 4 wurde mit Hilfe einer Zwangsbedingungskoppelung realisiert, wobei die Freiheitsgrade der gekreuzt gezeichneten Knoten eli-



$$r = 50 \text{ mm}$$

$$r = 100 \text{ mm}$$

$$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$p_i = 200 \text{ N/mm}^2$$

Bild 7
Kreisringscheibe unter Innendruck (1. Testbeispiel)

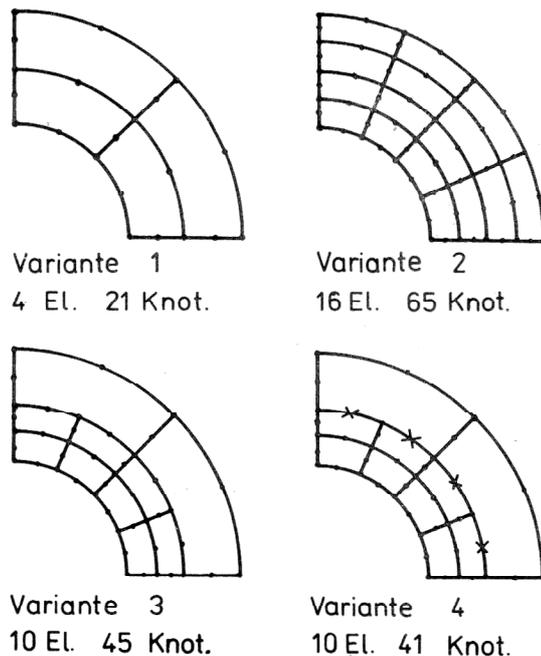


Bild 8
Vernetzungsmodelle für die Kreisringscheibe

miniert werden. Als Bewertungskriterium wurde der prozentuale Fehler zur analytisch ermittelten Ringspannung herangezogen. In Bild 9 ist der prozentuale Fehler der Ringspannung über einen Radialschnitt (horizontale Außenkante des Modells) dargestellt. Wie zu erwarten, fällt der Fehler bei den herkömmlichen Varianten 1 und 2 vom Innenrand mit dem höchsten Spannungsgradienten nach außen hin ab, wobei die für diese Elemente typische Oszillation des Fehlers zwischen Eck- und Seitenmittenknoten auftritt. Die Verwendung der Koppellemente, die eine lokale Netzver-

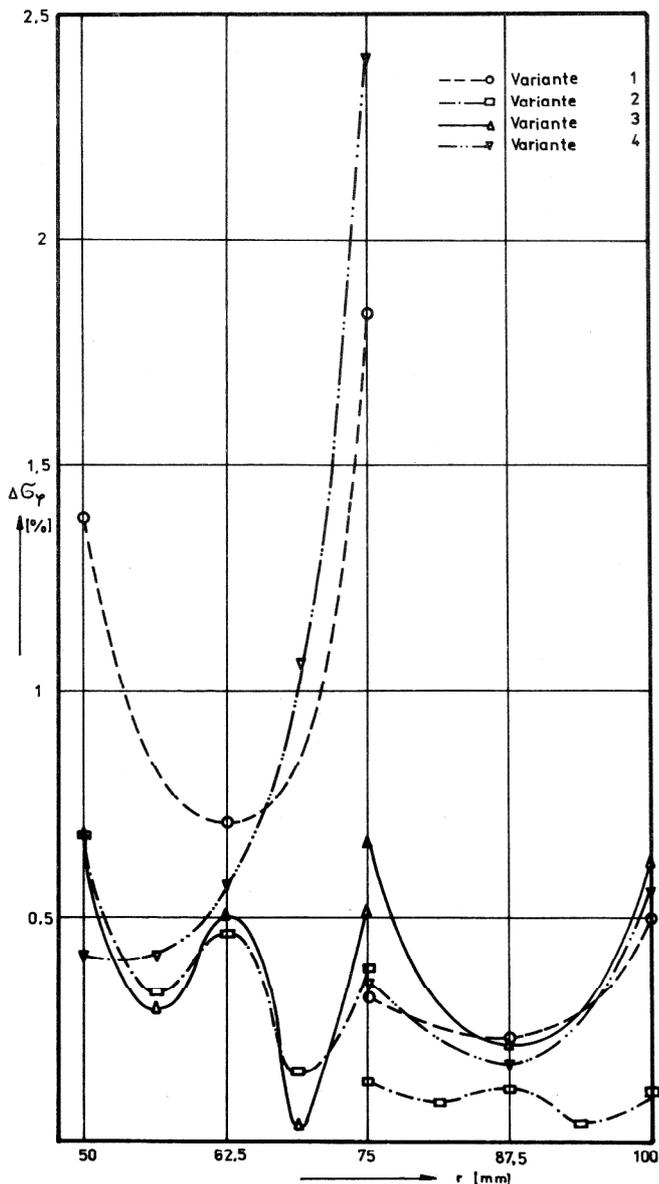
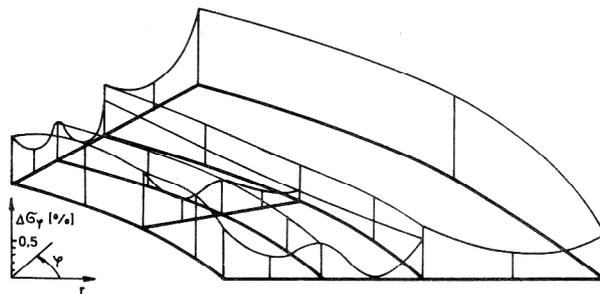


Bild 9
Prozentualer Fehler der Ringspannung der Kreisringscheibe (Radialschnitt)

feinerung des Innenbereiches ermöglicht, senkt den Fehler in diesem Bereich deutlich ab. Der Fehler liegt jetzt im Bereich des Fehlers der Variante 2, obwohl der Aufwand deutlich geringer ist. Der im Koppelbereich auftretende Spannungssprung ist ebenfalls relativ klein. Demgegenüber zeigt die Zwangsbedingungskoppelung im Koppelbereich ein außerordentlich schlechtes Verhalten, welches zum Innenrand hin abklingt, eine gesicherte Aussage über den Koppelbereich jedoch nicht ermöglicht. In Bild 10 ist noch einmal der prozentuale Fehler der Ringspannung der Varianten 3 und 4 über dem gesamten Netz aufgetragen. Dabei wird das ausgeglichene Verhalten der kompatiblen Koppelung gegenüber der Zwangsbedingungskoppelung besonders deutlich. Eine ebenfalls durchgeführte Berechnung der Variante 4, bei der auf die Erfüllung der Zwangsbedingung verzichtet wurde, d. h., die Elemente wurden inkompatibel vernetzt, ergab Fehlergrößen von über 40 % im Koppelbereich.

Variante 3



Variante 4

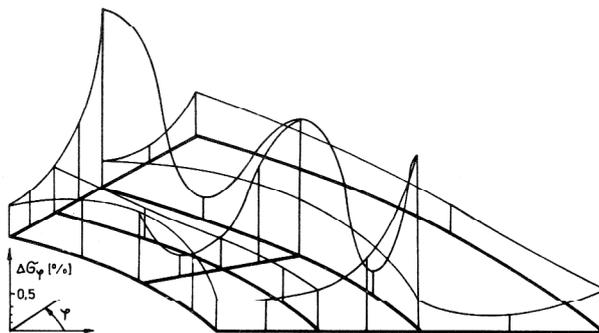


Bild 10
Prozentualer Fehler der Ringspannung der Kreisringscheibe (Viertelscheibe)
a) kompatible Koppelung mit SRK 32
b) Zwangsbedingungskoppelung nach [5]

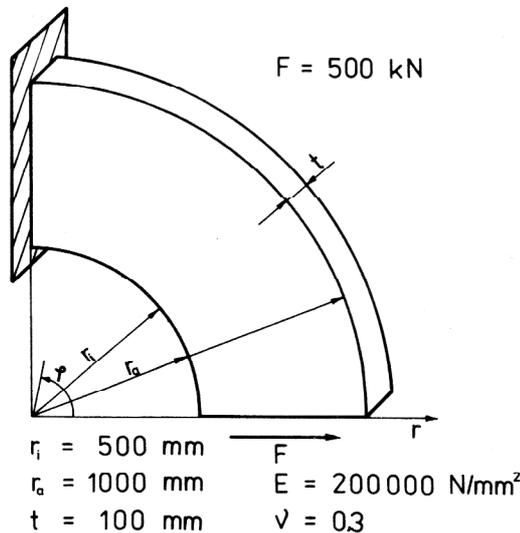
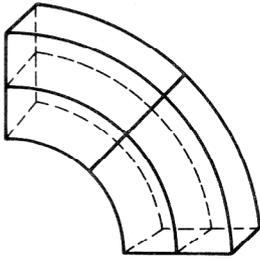


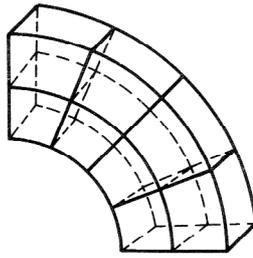
Bild 11
Kreisbogenträger unter Querkraftbelastung (2. Testbeispiel)

Als zweites Testbeispiel wurde ein Kreisbogenträger unter Querkraftbelastung entsprechend Bild 11 berechnet. Die analytische Vergleichslösung wurde [9] entnommen. Der Träger wurde an der Einspannstelle in Radius- und Dickenrichtung verschieblich gelagert und es wurden lediglich die Starrkörperverschiebungen verhindert. Die drei berechneten Varianten sind in Bild 12 dargestellt und zeigen einen möglichen Einsatz des dreidimen-

Variante 1
4 El. 51 Knot.



Variante 2
8 El. 89 Knot.



Variante 3
10 El. 108 Knot.

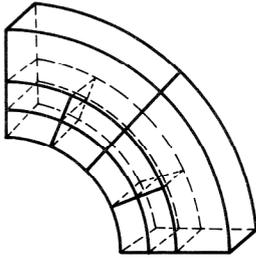
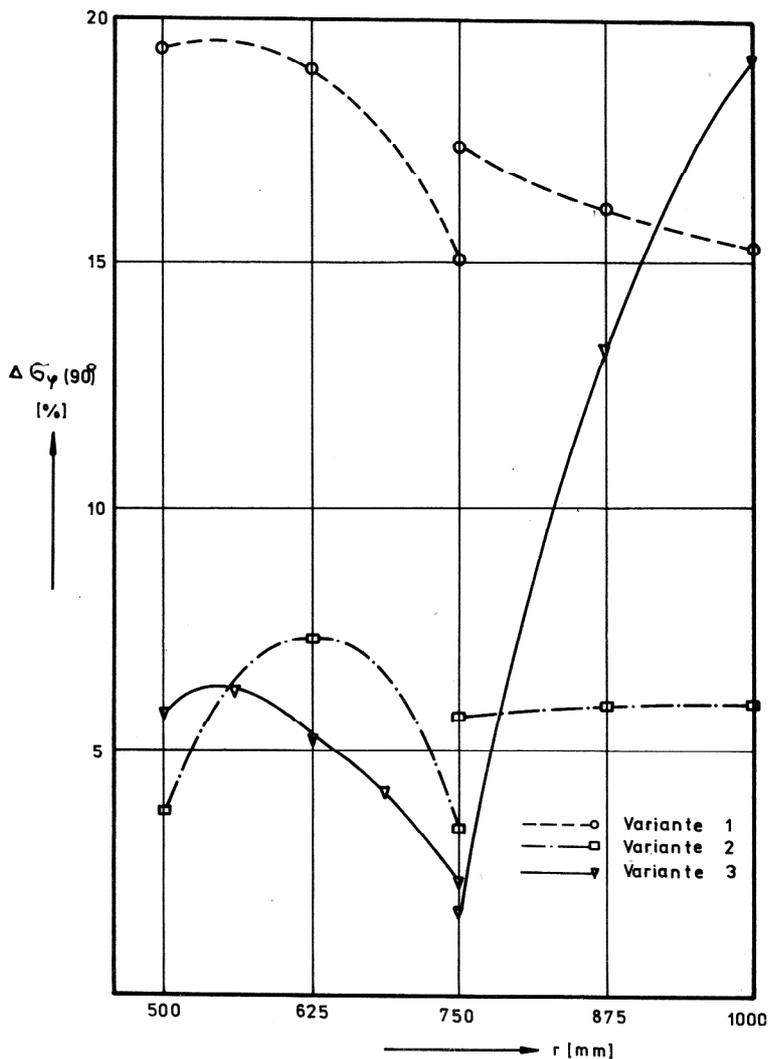
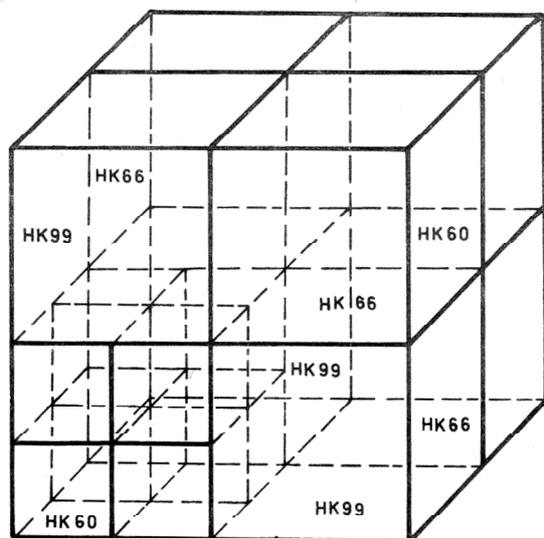


Bild 12
Vernetzungsmodelle zum Kreisbogenträger

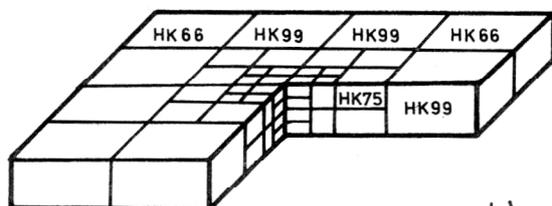
sionalen Koppellementes HK 75. Zur Auswertung wurde der prozentuale Fehler der Biegespannungen am Einspannquerschnitt betrachtet. Bild 13 zeigt die grafische Darstellung des Fehlers anhand eines Radialschnittes an der Außenkante der Struktur. Es zeigt sich eine ähnliche Spezifik des Fehlers wie beim ebenen Beispiel der Kreisringscheibe. Der Einsatz der Koppellemente verbessert das Ergebnis am Innenrand gegenüber der Variante 1 beträchtlich. Die Lösungsqualität in der Umgebung des Koppelgebietes ist sehr gut, was auch anhand des kleinen Spannungssprunges am Übergang der Vernetzungen deutlich wird. Der Anstieg des Fehlers am Außenrand ist auf die dort vorhandene grobe Vernetzung zurückzuführen, die sich bei diesem Beispiel aufgrund der Biegebeanspruchung wesentlich störender auswirkt, als beim Beispiel der Kreisringscheibe. Wie die Variante 2 zeigt, ist die Verfeinerung in φ -Richtung hier von entscheidendem Einfluß. Die Ergebnisse der Tests belegen anschaulich, wie ein sinnvoller Einsatz der Koppellemente wesentlich zu lokalen Lösungsverbesserungen beitragen kann.

Bild 13
Prozentualer Fehler der Biegespannung am Einspannquerschnitt des Kreisbogenträgers (Radialschnitt)





a)



b)

Bild 14
Vernetzungsmöglichkeiten bei der Verwendung der vorgestellten dreidimensionalen Koppellemente

6. Zusammenfassung

Wie die Ausführungen des vorliegenden Beitrages zeigen, ist die Konstruktion und Implementierung der vorgestellten Koppellemente in vorhandene Programme relativ einfach möglich und ohne großen Mehraufwand durchführbar, da die entsprechenden Basiselemente meist schon vorhanden sind und darauf aufgebaut werden kann. Mit Hilfe dieser Elemente sind lokale Netzverfeinerungen in Gebieten mit hohen Spannungsgradienten wesentlich einfacher und mit günstigeren Elementseitenverhältnissen realisierbar als mit Standardelementen, wobei die Einsatzmöglichkeiten moderner Datengeneratoren verbessert werden, da regelmäßige Strukturen begünstigt sind. In Bild 14 sind noch einmal mögliche Vernetzungsgeometrien dargestellt, die die Verwendungsmöglichkeiten der vorgestellten 3D-Elemente veranschaulichen. Bild 14 a) zeigt die lokale Verfeinerung der Ecke eines Quaders, die auch mehrstufig ohne Probleme durchführbar ist und in Bild 14 b) ist die lokale Verfeinerung einer Ecke dargestellt. Die Koppelungsmöglichkeiten über Verschiebungszwangsbedingungen, wie sie in [5] vorgestellt wurden, ermöglichten zwar gute lokale Verfeinerungen mit einer geringen Zahl an Freiheitsgraden, führten aber insbesondere bei der Spannungsberechnung im Koppelbereich zu Verfälschungen der Lösung, die sichere Aussagen über diesen Bereich nicht ermöglichen. Eine Koppelung über die vorgestellten speziellen Koppellemente zeigt im Koppelgebiet ein wesentlich günstigeres Verhalten, da aufgrund der höheren Flexibili-

tät speziell in diesem Bereich eine bessere Anpassung an die Lösung möglich wird. Die guten Erfahrungen bei der Verwendung dieser Elemente, bei verhältnismäßig geringem Aufwand lassen ihre Anwendung als empfehlenswert erscheinen.

LITERATUR

- [1] Gupta, A. K.: A finite element for transition from a fine to a coarse grid. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 12, 34 – 45 (1978).
- [2] Cavendish, J. C.: Local mesh refinements using rectangular blended finite elements. *J. of. Comp. Physics* 19, 211 – 228 (1975).
- [3] Birkhoff, G.; Cavendish, J. C.; Gordon, W. J.: Multivariate approximation by locally blended univariate interpolants. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* Vol. 71, No. 9, pp. 3423 – 3425, Sept. 1974.
- [4] Autorenkollektiv: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.
- [5] Gabbert, U.: Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in der FEM mittels der Penalty-Funktion-Methode. *Techn. Mech.* (1983) Heft 2.
- [6] Röhr, U.: Zur Kombination halbanalytischer und finiter Elemente für die elastostatische Berechnung schiffbaulicher Plattenstrukturen. Dissertation A, WPU Rostock 1983.
- [7] Berger, H.: Beitrag zur Spannungsberechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente auf der Grundlage von dreidimensionalen Verschiebungsmodellen. Dissertation A, TH Magdeburg 1982.
- [8] Nutzerhandbuch COSAR/E84, TH Magdeburg, Sektion Maschinenbau, Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik, 1984.
- [9] Autorenkollektiv: Lehrbuch Höhere Festigkeit Band 1. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979.

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. Eckhard Scholz
Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach
Technische Hochschule „Otto von Guericke“
3010 Magdeburg
PSF 124