

Zur Theorie der Struktur homogener isotroper Turbulenz

W. Szablewski

Hinsichtlich der Struktur turbulenter Strömungen stellt homogene isotrope Turbulenz derzeit immer noch ein aktuelles Thema dar.

In der vorliegenden ersten Mitteilung wird über erzielte Fortschritte zur Thematik **Spektrum der Turbulenzenergie und Geschwindigkeitskorrelationen** zusammenfassend und in Ergänzung berichtet.

I. Spektrum der Turbulenzenergie

A. Dreidimensionales Spektrum

Die Frequenzanalyse turbulenter Strömungen ergibt ein kontinuierliches Spektrum der mittleren Turbulenzenergie der Masseneinheit

$$\frac{u_i' u_i'}{2} = \int_0^{\infty} E(k) dk, \quad k [m^{-1}] \text{ Wellenzahl.}$$

Die reziproken Wellenzahlen k^{-1} sind dabei als charakteristisches Längenmaß der in der turbulenten Strömung enthaltenen Turbulenzelemente, auch Wirbel (eddies) genannt, aufzufassen.

Aus den Navier-Stokesschen Gleichungen gewinnt man über die Zweipunkt-Korrelationen der Geschwindigkeitsschwankungen mittels Fourieranalyse für das Spektrum $E(k)$ über der Wellenzahl k die Gleichung

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} = -\frac{\partial S(k)}{\partial k} - 2\nu k^2 E(k) \quad (1)$$

($\nu [m^2 s^{-1}]$ kinematische Zähigkeit)

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k) dk = -S(k) - 2\nu \int_0^k k^2 E(k) dk. \quad (2)$$

Hier bezeichnet $S(k)$, Transformierte der nichtlinearen Glieder der Trägheitskräfte, symbolisch den Transfer kinetischer Energie durch Bildung von Wirbeln $> k$ (sog. **Kaskadenprozeß**).

Da der Verlust kinetischer Energie letztlich aus der Reibung resultiert, haben wir für $S(k)$ die Randbedingung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = 0.$$

a) Trägheitsunterbereich

Das dynamische Verhalten der Turbulenzelemente wird durch die Reynoldssche Zahl

$$Re_k = \frac{\sqrt{E(k)/k}}{\nu}$$

bestimmt. Nach Messungen ist Re_k im wesentlichen Teil des Spektrums um so kleiner, je größer k ist.

Bei großem Re_k ist nun der Einfluß der Zähigkeit auf die Dynamik unwesentlich. Die Dissipation kinetischer Energie in Wärme, der die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen unterliegen, findet überwiegend in den kleinen Wirbeln mit kleinem Re_k statt und resultiert im Bilde Prandtlischer Vorstellungen aus dem Stokesschen Widerstandsgesetz. Dagegen führen die großen Wirbel mit großem Re_k entsprechend dem mit Wirbelbildung verbundenen Formwiderstand (quadratisches Widerstandsgesetz) zur Bildung von Wirbeln kleineren Längenmaßes.

Wir können demnach bei großem Re_{k_0} , wo k_0 die Wellenzahl der großen Wirbel bezeichnet, im Spektrum zunächst einen Trägheitsbereich (inertial range) mit vernachlässigbarem Einfluß der Reibungskräfte abgrenzen gegen einen Zähigkeitsbereich (viscous range) mit merkbarem Einfluß der Reibungskräfte. Mit wachsender Reynoldsscher Zahl Re_{k_0} wird dabei der Zähigkeitsbereich des Spektrums, dessen Breite im Rahmen der Kontinuumsmechanik eine endliche Schranke gesetzt ist, immer mehr eingeengt.

Bei hinreichend großem Re_{k_0} wird es dann im Trägheitsbereich einen an den Zähigkeitsbereich grenzenden Unterbereich (inertial subrange) $k \gg k_0$ geben, in welchem

1. Unabhängigkeit von den äußeren Bedingungen bzw. von den großen Wirbeln k_0 angenommen werden kann.
2. der Transfer kinetischer Energie hier

$$S(k) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k E(k) dk \approx -\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} E(k) dk = \epsilon \quad (3)$$

($\epsilon [m^2 s^{-3}]$ Dissipation der Turbulenzenergie) gesetzt werden kann.

In diesem Unterbereich ist dann nach Kolmogorov [1] die Spektralfunktion $E(k)$ als durch die Dissipation ϵ und die Wellenzahl k determiniert anzusehen. Es folgt dimensionsanalytisch

$$E(k) \approx \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (4)$$

bzw.

$E(k) = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$ für $k \rightarrow \infty$ im Trägheitsunterbereich mit der dimensionslosen empirischen Konstante α , die als universelle Konstante anzusehen ist. Nach Messungen beträgt

$$\alpha \approx 1,6$$

und ist – wie bemerkt werde – **alleiniges empirisches Element** der vorliegenden Theorie.

Das $k^{-5/3}$ = Gesetz des Trägheitsunterbereichs ist durch zahlreiche Messungen bestätigt worden und stellt einen sicheren Bestandteil der Theorie homogener isotroper Turbulenz dar.

Als wichtige Folgerung [2] ergibt sich aus (4) mit $S(k) \approx \epsilon$ nach (3)

$$S(k) \approx \alpha^{-3/2} E(k)^{3/2} k^{5/2} \quad (6)$$

im Trägheitsunterbereich.

(4) und (6) stellen also äquivalente Formen dar.

Die Formulierung (6) für den Transfer kinematischer Energie wurde bereits im Jahre 1948 von Kovaszny [3] als hypothetischer Ansatz vorgeschlagen. Er findet hier nunmehr gegenüber anderen hypothetischen Ansätzen (z. B. Obuchow, v. Kármán, Heisenberg u. a.) eine Bestätigung.

b) Universeller Bereich

Im Zähigkeitsbereich tritt als weitere physikalische Einflußgröße die kinematische Zähigkeit ν und damit neben $1/k$ die weitere determinierende Länge $(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ auf.

Dimensionsanalytisch erhält man dann bei Fortsetzung von (4) in den Zähigkeitsbereich und damit für den sogenannten „universellen“ Bereich $k \gg k_0$ nach Kolmogorov

$$E(k) = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3} f(k \nu^{3/4} / \epsilon^{1/4})$$

mit der bei der Dimensionsanalysis unbestimmt bleibenden Funktion f .

Führen wir die dimensionslosen Größen

$$\tilde{k} = k(\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \quad \tilde{E}(\tilde{k}) = E(k)(\epsilon \nu^5)^{-1/4} \quad (7)$$

ein, so erhalten wir demnach für den universellen Bereich nach Kolmogorov

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = \alpha \tilde{k}^{-5/3} f(\tilde{k}). \quad (8)$$

Für den Transfer kinetischer Energie erhält man entspr. nach (6)

$$\tilde{S}(\tilde{k}) (\equiv S(k)/\epsilon) = \alpha^{-3/2} \tilde{E}(\tilde{k})^{3/2} \tilde{k}^{5/2} f_1(\tilde{k}). \quad (9)$$

Für $\tilde{E}(\tilde{k})$ nimmt Gl. (1) unter Beachtung von

$$\left. \frac{\partial \tilde{E}(\tilde{k})}{\partial t} \right|_k = \frac{d\tilde{E}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} \frac{d\tilde{k}}{dt} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} \tilde{k} \frac{d\tilde{E}(\tilde{k})}{d\tilde{k}}$$

die Form an [2; b]

$$\begin{aligned} & \frac{\nu^{1/2}}{4} \frac{1}{\epsilon^{3/2}} \frac{d\epsilon}{dt} \left(-\tilde{k} \frac{d\tilde{E}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} + E(\tilde{k}) \right) \\ &= -\frac{d\tilde{S}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} - 2\tilde{k}^2 \tilde{E}(\tilde{k}). \end{aligned} \quad (10)$$

Hier muß im universellen Bereich

$$\frac{\nu^{1/2}}{4} \frac{1}{\epsilon^{3/2}} \frac{d\epsilon}{dt} = -a$$

sein, wo $a > 0$ eine dimensionslose Konstante ist. Es folgt für die Dissipation kinetischer Energie in Wärme

$$\epsilon = \frac{1}{4} \frac{\nu}{a^2} \frac{1}{t^2} \quad (11)$$

und damit – bei Nullsetzen der Integrationskonstante – für das zeitliche Abklingen der Turbulenzenergie im Frühstadium (große Reynoldssche Zahl Re_{k_0})

$$\frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} = \frac{1}{4} \frac{\nu}{a^2} \frac{1}{t} \quad (12)$$

Diese Gesetzmäßigkeit ist durch Messungen [4] bei relativ großer Reynoldsscher Zahl $Re_\lambda = 280$ als bestätigt anzusehen.

Mit der turbulenten Reynoldszahl

$$Re_\lambda = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}} \lambda}{\nu} = \sqrt{15} \frac{\overline{u'^2}}{(\epsilon \nu)^{1/2}} \quad (\overline{u'^2} = \overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2}) \quad (13)$$

$$(\lambda = (\frac{15 \nu \overline{u'^2}}{\epsilon})^{1/2} \text{ Taylorsche Mikrolänge}),$$

die eine Modellkonstante darstellt, steht a in der Beziehung

$$a = \sqrt{5/3} Re_\lambda^{-1} = \frac{1}{3} \frac{(\epsilon \nu)^{1/2}}{\overline{u'^2}}.$$

Es ist anzumerken, daß das zeitliche Abklingen der Turbulenzenergie gemäß (12) gebunden ist an die Existenz eines universellen Bereiches $k \gg k_0$. Mit ständig fortschreitendem zeitlichen Abklingen von $u_i' u_i'/2$ und damit kleiner werdenden Reynoldsschen Zahlen Re_k erfährt der Einfluß der Zähigkeit immer weitere Bereiche des Spektrums, so daß schließlich die Existenz eines universellen Bereiches aufgehoben wird. Es sind dann andere Gesetzmäßigkeiten zu erwarten; vgl. z. B. Ling, Huang [5].

Die definite mathematische Formulierung des Energietransfers im universellen Bereich steht noch aus und stellt ein Hauptproblem der Forschung dar. Vorliegende hypothetische Ansätze, z. B. der Ansatz von Pao [6], weisen drastische Abweichungen von gemessenen höheren Momenten $\tilde{k}_1^n \tilde{E}_{11}(\tilde{k}_1)$ des eindimensionalen Spektrums $\int_0^\infty E_{11}(k_1) dk_1$ (Abschn. B) auf.

Eine Aussage ist jedoch für die Asymptote ($\tilde{k} \rightarrow \infty$) möglich. Hier ist mit $Re_k \rightarrow 0$ in der Bilanz der Turbulenzenergie der aus den nichtlinearen Trägheitsgliedern resultierende Energietransfer gegenüber der viskosen Dissipation als vernachlässigbar anzusehen. Wir haben es dann nach (10) mit der Gleichung

$$a \left(\tilde{k} \frac{d\tilde{E}(\tilde{k})}{d\tilde{k}} - \tilde{E}(\tilde{k}) \right) = -2\tilde{k}^2 \tilde{E}(\tilde{k}) \quad (15)$$

zu tun, aus der folgt

$$\tilde{E}(\tilde{k}) \sim \tilde{k} e^{-\tilde{k}^2/a}$$

bzw.

$$\tilde{E}(\tilde{k}) \sim \tilde{k} e^{-\sqrt{3/5} Re_\lambda \tilde{k}^2} \quad (16)$$

Würde $\frac{-d\tilde{S}(\tilde{k})/d\tilde{k}}{2\tilde{k}^2 \tilde{E}(\tilde{k})} \rightarrow \gamma$ für $\tilde{k} \rightarrow \infty$,

so müßte die Konstante $0 \leq \gamma < 1$ sein; und man erhielte

$$\tilde{E}(\tilde{k}) \sim \tilde{k} e^{-(1-\gamma)\tilde{k}^2/a} \quad (17)$$

c) Trägheitsbereich $k \gg k_0$ [2 b], [7]

Für den Energietransfer $S(k)$ ergibt Dimensionsanalyse hier (unabhängig von der Existenz eines Trägheitsunterbereiches bzw. der Forderung $S \approx \epsilon$)

$$S(k) = \alpha^{-3/2} E(k)^{3/2} k^{5/2}; \quad (18)$$

denn $E(k)$ und $S(k)$ bedingen einander und im Trägheitsbereich $k \gg k_0$ steht nur die Länge $1/k$ zur Verfügung.

Für $S(k) \approx \epsilon$ erhält man dann aus (18) wieder das Kolmogorovsche Gesetz

$$E(k) \approx \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}.$$

Setzt man (18) in (1) ein, so wird die spektrale Verteilung $E(k)$ im genannten Bereich durch die Gleichung

$$\frac{\partial E(k)}{\partial t} + \frac{3}{2} \alpha^{-3/2} k^{5/2} E(k)^{1/2} \frac{\partial E(k)}{\partial k} = -\frac{5}{2} \alpha^{-3/2} k^{3/2} E(k)^{3/2} \quad (19)$$

beschrieben. Gl. (19) stellt eine quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung dar. Das zugeordnete charakteristische System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{1} = \frac{dk}{(3/2) \alpha^{-3/2} k^{5/2} E(k)^{1/2}} = -\frac{dE(k)}{(5/2) \alpha^{-3/2} k^{3/2} E(k)^{3/2}} \quad (20)$$

ergibt mit den Integralen

$$E(k) k^{5/3} = c_1; \quad t + \alpha^{3/2} E(k)^{-1/2} k^{-3/2} = c_2 \quad (21)$$

die allgemeine Lösung

$$E(k) = k^{-5/3} g(t + \alpha^{3/2} E(k)^{-1/2} k^{-3/2}), \quad (22)$$

wo g zunächst eine unbestimmte Funktion ist. Es ist zu fordern (vgl. (5)), daß für $k \rightarrow \infty$

bzw. $S \rightarrow \epsilon$

$$E(k) = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3},$$

nach (11)

$$E(k) = \alpha \left(\frac{1}{4} \frac{\nu}{a^2} \right)^{2/3} t^{-4/3} k^{-5/3}. \quad (23)$$

Erfüllung dieser Randbedingung bestimmt dann g zu

$$g(t + \alpha^{3/2} E(k)^{-1/2} k^{-3/2})$$

$$= \alpha \left(\frac{1}{4} \frac{\nu}{a^2} \right)^{2/3} (t + \alpha^{3/2} E(k)^{-1/2} k^{-3/2})^{-4/3}. \quad (24)$$

Eliminieren wir wieder t mit Hilfe von (11), so erhalten wir für das Spektrum $E(k)$ im Trägheitsbereich $k \gg k_0$

$$E(k) = \frac{\alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}}{[1 + 2 \alpha^{3/2} a (\epsilon/\nu)^{1/2} k^{-3/2} E(k)^{-1/2}]^{4/3}}; \quad (25)$$

in dimensionsloser Form und mit (14)

$$\tilde{E}(\tilde{k}) = \frac{\alpha \tilde{k}^{-5/3}}{[1 + 2 \sqrt{5/3} \alpha^{3/2} \text{Re}_\lambda^{-1} \tilde{k}^{-3/2} \tilde{E}(\tilde{k})^{-1/2}]^{4/3}} \quad (26)$$

Führen wir hier die Variablen

$$k_* = \tilde{k} M^{-3/2}, \quad E_* = \tilde{E}(\tilde{k}) M^{5/2} / \alpha \quad (27)$$

$$(M = 2 \alpha \sqrt{5/3} \text{Re}_\lambda^{-1} = \frac{2}{3} \alpha \frac{(\epsilon \nu)^{1/2}}{u^2})$$

ein, so folgt aus (26) mit

$$\psi = \alpha^{-1} \tilde{k}^{5/3} \tilde{E}(\tilde{k}), \quad 0 \leq \psi < 1 \quad (28)$$

in Parameterdarstellung das Ähnlichkeitsgesetz der spektralen Verteilung der Turbulenzenergie im Trägheitsbereich $k \gg k_0$

$$k_* = \frac{\psi^{3/8}}{(1 - \psi^{3/4})^{3/2}}, \quad E_* = \psi^{3/8} (1 - \psi^{3/4})^{5/2};$$

bzw. mit

$$x = \psi^{3/4} \quad (29)$$

$$k_* = \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}, \quad E_* = \sqrt{x} (1-x)^{5/2} \quad (0 \leq x < 1).$$

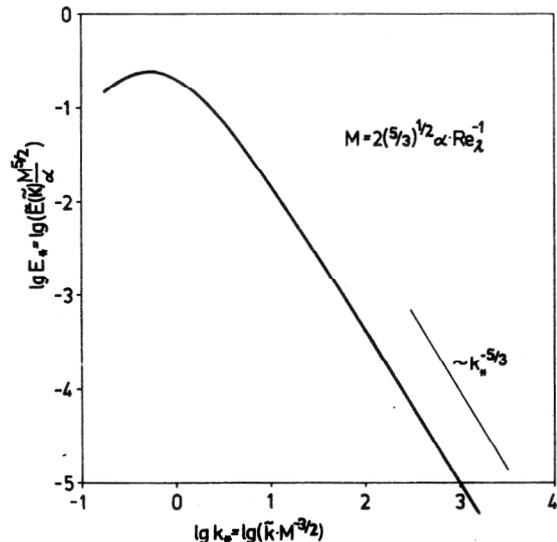


Bild 1

Ähnlichkeitsprofil des dreidimensionalen Spektrums der Turbulenzenergie im Trägheitsbereich $k \gg k_0$

Für $k_* \rightarrow \infty$ geht das Ähnlichkeitsgesetz gemäß der Randbedingung (23) in das Kolmogorovsche $-5/3$ -Gesetz über.

Das Ähnlichkeitsgesetz beschreibt, wie der nachfolgende Vergleich mit Messungen zeigt, den wesentlichen Teil des dreidimensionalen Spektrums $E(k)$ im Trägheitsbereich. Helland, Van Atta und Stegen [8] haben aus Messungen eindimensionaler Spektren einer Gitterströmung bei $\text{Re}_\lambda = 237$ und eindimensionaler Spektren in der Achse eines Strahls bei $\text{Re}_\lambda = 951$ die entsprechenden dreidimensionalen Spektren ermittelt. Im Bild 2 haben wir die theoretischen Spektren nach (29) und (27) für die genannten Reynoldsschen Zahlen mit den aus den Messungen erhaltenen verglichen. Es ist gute Übereinstimmung im wesentlichen Teil des Trägheitsbereiches, insbesondere auch hinsichtlich der Maxima von $E(k)$, festzustellen.

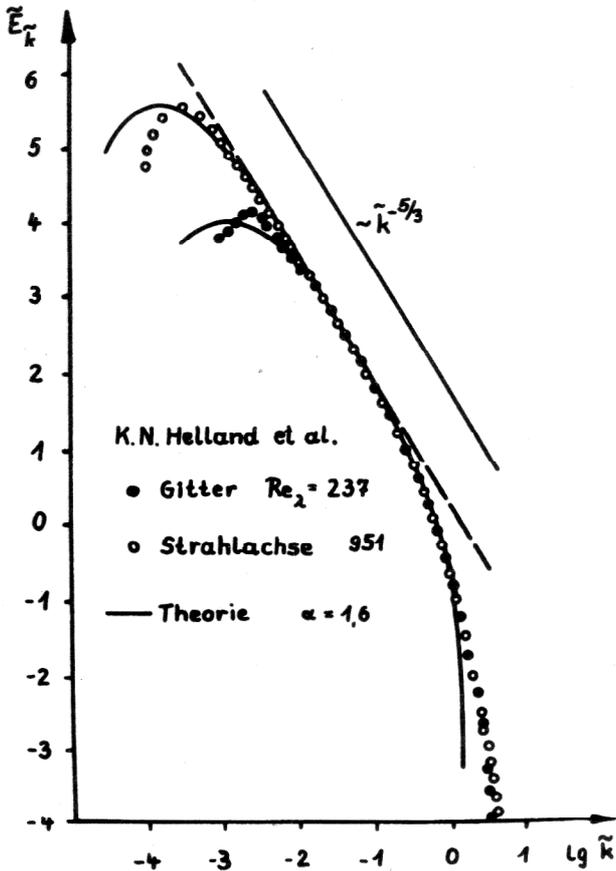


Bild 2
Dreidimensionale Spektren der Turbulenzenergie bei den Reynoldsschen Zahlen $Re_\lambda = 237$ und 951

Für die Lage von $\tilde{E}_{\max}(\tilde{k})$ im Wellenzahlenbereich \tilde{k} und den Betrag von $\tilde{E}_{\max}(\tilde{k})$ folgen aus dem Ähnlichkeitsgesetz mit

$$\begin{aligned} dE_*/dx &= 0 && \text{bei } x = 1/6 \\ k_{*\max} E_* &= 0,5367, && E_{*\max} = 0,2588. \end{aligned}$$

Das ergibt dann nach (27) die Potenzformeln in Re_λ

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{\max \tilde{E}} &\approx 0,537 (2\sqrt{5/3})^{3/2} \alpha^{3/2} Re_\lambda^{-3/2}, \\ \tilde{E}_{\max} &= 0,259 (2\sqrt{5/3})^{-5/2} \alpha^{-3/2} Re_\lambda^{5/2}; \end{aligned} \quad (30)$$

und bei $\alpha = 1,6$

$$\begin{aligned} \lg \tilde{k}_{\max \tilde{E}} &\approx 0,654 - 3/2 \lg Re_\lambda, \\ \lg \tilde{E}_{\max} &= -1,923 + 5/2 \lg Re_\lambda. \end{aligned} \quad (31)$$

Die erhaltenen Potenzgesetze (31) haben wir im Bild 3 aufgetragen und mit den Messungen von Helland et al. [8] verglichen.

Anmerkung:

Legt man approximativ den Energietransfer (18) im Trägheitsbereich $k \gg k_0$ auch dem Energietransfer im Zähigkeitsbereich zugrunde, so hat (1) nunmehr das charakteristische System der gew. D.-Gl.

$$\frac{dt}{1} = \frac{dk}{(3/2)\alpha^{-3/2} k^{5/2} E(k)^{1/2}} = - \frac{dE(k)}{(5/2)\alpha^{-3/2} k^{3/2} E(k)^{3/2} + 2\nu k^2 E(k)};$$

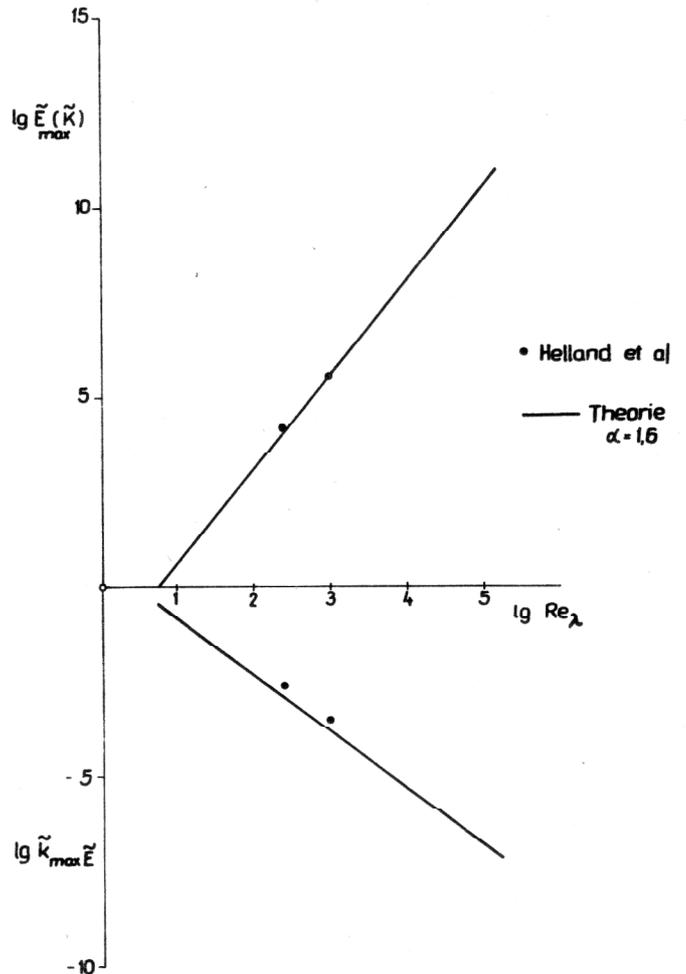


Bild 3
Maximum des dreidimensionalen Spektrums der Turbulenzenergie und seine Wellenzahl in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl Re_λ

Integrale sind

$$\begin{aligned} (\sqrt{E(k)/k} + [\nu]) k^{4/3} &= c_1; \\ t + \frac{\alpha^{3/2}}{c_1} \left\langle \frac{1}{k^{2/3}} + \frac{1}{2} \frac{[\nu]^{1/2}}{c_1^{1/2}} \ln \frac{1 - ([\nu]/c_1)^{1/2} k^{2/3}}{1 + ([\nu]/c_1)^{1/2} k^{2/3}} \right\rangle &= c_2 \quad (33) \\ ([\nu] &= \alpha^{3/2} \nu/2). \end{aligned}$$

Geht man dann wie oben vor, so erhält man [7] bei Erfüllung der Forderung, daß für $\nu = 0$ wieder das Ähnlichkeitsgesetz (29) bzw. Formel (24) erscheint, in der Variablen

$$x = 2\alpha^{-3/2} \sqrt{E(\tilde{k})/\tilde{k}} \quad (\text{lokale Reynoldszahl})$$

die spektrale Verteilung

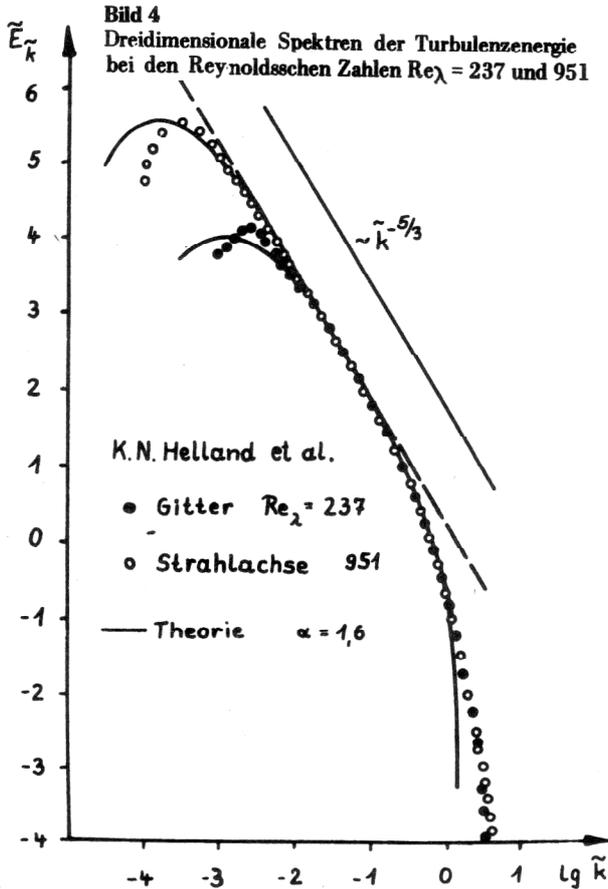
$$\tilde{k}^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-3/2} (1+x)^{-3/2} \left\{ 1 - N \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1} \right) \right\} \quad (34)$$

$$\text{mit } N = \sqrt{10/3} \alpha^{3/2} Re_\lambda^{-1},$$

$$\frac{\tilde{E}(k)}{\tilde{k}} = \frac{\alpha^3}{4} x^2 \quad (0 < x \leq 1/N^2).$$

Formel (34) enthält das Ähnlichkeitsgesetz (29) des Spektrums im Trägheitsbereich $k \gg k_0$ und weist das exponentielle Abklingen (16) in der Asymptote $k \rightarrow \infty$ auf.

Der im Bild 4 durchgeführte Vergleich mit Messungen zeigt, daß nunmehr Übereinstimmung auch in einem anschließenden Teil des Zähigkeitsbereiches festzustellen ist, daß aber dann – bedingt durch die Vernachlässigung des Einflusses der Zähigkeit auf den Energietransfer – ein Abweichen von der Messung erfolgt.



B. Eindimensionales Spektrum

Gemessen wird das eindimensionale Spektrum

$$\overline{u_1^2} = \int_0^\infty E_{11}(k_1) dk_1.$$

Eindimensionales und dreidimensionales Spektrum sind durch die Relation

$$E_{11}(k_1) = \int_{k_1}^\infty \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k} dk \quad (35)$$

miteinander verbunden.

Für den Trägheitsunterbereich des eindimensionalen Spektrums erhält man

aus

$$(5) \quad E(k) = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

$$E_{11}(k_1) = \alpha_1 \epsilon^{2/3} k_1^{-5/3} \quad \text{mit } \alpha_1 = \frac{18}{55} \alpha. \quad (36)$$

1. Setzen wir in (35) das Ähnlichkeitsgesetz (29) des dreidimensionalen Spektrums in Trägheitsbereich

$k \gg k_0$ ein, so erhalten wir [9] das Ähnlichkeitsgesetz des eindimensionalen Spektrums im Trägheitsbereich $k \gg k_0$:

Aus

$$E_{*11}(k_{*1}) = \int_{k_{*1}}^\infty \left(1 - \frac{k_{*1}^2}{k_*^2}\right) \frac{E_*(k_*)}{k_*} dk_*$$

folgt, wenn wir in (29) $\sqrt{x} = y$ setzen, mit

$$\frac{dk_*}{dy} = \frac{1+2y^2}{(1-y^2)^{5/2}} \quad (37)$$

$$E_{*11} = \int_{y_1}^1 (1-y^2)^{3/2} dy + 2 \int_{y_1}^1 y^2 (1-y^2)^{3/2} dy - \frac{y_1^2}{(1-y_1^2)^3} \left\{ \int_{y_1}^1 \frac{(1-y^2)^{9/2}}{y^2} dy + 2 \int_{y_1}^1 (1-y^2)^{9/2} dy \right\}. \quad (38)$$

Mittels der Integrale

$$\int y^4 \sqrt{1-y^2} dy = -\left(\frac{1}{6}y + \frac{1}{6}y^3\right)(1-y^2)^{3/2} + \frac{1}{8} \int \sqrt{1-y^2} dy,$$

$$\int y^6 \sqrt{1-y^2} dy = -\left(\frac{5}{64}y + \frac{5}{48}y^3 + \frac{1}{8}y^5\right)(1-y^2)^{3/2} + \frac{5}{64} \int \sqrt{1-y^2} dy,$$

$$\int y^8 \sqrt{1-y^2} dy = -\left(\frac{7}{128}y + \frac{7}{96}y^3 + \frac{3}{88}y^5 + \frac{1}{10}y^7\right)(1-y^2)^{3/2} + \frac{7}{128} \int \sqrt{1-y^2} dy$$

ergibt elementare Integration

$$E_{*11}(y_1) = \frac{1}{2} \left\{ (\arcsin 1 - \arcsin y_1) - y_1 (1-y_1^2)^{1/2} - \frac{2}{3} y_1^3 (1-y_1^2)^{3/2} - \frac{y_1^2}{(1-y_1^2)^3} \left[-\frac{63}{16} (\arcsin 1 - \arcsin y_1) + \left(\frac{2}{y_1} + \frac{31}{16} y_1\right) (1-y_1^2)^{1/2} + \left(\frac{1}{8} y_1 + \frac{3}{2} y_1^3 - \frac{7}{5} y_1^5 + \frac{2}{5} y_1^7\right) (1-y_1^2)^{3/2} \right] \right\}; \quad (39)$$

dazu tritt

$$k_{*1} = \frac{y_1}{(1-y_1^2)^{3/2}}$$

Die numerische Auswertung ergibt die in der Tabelle 1 angegebenen Werte und das im Bild 5 aufgetragene Ähnlichkeitsprofil des eindimensionalen Spektrums in Trägheitsbereich $k \gg k_0$.

2. Für $\tilde{E}_{11}(\tilde{k}_1)$ haben wir nach (27) die Darstellung

$$\tilde{k}_1 = k_{*1} (2\sqrt{5/3})^{3/2} \alpha^{3/2} \text{Re}_\lambda^{-3/2},$$

Tabelle 1

lg K_{*1}	lg E_{*11}	lg K_{*1}	lg E_{*11}	lg K_{*1}	lg E_{*11}
-2	-0,116	-0,284	-0,572	0,961	-2,015
-1,522	-0,139	-0,199	-0,647	0,973	-2,187
-1,397	-0,149	-0,114	-0,727	1,106	-2,393
-1,299	-0,160	-0,025	-0,822	1,273	-2,656
-0,993	-0,215	+0,069	-0,936	1,494	-2,943
-0,809	-0,269	0,171	-1,050	1,641	-3,248
-0,672	-0,324	0,284	-1,192	1,829	-3,554
-0,560	-0,380	0,414	-1,366	2,095	-3,991
-0,461	-0,441	0,569	-1,588	2,547	-4,733
-0,371	-0,503	0,765	-1,870		

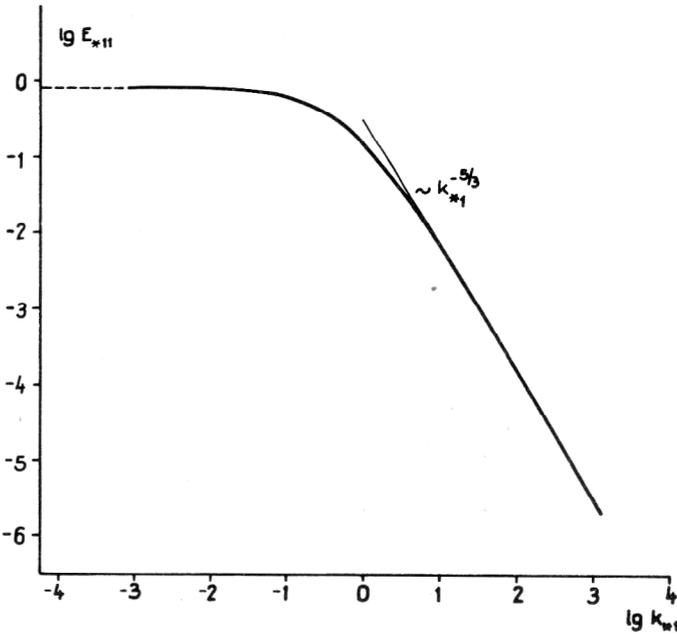


Bild 5
Ähnlichkeitsprofil des eindimensionalen Spektrums der Turbulenzenergie im Trägheitsbereich $k \gg k_0$

$$\tilde{E}_{11} = E_{*11} (2\sqrt{5/3})^{-5/2} \alpha^{-3/2} Re_\lambda^{5/2}; \quad (40)$$

bei $\alpha = 1,6$

$$\lg \tilde{k}_1 = \lg k_{*1} + 0,924 - \frac{3}{2} \lg Re_\lambda,$$

$$\lg \tilde{E}_{11} = \lg E_{*11} - 1,336 + \frac{5}{2} \lg Re_\lambda. \quad (41)$$

Damit erhalten wir die im Bild 6 dargestellte Staffelung der Profile $\tilde{E}_{11}(k_1)$ des eindimensionalen Spektrums nach der Reynoldsschen Zahl Re_λ .

Charakterisiert wird die Staffelung durch den Grenzwert

$$\lim_{\tilde{k}_1 \rightarrow 0} \tilde{E}_{11}(\tilde{k}_1).$$

Aus (39) folgt

$$\lim_{k_{*1} \rightarrow 0} E_{*11}(k_{*1}) = \frac{\arcsin 1}{2} = \frac{\pi}{4}; \quad (42)$$

und das ergibt nach (40)

$$\lim_{\tilde{k}_1 \rightarrow 0} \tilde{E}_{11}(\tilde{k}_1) = 0,0362 Re_\lambda^{5/2} \quad (43)$$

und

$$\lg \lim_{k_1 \rightarrow 0} \tilde{E}_{11}(\tilde{k}_1) = -1,414 + \frac{5}{2} \lg Re_\lambda. \quad (44)$$

Im Bild 7 haben wir Grenzwerte (entnommen einem Diagramm in [10]), die Messungen von Gitterströmungen (homogene isotrope Turbulenz) und Messungen in der Achse eines Strahls, einer Rohrströmung und von Nachlaufströmungen (angenähert homogen und isotrop) ergeben, eingetragen. Der Anstieg der Grenzwerte mit $Re_\lambda^{5/2}$ wird offenbar bestätigt.

Bild 8 enthält einen Vergleich gemessener und theoretischer Profile des eindimensionalen Spektrums in der Achse eines runden Strahls bei der relativ großen Reynoldsschen Zahl $Re_\lambda = 780$ [10 b] und einer Gitterströmung bei der relativ kleinen Zahl $Re_\lambda = 72$ [10 a].

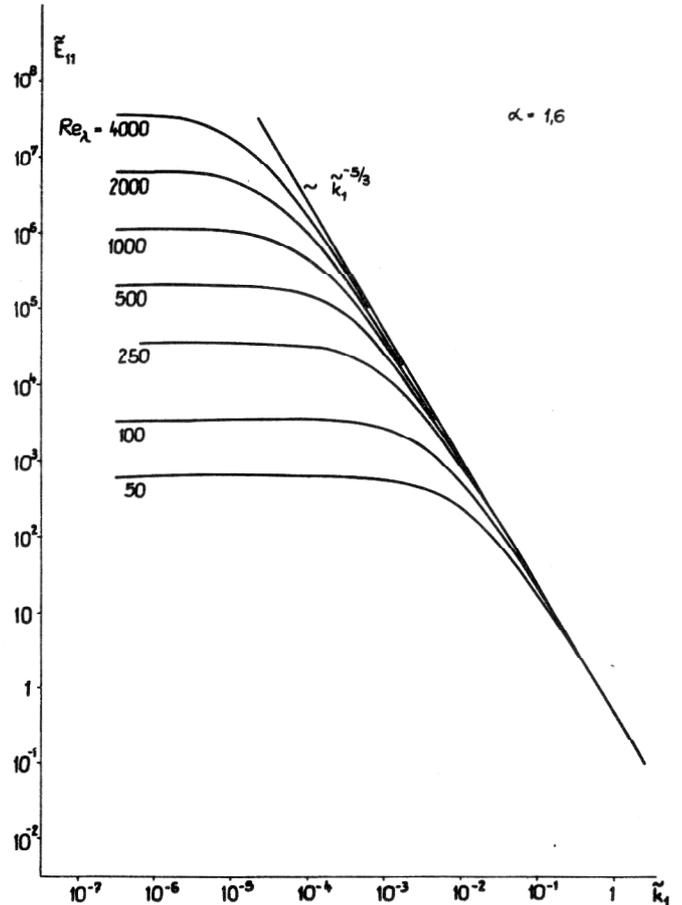


Bild 6
Staffelung der Profile des eindimensionalen Spektrums der Turbulenzenergie im Trägheitsbereich $k \gg k_0$

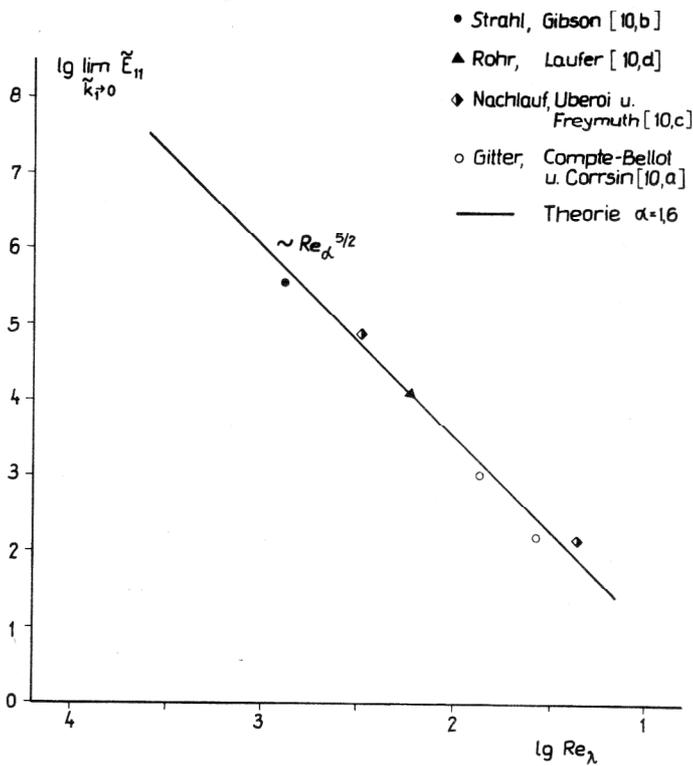


Bild 7
 Abhängigkeit des Grenzwertes $\lim_{k_1 \rightarrow 0} \tilde{E}_{11}(k_1)$
 von der Reynoldsschen Zahl Re_λ

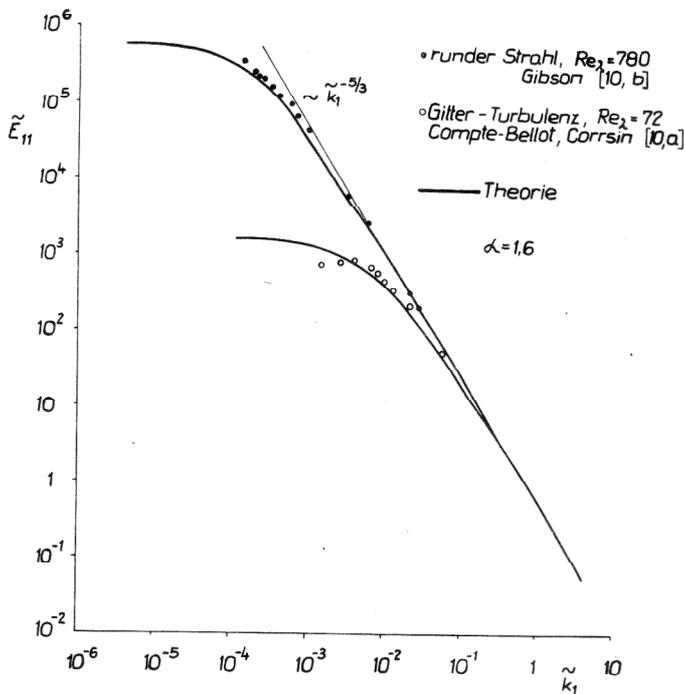


Bild 8
 Experimentelle und theoretische Profile des eindimensionalen Spektrums der Turbulenzenergie in (angenähert) homogener isotroper Turbulenz

II. Korrelationen der Geschwindigkeitsschwankungen

Die Bestimmung des Tensors zweiter Ordnung der Zweipunkt-Korrelationen

$$R_{ij}(\mathcal{R}) = \overline{u'_i(\mathcal{R}) u'_j(\mathcal{R} + \mathcal{R})}$$

läßt sich auf die Ermittlung der longitudinalen Komponente

$$\overline{u'^2} f(r) = \overline{u'_p(\mathcal{R}) u'_p(\mathcal{R} + \mathcal{R})} \quad (u'_p \text{ parallel zu } \mathcal{R})$$

zurückführen.

Für $f(r)$ erhält man aus den Navier-Stokeschen Gleichungen nach v. Kármán-Howarth die Gleichung

$$\frac{\partial \overline{u'^2} f(r)}{\partial t} = \overline{(u'^2)^{3/2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) k(r) + 2\nu \overline{u'^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) f(r),$$

in der mit

$$(45)$$

$$\overline{(u'^2)^{3/2}} k(r) = \overline{u_p'^2(\mathcal{R}) u_p'(\mathcal{R} + \mathcal{R})}$$

$$(\overline{u'^2} = \overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2})$$

eine Komponente des Tensors dritter Ordnung der Zweipunktkorrelationen

$$R_{ij,k}(\mathcal{R}) = \overline{u'_i(\mathcal{R}) u'_j(\mathcal{R}) u'_k(\mathcal{R} + \mathcal{R})}$$

auftritt. (Das unterstrichene Glied resultiert dabei aus den nichtlinearen Trägheitsgliedern der Navier-Stokeschen Gleichungen). Die Bestimmung der Komponenten dieses Tensors läßt sich hier wieder auf die Ermittlung der longitudinalen Komponente $\overline{(u'^2)^{3/2}} k(r)$ zurückführen.

Nahe verwandt den Geschwindigkeitskorrelationen sind die von Kolmogorov eingeführten Strukturfunctionen des Typs

$$B_{ik}(\mathcal{R}) = \overline{(u'_{2i} - u'_{1i})(u'_{2k} - u'_{1k})}$$

und

$$(46)$$

$$B_{ikl}(\mathcal{R}) = \overline{(u'_{2i} - u'_{1i})(u'_{2k} - u'_{1k})(u'_{2l} - u'_{1l})}$$

(die Indizes 1, 2 bezeichnen die Punkte; i, k, l die Geschwindigkeitskomponenten).

Es gelten die Beziehungen

$$b(r) \equiv \overline{(u'_{2i} - u'_{1i})^2} = 2 \overline{u'^2} (1 - f(r))$$

$$(u'_i \text{ parallel zu } \mathcal{R}), \quad (47)$$

$$d(r) \equiv \overline{(u'_{2i} - u'_{1i})^3} = 6 \overline{(u'^2)^{3/2}} k(r).$$

Das Analogon zur Gleichung (45) lautet hier

$$-\frac{2}{3} \epsilon - \frac{1}{2} \frac{\partial b(r)}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{1}{r^4} \frac{\partial (r^4 d(r))}{\partial r} - \frac{\nu}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial b(r)}{\partial r} \right),$$

$$(48)$$

wo ϵ Dissipation der Turbulenzenergie.

A. Die Strukturfunktion $b(r)$

Es werden sich hier zum Spektrum der Turbulenzenergie analoge Strukturen ergeben

a) Trägheitsunterbereich

Das mittlere Quadrat der relativen Geschwindigkeit über der Strecke r bzw. die Struktur $b(r)$ wird bei großer Reynoldsscher Zahl

$$Re_r = \frac{\sqrt{b(r)} r}{\nu} \quad (49)$$

durch die Trägheitskräfte, bei kleinem Re_r durch die Zähigkeitskräfte gesteuert.

Wir können demnach – vgl. IAa – im Bereich der Korrelation mit der Breite r_0 einen Trägheitsbereich abgrenzen gegen einen Zähigkeitsbereich, in welchem der Einfluß der Zähigkeit nicht mehr außer acht gelassen werden kann. Mit wachsenden Reynoldsschen Zahlen Re_{r_0} wird dabei der Zähigkeitsbereich immer mehr eingeengt.

Multipliziert man Gleichung (48) mit r^4 und integriert, so erhält man nach Kolmogorov [1] unter Berücksichtigung von

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial b(r)}{\partial t} = 0 \quad (50)$$

$$d(r) \approx -\frac{4}{5} \epsilon r + 6\nu \frac{\partial b(r)}{\partial r} \quad \text{im Bereich } r \approx 0; \quad (51)$$

bei vernachlässigbarem Einfluß der Zähigkeit demnach

$$d(r) \approx -\frac{4}{5} \epsilon r \quad \text{für } r \approx 0. \quad (52)$$

Bei hinreichend großem Re_{r_0} wird es dann – vgl. IAa – im Trägheitsbereich einen an den Zähigkeitsbereich angrenzenden Trägheitsunterbereich $r \ll r_0$ geben, der als unabhängig von den äußeren Bedingungen angesehen werden kann und in welchem außer den Variablen r und $b(r)$ nur noch der Parameter ϵ auftritt.

Es folgt nach Kolmogorov [1] dimensionsanalytisch

$$b(r) \approx C \epsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (53)$$

bzw.

$$b(r) = C \epsilon^{2/3} r^{2/3} \quad \text{für } r \rightarrow 0 \quad (54)$$

im Trägheitsunterbereich;

C ist eine dimensionslose empirische Konstante, die als universelle Konstante anzusehen ist.

Setzt man in (52) die aus (53) folgende Beziehung

$$\epsilon r \approx C^{-3/2} b(r)^{3/2} \quad (55)$$

ein, so ergibt sich für $d(r)$ nach Obuchow-Yaglom [11] die wichtige Relation

$$d(r) \approx -\frac{4}{5} C^{-3/2} b(r)^{3/2} \quad (56)$$

im Trägheitsunterbereich.

b) Universeller Bereich

Im Zähigkeitsbereich tritt – vgl. IA b – neben ϵ als weitere determinierende physikalische Einflußgröße die ki-

matische Zähigkeit ν und damit neben r die weitere determinierende Länge $(\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ auf.

Dimensionsanalytisch erhält man dann bei Fortsetzung von (53) in den Zähigkeitsbereich und damit für den sogenannten universellen Bereich $r \ll r_0$

$$b(r) = C \epsilon^{2/3} r^{2/3} \varphi(r \epsilon^{1/4}/\nu^{3/4})$$

mit der bei der Dimensionsanalyse unbestimmt bleibenden Funktion φ .

Führen wir dimensionslose Größen

$$\tilde{r} = r(\epsilon/\nu^3)^{1/4}, \quad \tilde{b} = b(\epsilon\nu)^{-1/2} \quad (57)$$

ein, so demnach im universellen Bereich

$$\tilde{b}(\tilde{r}) = C \tilde{r}^{2/3} \varphi(\tilde{r}). \quad (58)$$

Entsprechend

$$\tilde{d}(\tilde{r}) (\equiv d(\epsilon\nu)^{-3/4}) = -\frac{4}{5} C^{-3/2} \tilde{b}(\tilde{r})^{3/2} \varphi_1(\tilde{r}).$$

Für das Frühstadium (große Reynoldssche Zahl Re_{r_0}) gilt dabei nach (11)

$$c = \frac{1}{4} \frac{\nu}{a^2} \frac{1}{t^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\epsilon}{dt} = -4a(\epsilon^3/\nu)^{1/2} \quad (59)$$

$$(a = \sqrt{5/3} Re_\lambda^{-1} = \frac{1}{3} \frac{(\epsilon\nu)^{1/2}}{u'^2} \text{ nach (14)}).$$

Transformieren wir Gl. (48) auf die Variablen $\tilde{r}, \tilde{b}(\tilde{r})$; so nimmt diese unter Beachtung von

$$\left(\frac{\partial b(r)}{\partial t} \right)_r = \frac{d(\epsilon\nu)^{1/2}}{dt} \tilde{b}(\tilde{r}) + (\epsilon\nu)^{1/2} \frac{d\tilde{b}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} \frac{d\tilde{r}}{dt}$$

$$= -\epsilon(2a\tilde{b}(\tilde{r}) + a\tilde{r} \frac{d\tilde{b}(\tilde{r})}{d\tilde{r}})$$

im universellen Bereich die Form an [12]

$$-\frac{2}{3} + a\left(\tilde{b} + \frac{\tilde{r}}{2} \frac{d\tilde{b}}{d\tilde{r}}\right) = \frac{1}{6} \left(\frac{4}{\tilde{r}} \tilde{d} + \frac{d(\tilde{d})}{d\tilde{r}} \right) - \left(\frac{4}{\tilde{r}} \frac{d\tilde{b}}{d\tilde{r}} + \frac{d^2\tilde{b}}{d\tilde{r}^2} \right). \quad (60)$$

Die definitive mathematische Formulierung von $\tilde{d}(\tilde{r})$ in Abhängigkeit von den Variablen \tilde{r} und $\tilde{b}(\tilde{r})$ steht noch aus und stellt – analog dem Energietransfer $S(k)$ – ein Hauptproblem der Forschung dar.

Eine Aussage ist jedoch – vgl. IA b – für $\tilde{r} \rightarrow 0$ möglich. Hier ist mit $Re_r \rightarrow 0$ in Gl. (60) die aus den nichtlinearen Trägheitsgliedern resultierende Korrelation dritter Ordnung als vernachlässigbar anzusehen. Es ergibt sich aus (60) die bekannte Formel

$$\tilde{b}(\tilde{r}) = \frac{1}{15} \tilde{r}^2 \quad \text{für } \tilde{r} \rightarrow 0 \quad (61)$$

im universellen Bereich.

c) Trägheitsbereich $r \ll r_0$

Für $d(r)$ gibt Dimensionsanalyse hier – vgl. IA c – auch unabhängig von der Existenz eines Trägheitsunterbereiches

$$d(r) = -\frac{4}{5} C^{-3/2} b(r)^{3/2} \equiv -C_* b(r)^{3/2}; \quad (62)$$

denn $d(r)$ und $b(r)$ bedingen offenbar einander. Für den Trägheitsunterbereich mit $d(r) \approx - (4/5) \epsilon r$ nach (52) folgt dann wieder

$$b(r) \approx C \epsilon^{2/3} r^{2/3}.$$

Setzen wir (62) in Gl. (60) ein, so erhalten wir für $\tilde{b}(\tilde{r})$ im genannten Bereich die Gleichung

$$-\frac{2}{3} + a \left(\tilde{b} + \frac{\tilde{r}}{2} \frac{d\tilde{b}}{d\tilde{r}} \right) = -\frac{C_*}{6} \left(\frac{4}{\tilde{r}} \tilde{b}^{3/2} + \frac{d\tilde{b}^{3/2}}{d\tilde{r}} \right), \quad (63)$$

die für $\tilde{r} \rightarrow 0$ das Gesetz von Kolmogorov $\tilde{b} = C \tilde{r}^{2/3}$ ergibt.

Führen wir in (63) die Variablen

$$r_* = a^{3/2} \tilde{r} \left(= \left(\frac{1}{3} \right)^{3/2} \frac{\epsilon}{(u'^2)^{3/2}} r \right), \quad b^* = a \tilde{b} \left(= \frac{1}{3} \frac{b}{u'^2} \right)$$

$$\left(a = \frac{1}{3} \frac{(\epsilon \nu)^{1/2}}{u'^2} \text{ nach (14)} \right) \quad (64)$$

ein, so resultiert die vom Parameter a freie Gleichung

$$-\frac{2}{3} + \left(b^* + \frac{r_*}{2} \frac{db^*}{dr_*} \right) = -\frac{C_*}{6} \left(\frac{4}{r_*} b^{*3/2} + \frac{db^{*3/2}}{dr_*} \right). \quad (65)$$

Das besagt aber, daß im Trägheitsbereich $r \ll r_0$ ein Ähnlichkeitsgesetz

$$b^*(r_*) = F(r_*) \quad (66)$$

existent ist, das für $r_* \rightarrow 0$ in das 2/3-Gesetz $b^* = C r_*^{2/3}$ übergeht.

Eine entsprechende Aussage gilt nach (47) dann auch für die longitudinale Korrelationsfunktion $f(r)$ im Trägheitsbereich $r \ll r_0$; und zwar haben wir nach (47) und (64)

$$b^*(r_*) = \frac{2}{3} (1 - f(r_*)). \quad (67)$$

An Hand der im nachfolgenden Abschn. B erfolgten numerischen Ermittlung (Tabelle 2) des Ähnlichkeitsgesetzes

$$f(r_{**}) \quad (r_{**} = (2\alpha)^{3/2} r_*)$$

im Trägheitsbereich $r \ll r_0$ haben wir den Verlauf von

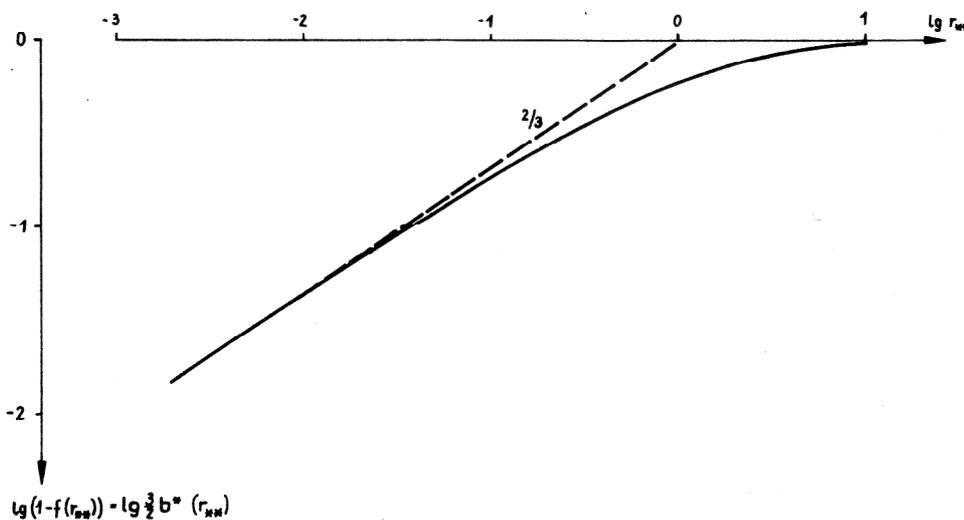


Tabelle 2

r_{**}	$f(r_{**})$	r_{**}	$f(r_{**})$
0	1	7,5	0,0447
0,0025	0,9815	8,0	0,0401
0,0050	0,9716	8,5	0,0362
0,0075	0,9630	9,0	0,0328
0,010	0,9555	9,5	0,0298
0,025	0,9198	10,0	0,0272
0,050	0,8762		
0,075	0,8415		
0,10	0,8118		
0,25	0,6842		
0,50	0,5518		
0,75	0,4623		
1,0	0,3958		
1,5	0,3019		
2,0	0,2386		
2,5	0,1931		
3,0	0,1592		
3,5	0,1332		
4,0	0,1129		
4,5	0,0966		
5,0	0,0846		
5,5	0,0727		
6,0	0,0638		
6,5	0,0563		
7,0	0,0500		

$$\frac{3}{2} b^*(r_{**}) = 1 - f(r_{**})$$

im Bild 9 dargestellt.

Für die universelle Konstante C des 2/3-Gesetzes ergibt sich des weiteren – vgl. (75) – die bekannte Relation

$$C = 1,315 \alpha \quad (68)$$

(α universelle Konstante des – 5/3-Gesetzes der Turbulenzenergie; vgl. (4)).

Wir geben noch die Asymmetrie (skewness) der Wahrscheinlichkeitsverteilung von $u'_2 - u'_1$

$$S(r) = \frac{\overline{(u'_{2i} - u'_{1i})^3}}{\overline{(u'_{2i} - u'_{1i})^2}^{3/2}} = \frac{d(r)}{b(r)^{3/2}} \quad (69)$$

an. Wir erhalten nach (47) und (79)

Bild 9
Ähnlichkeitsprofil der Strukturfunktion $b(r)$ im Trägheitsbereich $r \ll r_0$

Tabelle 3

r_{**}	$((2/3)\alpha)^{3/2} k(r_{**})$	r_{**}	$((2/3)\alpha)^{3/2} k(r_{**})$
0	0	8,5	-0,0130
0,025	-0,0030	9,0	-0,0117
0,05	-0,0057	9,5	-0,0106
0,075	-0,0082	10,0	-0,0095
0,1	-0,0104	15	-0,0038
0,25	-0,0216	20	-0,0017
0,50	-0,0328	30	-0,0004
0,75	-0,0396		
1,0	-0,0436		
1,25	-0,0457		
1,5	-0,0466		
1,75	-0,0465		
2,0	-0,0459		
2,5	-0,0435		
3,0	-0,0404		
3,5	-0,0370		
4,0	-0,0336		
4,5	-0,0304		
5,0	-0,0274		
5,5	-0,0246		
6,0	-0,0221		
6,5	-0,0198		
7,0	-0,0178		
7,5	-0,0160		
8,0	-0,0144		

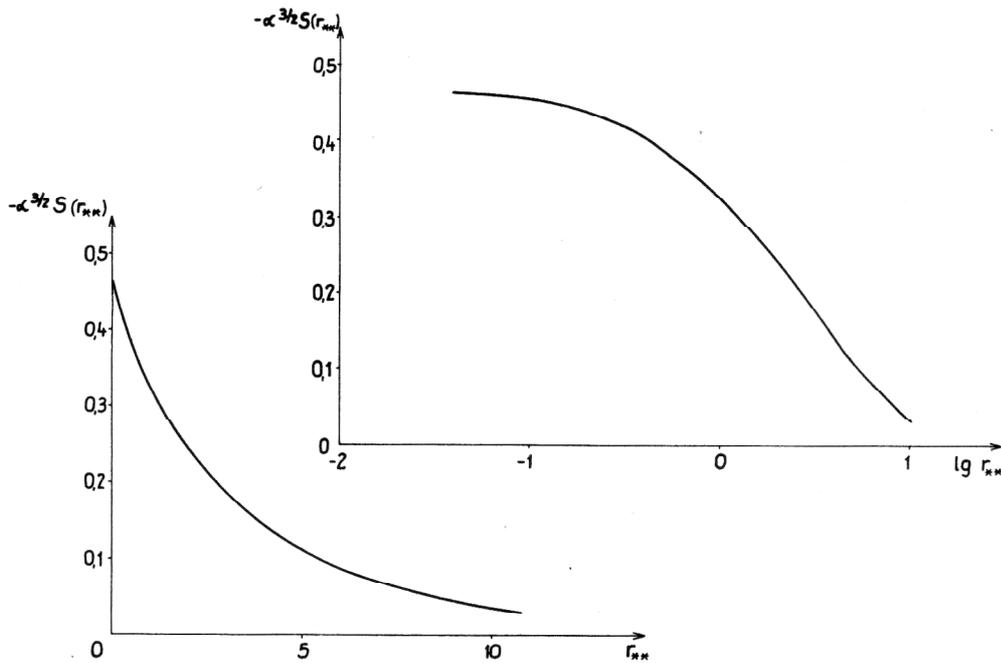
$$\alpha^{3/2} S(r_{**}) = \frac{9}{4} \sqrt{3} \frac{k^*(r_{**})}{(1-f(r_{**}))^{3/2}} \quad (70)$$

($f(r_{**})$ Tabelle 2, $k^*(r_{**})$ Tabelle 3)

Grenzwert = -0,509 nach (75) und (80).
 $r_{**} \rightarrow 0$

Der Auftragung (Bild 10) entnimmt man, daß die Asymmetrie der Wahrscheinlichkeitsverteilung im weiteren Verlauf in Übereinstimmung mit Messungen für wachsendes r_{**} bzw. r abnimmt und dem Wert Null, der ein Charakteristikum der Normalverteilung ist, zustrebt.

Bild 10
 Asymmetrie der Wahrscheinlichkeitsverteilung von $u'_2 - u'_1$



B. Die longitudinalen Korrelationsfunktionen $f(r)$ und $k(r)$

a) Die longitudinale Korrelationsfunktion $f(r)$ der Geschwindigkeitskorrelationen zweiter Ordnung

Der Verlauf der Korrelation $\overline{u'^2} f(r)$ ist bekanntlich äquivalent der spektralen Verteilung $E(k)$ der Turbulenzenergie. Es gilt die Relation

$$\overline{u'^2} f(r) = 2 \int_0^\infty \frac{E(k)}{k^2 r^2} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) dk; \quad (71)$$

in dimensionslosen Größen (7)

$$\tilde{u}'^2 f(\tilde{r}) = 2 \int_0^\infty \frac{\tilde{E}(\tilde{k})}{\tilde{k}^2 \tilde{r}^2} \left(\frac{\sin \tilde{k} \tilde{r}}{\tilde{k} \tilde{r}} - \cos \tilde{k} \tilde{r} \right) d\tilde{k}, \quad (72)$$

wo $\tilde{u}'^2 = \overline{u'^2} (\epsilon \nu)^{-1/2} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{M}$ nach (27).

Setzen wir hier das Ähnlichkeitsgesetz (29) des Spektrums der Turbulenzenergie im Trägheitsbereich $k \gg k_0$ ein, so erhalten wir [12] mit

$$k_* = \tilde{k} M^{-3/2} = \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^{3/2}}, \quad r_{**} = \tilde{r} M^{3/2} = (2\alpha)^{3/2} a^{3/2} \tilde{r};$$

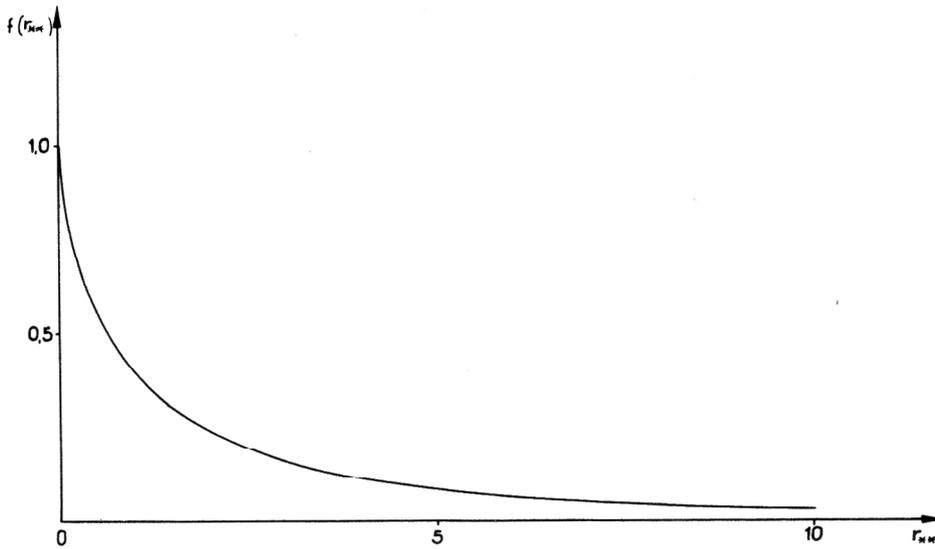


Bild 11
Ähnlichkeitsprofil der longitudinalen
Korrelationsfunktion $f(r)$
im Trägheitsbereich $r \ll r_0$

$$E_* = \tilde{E}(\tilde{k}) M^{5/2} / \alpha = \sqrt{x} (1-x)^{5/2}$$

und

$$\frac{d\tilde{k}}{dx} = M^{3/2} \frac{1}{2} \frac{1+2x}{\sqrt{x}} \frac{1}{(1-x)^{5/2}} \quad (73)$$

das Ähnlichkeitsgesetz der longitudinalen Korrelationsfunktion $f(r)$ im Trägheitsbereich $r \ll r_0$

$$f(r_{**}) = \frac{3}{2} \frac{1}{r_{**}^2} \int_0^1 \frac{(1+2x)(1-x)^3}{x} \left\{ \frac{\sin[r_{**} \sqrt{x}/(1-x)^{3/2}]}{[r_{**} \sqrt{x}/(1-x)^{3/2}]} - \cos[r_{**} \sqrt{x}/(1-x)^{3/2}] \right\} dx \quad (74)$$

in der Ähnlichkeitsvariablen $r_{**} = (2\alpha)^{3/2} r_* = (\frac{2}{3}\alpha)^{3/2} \frac{\epsilon}{(u'^2)^{3/2}} r$ nach (64).

Formel (74) besagt, daß die Breite der Korrelation mit $(u'^2)^{3/2}/\epsilon$ wächst.

Die numerische Auswertung (Tabelle 2) ergibt den im Bild 11 dargestellten Verlauf von $f(r_{**})$ über r_{**}

Wie der nachfolgende Vergleich mit Messungen zeigt, beschreibt das Ähnlichkeitsgesetz den wesentlichen Teil der Korrelationsfunktion $f(r)$ im Trägheitsbereich.

Zur Ermittlung der universellen Konstante C im $2/3$ -Gesetz benötigen wir nach (67) das Verhalten von $1-f(r_{**})$ bei $r_{**} \approx 0$. Wir haben nach (74)

$$1-f(r_{**}) = \frac{3}{2} \frac{1}{r_{**}^2} \int_0^1 \frac{(1+2x)(1-x)^3}{x} \left\{ -\frac{\sin y}{y} + \cos y + \frac{1}{3} y^2 \right\} dx$$

$$(y = r_{**} \sqrt{x}/(1-x)^{3/2}).$$

Aus $r_{**}^2 x = y^2 (1-x)^3$ ergibt sich, daß für den Bereich $r_{**}^2 \ll y^2$ ($y > 0$)

$x \approx 1$ anzunehmen ist. Setzen wir $x \approx 1$ und transformieren auf $y = r_{**}/(1-x)^{3/2}$, so

$$1-f(r_{**}) \approx 3r_{**}^{2/3} \int_{r_{**}}^{\infty} \frac{1}{y^{14/3}} (-\sin y + y \cos y + \frac{1}{3} y^3) dy$$

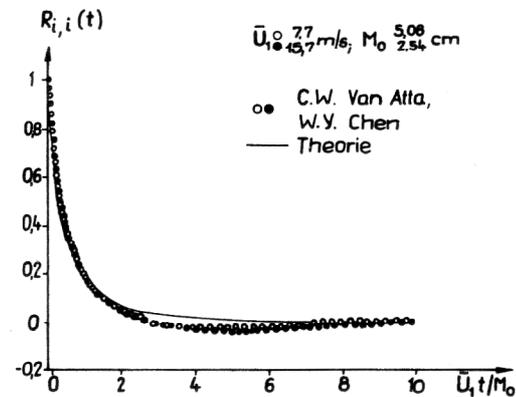


Bild 12
Experimentelle und theoretische Profile der Zweifach-Autokorrelation $R_{i,i}(t)$

$$= \frac{81}{110} r_{**}^{2/3} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y^{2/3}} dy = \frac{81}{220} \Gamma(1/3) r_{**}^{2/3} \quad \text{für } r_{**} \rightarrow 0;$$

und damit nach (74)

$$b^*(r_*) = \frac{2}{3} (1-f(r_*)) = \frac{27}{55} \Gamma(1/3) \alpha r_*^{2/3} \equiv C r_*^{2/3}, \quad (75)$$

also die bekannte Relation $\frac{C}{\alpha} = \frac{27}{55} \Gamma(1/3) = 1,315$.

Bild 12 enthält einen Vergleich mit der von Van Atta, Chen [13] in zwei Gitterströmungen bei der relativ großen Reynoldsen Zahl $Re_{M_0} = \bar{U}_1 M_0 / \nu = 2,5 \cdot 10^4$ (Maschenweite M_0) durchgeführten Messung der Zweifach-Autokorrelation

$$R_{i,i}(t) = \frac{\overline{u'_i(\tau) u'_i(\tau+t)}}{u'^2},$$

aufgetragen über $\bar{U}_1 t / M_0$; dabei ist nach der Taylor'schen Hypothese $\bar{U}_1 t = r$.

Es wurde für den Vergleich durch Anpassung (die Kennwerte u'^2 , ϵ der Messung sind in [13] nicht angegeben)

$$0,375 r_{**} \approx U_1 t / M_0$$

angenommen. Im wesentlichen Teil der Korrelation besteht gute Übereinstimmung; die vor dem Verlöschen der Korrelation gemessenen negativen Werte bedürfen der Bestätigung durch weitere Messungen.

b) Die longitudinale Korrelationsfunktion $k(r)$ der Geschwindigkeitskorrelationen dritter Ordnung

Der Ermittlung des Verlaufs der Korrelation $(\overline{u'^2})^{3/2} k(r)$ dient die Relation (Rotta [14])

$$(\overline{u'^2})^{3/2} k(r) = -2 \int_0^\infty \frac{dS/dk}{k^3 r^2} \left(3 \frac{\sin kr}{k^2 r^2} - 3 \frac{\cos kr}{kr} - \sin kr \right) dk \quad (76)$$

wo $S(k)$ Energietransfer im Spektrum der Turbulenzenergie.

Dimensionslos

$$(\tilde{u}'^2)^{3/2} \tilde{k}(\tilde{r}) = -2 \int_0^\infty \frac{d\tilde{S}/d\tilde{k}}{\tilde{k}^3 \tilde{r}^2} \left(3 \frac{\sin \tilde{k} \tilde{r}}{\tilde{k}^2 \tilde{r}^2} - 3 \frac{\cos \tilde{k} \tilde{r}}{\tilde{k} \tilde{r}} - \sin \tilde{k} \tilde{r} \right) d\tilde{k} \quad (77)$$

mit

$$(\tilde{u}'^2)^{3/2} = \left(\frac{2}{3} \frac{\alpha}{M} \right)^{3/2} \quad \text{und} \quad \tilde{S}(\tilde{k}) = S(k)/\epsilon \quad \text{nach (9).}$$

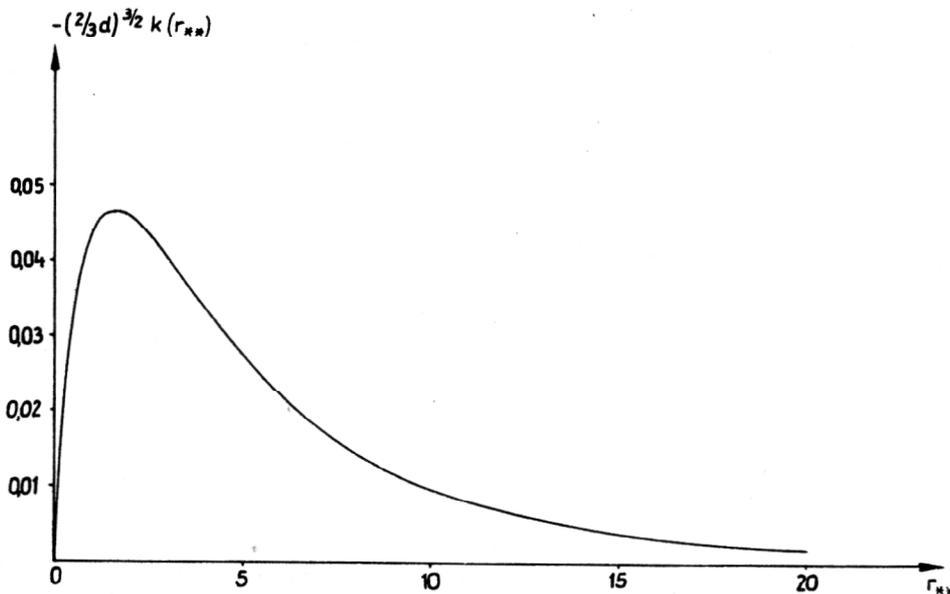
Im Trägheitsbereich $k \gg k_0$ des Spektrums haben wir – vgl. (9) – $\tilde{S}(\tilde{k}) = \alpha^{-3/2} \tilde{E}(\tilde{k})^{3/2} \tilde{k}^{5/2}$ und gemäß dem Ähnlichkeitsgesetz (29) des Spektrums der Turbulenzenergie – siehe Umrechnungsformeln (73) –

$$\tilde{S} = M^{-3/2} x^2, \quad \frac{d\tilde{S}}{d\tilde{k}} = \frac{d\tilde{S}}{dx} dx = M^{-3/2} 2x dx. \quad (78)$$

Damit erhalten wir [12] dann das Ähnlichkeitsgesetz der longitudinalen Korrelationsfunktion $k(r)$ im Trägheitsbereich $r \ll r_0$

Bild 13

Ähnlichkeitsprofil der longitudinalen Korrelationsfunktion $k(r)$ im Trägheitsbereich $r \ll r_0$



$$\overline{u_1} = 15,7 \text{ m/s}, \quad M_0 = 2,54 \text{ cm}$$

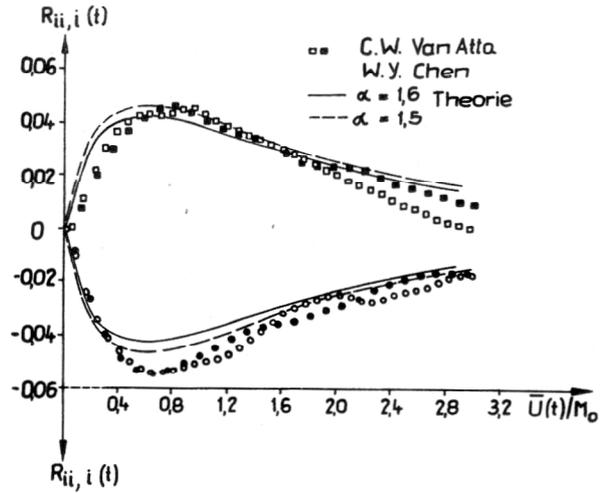


Bild 14

Experimentelle und theoretische Profile der Dreifach-Autokorrelationen $R_{ii,i}(t)$ und $R_{i,ii}(t)$

$$k^*(r_{**}) \left(\equiv \left(\frac{2}{3} \alpha \right)^{3/2} k(r_{**}) \right) = - \frac{4}{r_{**}^2} \int_0^1 \frac{(1-x)^{9/2}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\left\{ 3 \frac{\sin[r_{**} \sqrt{x} / (1-x)^{3/2}]}{[r_{**} \sqrt{x} / (1-x)^{3/2}]^2} - 3 \frac{\cos[\quad]}{[\quad]} - \sin[\quad] \right\} dx \quad (79)$$

Die berechnete Funktion $k^*(r_{**})$ (Tabelle 3) ist im Bild 13 über der Ähnlichkeitsvariablen r_{**} aufgetragen.

Für den Vergleich mit dem Experiment beziehen wir uns wieder auf die Messung von Van Atta, Chen [13].

Bild 14 enthält die Dreifach-Autokorrelationen

$$R_{ii,i}(t) = \frac{\overline{u_i'^2(\tau) u_i'(\tau+t)}}{(\overline{u'^2})^{3/2}}$$

und

$$R_{i,ii}(t) = \frac{\overline{u_i'(\tau) u_i'^2(\tau+t)}}{(\overline{u'^2})^{3/2}} = -R_{ii,i}(t).$$

Es wurde dabei – wie oben –

$$0,375 r_{**} = \overline{U}_1 t / M_0$$

angenommen.

Angesichts der Abweichungen der beiden gemessenen Autokorrelationen voneinander kann man sagen, daß die Theorie die wesentlichen Züge der Dreifachkorrelation wiedergibt.

Für $r_{**} \approx 0$ ergibt Formel (79)

$$k^*(r_{**}) \approx -\frac{2}{15} r_{**}. \quad (80)$$

LITERATUR

- [1] Kolmogorov, A. N.: Die lokale Struktur der Turbulenz in einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen. Dokl. Akad. Wissensch. USSR 30 (1941), 301.
- [2] Szablewski, W.:
 a) Zur spektralen Verteilung der Turbulenzenergie und ihrer Komponenten in turbulenten Grenzschichten. Ann. Physik 32 (1975), 353.
 b) Ähnlichkeitsgesetz des Spektrums der Turbulenzenergie für den Trägheitsbereich $k \gg k_0$ in homogener isotroper Turbulenz. ZAMM 58 (1978), 143.
- [3] Kovaszny, L. S. G.: Spectrum of locally isotropic turbulence. J. Aeron. Sci. 15 (1948), 745.
- [4] Schedvin, J., Stegen, G. R. and Gibson, C. H.: Universal similarity at high grid Reynolds numbers. Fluid Mech. 65 (1974), 561.
- [5] Ling, S. G. and Huang, T. T.: Decay of weak turbulence. Phys. Fluids 13 (1970), 2912.
- [6] Pao, Yih-Ho, Structure of velocity and scalar fields at large wavenumbers, Phys. Fluids 8 (1965), 1063.
- [7] Szablewski, W.: Über dreidimensionale Spektren der Turbulenzenergie in homogener isotroper Turbulenz. P.-Mech. – 08/82.
- [8] Helland, K. N., Van Atta, C. W., Stegen, G. R.: Spectral energy transfer in high Reynolds number turbulence. Fluid Mech. 79 (1977), 337.
- [9] Szablewski, W.: Über eindimensionale Spektren der Turbulenzenergie in homogener isotroper Turbulenz. ZAMM (im Druck).
- [10] Chapman, D. R.: Computational aerodynamic development and outlook, A J A A 17 (1978), 1293:
 a) Compte-Bellot, G. and Corrsin, S.: Simple Eulerian time correlation at full- and narrow-band velocity signals in grid-generated isotropic turbulence. Fluid Mech. 49 (1971), 273.
 b) Gibson, M. M.: Spectra of turbulence in a round jet. Fluid Mech. 15 (1963), 161.
 c) Uberoi, M. S. and Freymuth, P.: Spectra of turbulence in wakes behind circular cylinders. Phys. Fluids 12 (1969), 1359.
 d) Laufer, J.: The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NACA Rep. 1174 (1954).
- [11] Obuchow, A. M., Yaglom, A. M.: Die Mikrostruktur einer turbulenten Strömung. In: Goering, H.: Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz. Akad. Verlag Berlin 1958.
- [12] Szablewski, W.: Über Geschwindigkeitskorrelationen in homogener isotroper Turbulenz. ZAMM 62 (1982), 633.
- [13] Van Atta, C. W. and Chen, W. Y.: Correlation measurements in grid turbulence using harmonic analysis. Fluid Mech. 34 (1968), 497.
- [14] Rotta, J.: Turbulente Strömungen. B. G. Teubner, Stuttgart 1972.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. W. Szablewski
 Akademie der Wissenschaften der DDR
 Institut für Mechanik
 1199 Berlin
 Rudower Chaussee 5