

Klassifizierung der rheologischen Modelle für landwirtschaftliche Stoffe

István Huszár, Zoltán Müller

1. Einleitung

Unter landwirtschaftlichen Stoffen versteht man den hinsichtlich der Bearbeitung so wichtigen Boden, die pflanzlichen und die tierischen Stoffe. Die Kenntnis der verschiedenen Zustände dieser Stoffe wird zu wirksameren Produktionstechnologien benötigt. Hier soll allein das Festigkeitsverhalten, das heißt das Problem der Spannungen und Deformationen behandelt werden. Das Ziel ist, für die landwirtschaftlichen Stoffe Modelle zu konstruieren und mit diesen Modellen die Festigkeitszustände zu beschreiben. Das Modellgesetz kann aber – wegen der komplizierten Materialstruktur – nicht geschlossen aufgestellt werden, sondern es sind Näherungen einzuführen.

Die Struktur des Bodens ist wesentlich komplizierter, als die Struktur der in der technischen Praxis verwendeten Konstruktionswerkstoffe. Die Ursache dafür ist, daß die Bodenbestandteile Feststoff, Wasser und Luft in sehr unterschiedlicher Qualität, Quantität und Anordnung vorkommen und miteinander in vielerlei Verbindung stehen. Innerhalb eines ausgewählten Volumens findet sich auch eine starke Inhomogenität und Anisotropie. Infolge der natürlichen, chemischen, biologischen, thermischen und atmosphärischen Wirkungen und infolge der Schwankungen des Wasserhaushalts kommen stetige Änderungen der Eigenschaften zustande, die von den künstlichen Eingriffen, wie der maschinellen Bearbeitung, Düngung, Bewässerung usw. noch verstärkt werden. Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, daß alle diese Prozesse mit Grenzzuständen verknüpft sind. Bei der Bodenbearbeitung treten große Formänderungen oder Brüche auf und meistens muß man auch die dynamischen Wirkungen auf den Boden in Betracht ziehen.

Die pflanzlichen Stoffe kommen in natürlichem Zustand in Halm-, Knollen- und Kornform vor. Im künstlichen Zustand existieren aber noch weitere Formen wie zum Beispiel gehäckselte, gemahlene, geprefte, geballte u. a. Zustände. In der landwirtschaftlichen Maschinenbaupraxis treten diese Kategorien ständig auf, sowohl bei der Bodenbearbeitung und Ernte, als auch bei der Verarbeitung und Lagerung. Die landwirtschaftlichen Produkte haben einen komplizierten Aufbau, bestehen aus einer inhomogenen Struktur und haben ausgeprägte Anisotropie in ihren mechanischen Eigenschaften. Diese anisotropen Stoffe sind in mechanischer Hinsicht als Komposite aufzufassen. Sie können auf Grund ihres biologischen Aufbaues und ihrer mechanischen Eigenschaften in Komponenten zerlegt werden. Die vollständige mechanische Untersuchung der pflanzlichen Stoffe, das heißt die Berechnung der Spannungs- und Deformationszu-

stände kann bei Kenntnis der mechanischen Eigenschaften dieser Komponenten durchgeführt werden.

Wenn der pflanzliche Stoff in großer Menge auftritt, kann dieser Haufen als Kontinuum aufgefaßt werden. Das kommt z. B. vor bei Einlagerung von Erntegut in Silos.

Es gibt vielerlei tierisches Material. Dazu gehört beim tierischen Organismus das Skelett, das Fleisch, die Körpersäfte, die Haut, die Behaarung, das Gefieder bzw. deren einzelne Teile. Eine andere Gruppe sind die tierischen Produkte. Diese können die natürlichen Stoffe sein, die ohne direkten besonderen Eingriff zur Verfügung stehen, wie Milch, Eier, Horn, Wolle, Federn; es können aber auch die verarbeiteten Lebensmittelzeugnisse sein, wie Milchprodukte, Fleischerzeugnisse, Lederwaren, usw.

Ein wichtiger Aspekt der Materialmodellierung ist der einfache Aufbau der Modelle gemäß den Anforderungen und Möglichkeiten der Praxis. Neben dem in der technischen Praxis gewöhnlich eingesetzten Hookeschen Gesetz sind die Modellkörper von Pascal, Newton, Saint-Venant, Kelvin, Maxwell, Bingham, Poynting-Thompson, Prandtl-Reuss usw. für die Beschreibung der verschiedenen mechanischen Materialeigenschaften in der Fachliteratur eingehend dargelegt [1]. Als Grundelemente werden die elastischen (Hooke), viskosen (Newton) und plastischen (Saint-Venant) Eigenschaften betrachtet. Diese werden entsprechend durch eine Feder, einen sich in einer Flüssigkeit bewegenden Kolben und ein Haftreibungselement dargestellt (Bild 1). Die Erfahrun-

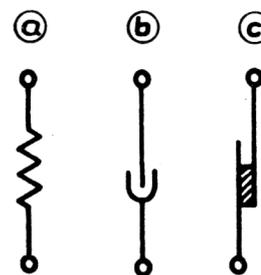


Bild 1
Grundkörper nach Hooke (a), Newton (b) und Saint-Venant (c)

gen vieler Forscher und auch unsere Ergebnisse bestätigen, daß die mechanischen Eigenschaften der landwirtschaftlichen Stoffe in vielen Fällen durch die aus linearen Elementen zusammengekoppelten rheologischen Modelle angenähert beschrieben werden können. In diesem Artikel beschäftigen wir uns daher mit diesen relativ einfachen Modellen.

2. Rheologische Modellierung der landwirtschaftlichen Stoffe

Die rheologischen Erscheinungen näherungsweise beschreibenden Materialmodelle können in zwei große Gruppen aufgeteilt werden. Die Modelle der ersten Gruppe sind dadurch charakterisiert, daß die Zeit bei der durch Spannung hervorgerufener Formänderung keine Rolle spielt. Zur anderen Gruppe gehören diejenigen Modelle, bei denen die Formänderung durch die Zeitdauer der einwirkenden Spannung (und durch die Zeitdauer der vorhergehenden Spannung) wesentlich beeinflusst wird. In die erste Gruppe können die Modelle der Elastizität und Plastizität, in die zweite die der Viskosität und Viskoelastizität eingeordnet werden.

Bei den elastischen Formänderungen werden Belastung und Entlastung durch dieselbe Materialfunktion beschrieben. Diese Funktion zwischen Spannung und Formänderung kann linear (Bild 2 a) oder nichtlinear (Bild 2 b) angenähert werden.

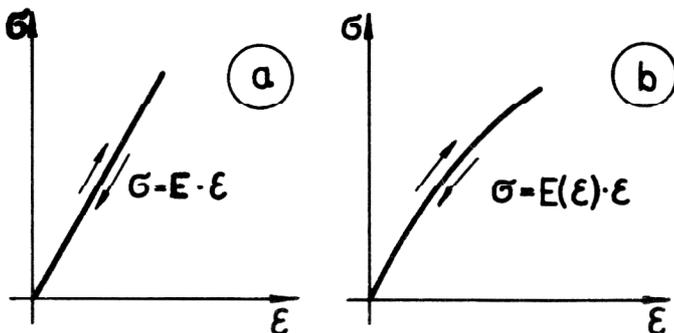


Bild 2
Lineares (a) und nichtlineares (b) Spannungs-Deformationsgesetz

Die plastische Formänderung wird nur durch eine bestimmte Spannungsgröße hervorgerufen und nach der Entlastung bleibt sie unverändert. Im Idealfall wird die Größe der Formänderung durch die Zeitdauer der Fließspannung nicht beeinflusst. Nach Erreichen dieser Fließgrenze gibt es keine eindeutige Zuordnung von Spannung und Dehnung (Bild 3). Im Realfall entsteht wäh-

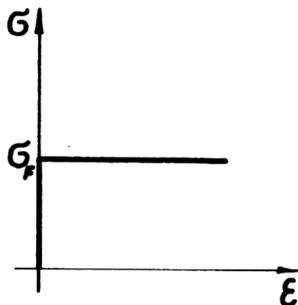


Bild 3
Ideale Plastizität

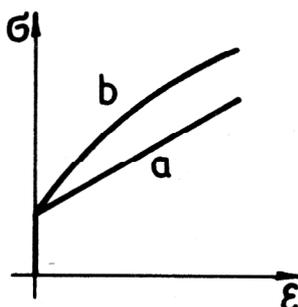


Bild 4
Plastizität mit linearer (a) und nichtlinearer (b) Verfestigung

rend der Formänderung eine Verfestigung. Diese kann eine lineare (a) oder eine nichtlineare (b) Charakteristik haben (Bild 4).

Bei der viskosen Formänderung wächst die Verformung unter der Einwirkung der Spannung im Laufe der Zeit stetig. Die Beschreibung des viskosen Materialverhaltens wird durch eine Funktion zwischen der Spannung σ und der Geschwindigkeit der Formänderung $\dot{\epsilon}$ angegeben. Diese Funktion kann linear (a) und nichtlinear (b) sein. Bei Entlastung verbleibt eine viskose Dehnung und diese verändert sich im Laufe der Zeit nicht (Bild 5). Die vis-

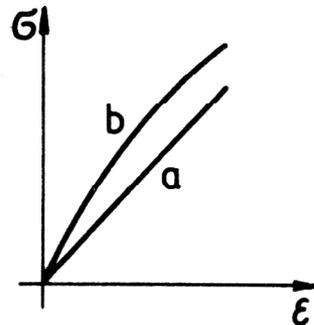


Bild 5
Linear (a) und nichtlinear (b) viskoses Materialverhalten

koelastische Formänderung ist dadurch gekennzeichnet, daß der eine Dehnungsanteil, der durch die Belastung hervorgerufen wird, zeitunabhängig ist. Der andere Dehnungsanteil aber hängt nicht nur von der Zeitdauer der gerade wirkenden Spannung ab, sondern auch von allen früheren Spannungen. Auch die viskoelastischen Modelle können linear und nichtlinear sein. Die linearen viskoelastischen Modelle werden immer durch lineare Differentialgleichungen beschrieben.

Für die Beschreibung der rheologischen Eigenschaften der landwirtschaftlichen Stoffe sollten die viskoelastisch-plastischen Modelle als allgemeine Materialgesetze betrachtet werden. Unseren Erfahrungen nach kann aber das rheologische Verhalten vieler Stoffe durch lineare viskoelastische Modelle angenähert beschrieben werden, wenn die Verformungen eine gewisse Grenzdeformation nicht überschreiten. Im folgenden werden wir am Beispiel des einachsigen Spannungszustandes diese linearen rheologischen Modelle ausführlicher betrachten.

3. Lineare viskoelastische Modelle

3.1. Allgemeine Modellgleichung

Diese Modelle bestehen aus dem Hookeschen Gesetz entsprechenden Federn und aus dem Newtonschen Gesetz entsprechenden geschwindigkeitsproportionalen Dämpfern. Diese Grundelemente können in Reihe, parallel, oder als Mischschaltung angeordnet sein. Im Bild 6 a (Hookesche Modell) und 6 b (Newtonsche Modell) sind E der Elastizitätsmodul und η der Viskositätskoeffizient [3].

Aus diesen Federn und Dämpfern zusammengesetzte Modelle bilden ein lineares System. Die Differentialgleichung enthält die Funktion $\sigma(t)$ und $\epsilon(t)$ und deren Ableitungen nach der Zeit in der ersten Potenz. Die allgemeine Differentialgleichung der linearen viskoelastischen Modelle ist:

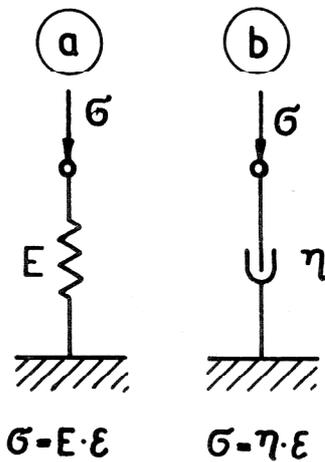


Bild 6
Hookesches (a) und Newtonsches (b) Modell

$$\sigma + \sum_{k=1}^n b_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = a_0 \epsilon + \sum_{k=1}^m a_k \frac{d^k \epsilon}{dt^k}, \quad (1)$$

wobei $m = n$ oder $m = n + 1$ sein kann. Der Koeffizient a_0 kann einen positiven endlichen reellen Wert annehmen oder gleich Null sein.

3.2. Die Übertragungsfunktion des linearen rheologischen Systems

Wenn das lineare rheologische System am Anfang der Belastung keinerlei Belastungsvorgeschichte hat, das heißt wenn das System energielos ist, dann kann folgende Übertragungsfunktion durch die Laplace-Transformation der Differentialgleichung (1) definiert werden:

$$Z(p) = \frac{\sigma(p)}{\epsilon(p)} = \frac{a_0 + \sum_{k=1}^m a_k p^k}{1 + \sum_{k=1}^n b_k p^k}. \quad (2)$$

Hier bedeutet p im allgemeinen eine komplexe Veränderliche mit der Dimension $1/s$ [2].

Zähler und Nenner der Übertragungsfunktion $Z(p)$ sind Polynome, die in Linearfaktoren zerlegt werden können:

$$Z(p) = \frac{a_m (p - s_1) (p - s_2) \dots (p - s_m)}{b_n (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (2a)$$

Die Lösungen der Gleichung, die sich durch Nullsetzen des Nenners ergibt, sind p_i ; dieses sind die Polstellen von $Z(p)$, für die der Nennerterm Null wird, ohne daß zugleich der Zähler verschwindet. Die entsprechenden Lösungen des Zählers sind s_i ; dieses sind die Nullstellen von $Z(p)$, für die der Zählerterm Null wird, ohne daß zugleich der Nenner verschwindet [4].

Die Übertragungsfunktion $Z(p)$ ist eine positive echt gebrochene rationale Funktion. Ihre Pole und Nullstellen befinden sich auf der negativen Seite der Koordinatenebene. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kann die Funktion $Z(p)$ auf der rechten Halbebene keine Pole und Nullstellen haben. Da das System eine Art von Energiespeicher enthält (Hooke-Modell, Feder),

können diese Wurzeln nicht komplex, sondern nur reell sein. Daraus ergibt sich, daß sich die Polstellen und Nullstellen der Funktion $Z(p)$ abwechselnd auf der negativen reellen Achse befinden, so daß die Wurzeln immer negative reelle Werte haben.

3.3. Bestimmung der Funktion $Z(p)$ für einzelne Modelle

Zur Bestimmung der Funktion $Z(p)$ für kombinierte Modelle muß man die Übertragungsfunktion der einzelnen Elemente und der Grundschaltungen kennen.

Die Übertragungsfunktion des *Hookeschen Modells* ist

$$Z(p) = E \quad (3)$$

wobei E [N/m²] den Elastizitätsmodul bedeutet.

Die Übertragungsfunktion des *Newtonschen Modells* ist

$$Z(p) = p \eta, \quad (4)$$

wobei η [Ns/m²] der dynamische Viskositätskoeffizient ist.

Das *Voigt-Kelwische Modell*, welches aus der Parallelschaltung von Feder und Dämpfer hervorgeht (Bild 7), hat die Übertragungsfunktion

$$Z(p) = E_0 + p \eta_0 \quad (5)$$

Das aus der Reihenschaltung von Feder und Dämpfer bestehende *Maxwellsche Modell* (Bild 8) hat eine Übertragungsfunktion, die durch die Summe der Reziprokwerte gegeben ist

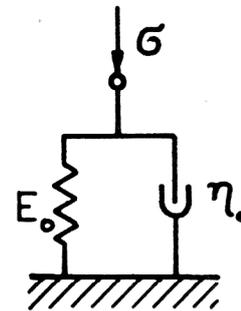


Bild 7
Voigt-Kelwisches Modell



Bild 8
Maxwellsches Modell

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{p \eta_1} \quad (6)$$

Hieraus folgt

$$Z(p) = \frac{p \eta_1 E_1}{E_1 + p \eta_1} \quad (6a)$$

Aus diesen einfachen Regeln können die Übertragungsfunktionen $Z(p)$ aller linearer rheologischen Modelle, die aus verschiedenen Kombinationen von Federn und Dämpfern bestehen, aufgeschrieben werden. Kennt man die Funktion $Z(p)$, so können die zugehörige Differentialgleichung und auch die Modellklasse leicht bestimmt werden.

3.4. Klassifizierung der linearen rheologischen Modelle

Die linearen viskoelastischen Modelle werden nach den Werten der Übertragungsfunktion $Z(p)$ an den Stellen $p = 0$ und $p = \infty$ in vier Klassen eingeteilt.

Tabelle 1.

Parallelmodell	Differentialgleichung	Reihenmodell
Erste Modellklasse		
	$\sigma + \sum_{k=1}^n b_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = a_0 \varepsilon + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k}$	
$Z(p) = E_0 + \sum_{k=1}^n \frac{p E_{2k} \eta_{2k}}{E_{2k} + p \eta_{2k}}$		$Z(p) = \frac{1}{E_1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E_{2k+1} + p \eta_{2k+1}}$

Zweite Modellklasse

	$\sigma + \sum_{k=1}^n b_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = a_0 \varepsilon + \sum_{k=1}^n a_{k+1} \frac{d^{k+1} \varepsilon}{dt^{k+1}}$	
$Z(p) = E_0 + p \eta_0 + \sum_{k=1}^n \frac{p E_{2k} \eta_{2k}}{E_{2k} + p \eta_{2k}}$		$Z(p) = \frac{1}{E_1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E_{2k+1} + p \eta_{2k+1}}$

Tabelle 2.

Parallelmodell	Differentialgleichung	Reihenmodell
Dritte Modellklasse		
	$\sigma + \sum_{k=1}^n b_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^n a_{k+1} \frac{d^{k+1} \varepsilon}{dt^{k+1}}$	
$Z(p) = p \eta_0 + \sum_{k=1}^n \frac{p E_{2k} \eta_{2k}}{E_{2k} + p \eta_{2k}}$		$Z(p) = \frac{1}{p \eta_1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E_{2k+1} + p \eta_{2k+1}}$

Vierte Modellklasse

	$\sigma + \sum_{k=0}^n b_{k+1} \frac{d^{k+1} \sigma}{dt^{k+1}} = \sum_{k=0}^n a_{k+1} \frac{d^{k+1} \varepsilon}{dt^{k+1}}$	
$Z(p) = \sum_{k=0}^n \frac{p E_{2k} \eta_{2k}}{E_{2k} + p \eta_{2k}}$		$Z(p) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{p \eta_1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E_{2k+1} + p \eta_{2k+1}}$

Zur *ersten Klasse* gehören die Modelle, deren Übertragungsfunktion $Z(p)$ an den Stellen $p = 0$ und $p = \infty$ endliche reelle Werte haben. In diesem Falle sind $a_0 \neq 0$ und $m = n$. Die Übertragungsfunktion dieser Modelle ist

$$Z(p) = \frac{a_0 + \sum_1^n a_k p^k}{1 + \sum_1^n b_k p^k} \quad (7)$$

Zu dieser Klasse gehören u. a. die Hookeschen und die Poynting-Thomsonschen Modelle.

Die zur *zweiten Klasse* gehörenden Modelle haben Übertragungsfunktionen $Z(p)$, die für $p = 0$ eine endliche reelle und für $p = \infty$ unendliche Werte annehmen. Hier ist $a_0 \neq 0$ und $m = n + 1$. Die Übertragungsfunktion ist

$$Z(p) = \frac{a_0 + \sum_1^n a_{k+1} p^{k+1}}{1 + \sum_1^n b_k p^k} \quad (8)$$

Zu dieser Klasse gehören u. a. die Voigt-Kelvinschen Modelle.

In die *dritte Klasse* werden die Modelle eingeordnet, deren Übertragungsfunktionen $Z(p)$ für $p = 0$ verschwinden und für $p = \infty$ einen unendlichen Wert haben. In diesem Falle sind $a_0 = 0$ und $m = n + 1$. Dazu gehören die Newtonschen, die Jeffreyschen u. a. Modelle. Ihre Übertragungsfunktion ist

$$Z(p) = \frac{\sum_0^n a_{k+1} p^{k+1}}{1 + \sum_1^n b_{k+1} p^k} \quad (9)$$

Die *vierte Klasse* umfaßt jene Modelle, deren Übertragungsfunktion $Z(p)$ an der Stelle $p = 0$ Null sind und an der Stelle $p = \infty$ einen endlichen reellen Wert haben. Hier sind $a_0 = 0$ und $m = n$. Die Übertragungsfunktion ist hier

$$Z(p) = \frac{\sum_0^n a_{k+1} p^{k+1}}{1 + \sum_0^n b_k p^{k+1}} \quad (10)$$

Zu dieser Klasse gehören die Maxwellschen, die Burgerschen u. a. Modelle.

Das Bild 9 zeigt die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktionen der einzelnen Modellklassen auf der negativen reellen Achse. Hier sind durch o die Nullstellen und durch x die Polstellen bezeichnet.

Zu einer gegebenen Funktion $Z(p)$ können viele Schaltungskombinationen der Federn und Dämpfer gehören, von denen aber nur zwei rechentechnische und praktische Bedeutung haben. Es sind diese das *Parallelmodell*, welches durch Foster-Synthese aus der Funktion $Z(p)$ entwickelt wird, sowie das *Reihenmodell*, das ebenfalls durch Foster-Synthese aus der Funktion $\frac{1}{Z(p)}$ ent-

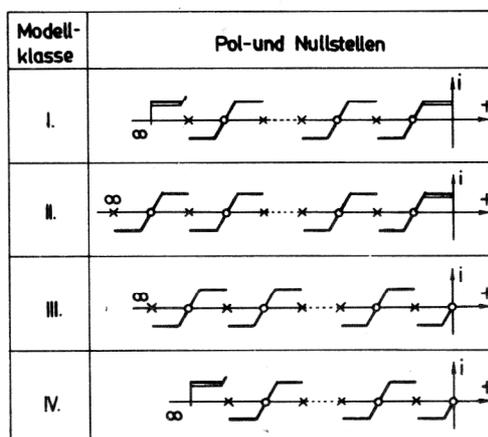


Bild 9
Pol- und Nullstellen von $Z(p)$ bei den einzelnen Modellklassen

wickelt wird. Die Parallelmodelle bestehen aus parallel geschalteten Hookeschen, Newtonschen oder Maxwellschen Modellen. Die Reihenmodelle werden durch Reihenschaltung der Hookeschen, Newtonschen oder Voigt-Kelvinschen Modelle gewonnen (Tabelle 1 und 2).

Bei der Foster-Synthese werden die die Konstanten der Differentialgleichung enthaltende Übertragungsfunktion $Z(p)$ und ihr Kehrwert $\frac{1}{Z(p)}$ in Partialbrüche zerlegt.

Die Kriechfunktion $\epsilon = f(\sigma, t)$ und die Relaxationsfunktion $\sigma = f(\epsilon, t)$ können aus diesen Partialbrüchen durch Laplacesche Transformation leicht bestimmt werden. Die Lösung der Differentialgleichung wird dann einfacher. Die Funktionen $Z(p)$ und $\frac{1}{Z(p)}$ für Parallel- und Reihenmodelle sowie die Differentialgleichungen der vier Modellklassen sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengefaßt.

3.5. Poynting-Thomsonsches Parallel- und Reihenmodell

Die Differentialgleichung dieses Modells wird aus der allgemeinen Differentialgleichung (1) für $n = m = 1$ hergeleitet, das heißt

$$\sigma + b_1 \dot{\sigma} - a_0 \epsilon - a_1 \dot{\epsilon} = 0 \quad (11)$$

Hieraus ergibt sich die Funktion $Z(p)$ durch Laplace-Transformation nach der Gleichung (2)

$$Z(p) = \frac{a_0 + pa_1}{1 + pb_1} \quad (12)$$

Aus $Z(p)$ wird durch Foster-Synthese das *Parallelmodell* entwickelt (Bild 10). Seine Konstanten sind

$$E_0 = a_0, \quad E_2 = \frac{a_1}{b_1} - a_0, \quad \eta_2 = a_1 - a_0 b_1 \quad (13)$$

Das *Reihenmodell* (Bild 11) wird durch Foster-Synthese aus der Funktion $\frac{1}{Z(p)}$ entwickelt. Die Konstanten sind nun

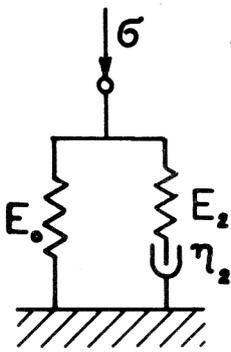


Bild 10
Poynting-Thomson'sches
Parallelmodell

$$E_1 = \frac{a_1}{b_1},$$

$$E_3 = \frac{a_0 a_1}{a_1 - a_0 b_1}, \quad \eta_3 = \frac{a_1^2}{a_1 - a_0 b_1}. \quad (14)$$

Umgekehrt können natürlich auch die Konstanten der Differentialgleichung durch die Modellkonstanten ausgedrückt werden, z. B. bei dem Parallelmodell

$$a_0 = E_0, \quad a_1 = \frac{E_0 + E_2}{E_2} \eta_2, \quad b_1 = \frac{\eta_2}{E_2}, \quad (15)$$

und bei dem Reihenmodell

$$a_0 = \frac{E_1 E_3}{E_1 + E_3}, \quad a_1 = \frac{E_1 \eta_3}{E_1 + E_3}, \quad b_1 = \frac{\eta_3}{E_1 + E_3} \quad (16)$$

Die Konstanten des Parallelmodells und des Reihenmodells können auch ineinander umgerechnet werden.

3.6. Bestimmung der Modellkonstanten

Zur Bestimmung der Konstanten eines linearen viskoelastischen Modells (d. h. auch der Konstanten der zugehörigen Differentialgleichung) muß der Probekörper zeitabhängigen Belastungen oder Deformationen ausgesetzt werden, deren Antwortfunktion eine das System charakterisierende Funktion ist. Aus dieser systemcharakteristischen Funktion können die gesuchten Modellkonstanten sowie die Konstanten der Differentialgleichung bestimmt werden.

Als erste Eingangsfunktion sei die Diracsche Deltafunktion $\delta(t)$ (Impulsfunktion) erwähnt. Die Sprungantwort, d. h. die Antwortfunktion des Systems auf die Deltafunktion, wird auch *Gewichtsfunktion* $g(t)$ genannt. Der Deltaimpuls ist meßtechnisch nicht realisierbar, die Gewichtsfunktion kann aber aus anderen Antwortfunktionen indirekt bestimmt werden [4], [5].

Die folgenden Eingangsfunktionen liefern ebenfalls systemcharakteristische Antwortfunktionen

$$x(t) = H(t) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} C, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

wobei $H(t)$ die Heavysidesche Einheitssprungfunktion ist

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \delta(t) = \frac{dH(t)}{dt}.$$

Im Falle $i = 1$ ist

$$x(t) = H(t). \quad (18)$$

Die zugehörige Sprungantwort wird auch als *Durchgangsfunktion* $h(t)$ bezeichnet.

In rheologischen Rechnungen werden zweierlei Durchgangs- und Gewichtsfunktionen benutzt: die *Durchgangsfunktion* bei Relaxationserscheinungen

$$h_R(t) = L^{-1} \left[\frac{Z(p)}{p} \right] \quad (19 a)$$

und bei Kriecherscheinungen

$$h_K(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{pZ(p)} \right] \quad (19 b)$$

die *Gewichtsfunktionen* bei Relaxationserscheinungen

$$g_R(t) = L^{-1} [Z(p)] \quad (20 a)$$

und bei Kriecherscheinungen

$$g_K(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{Z(p)} \right]. \quad (20 b)$$

Hierin ist L^{-1} der Operator der Laplace-Rücktransformation.

Bei Relaxationsprüfungen mit sprungförmig vorgegebener Verformung ϵ_1 ist die Eingangsfunktion

$$\epsilon(t) = H(t) \epsilon_1. \quad (21)$$

Die Systemantwort, das heißt der Verlauf der Spannung in der Zeit, ist dann

$$\sigma(t) = L^{-1} [\epsilon(p) Z(p)] = \epsilon_1 L^{-1} \left[\frac{Z(p)}{p} \right]. \quad (22)$$

Beim Kriechversuch mit sprungförmig vorgegebener Belastung σ_1 ist die Eingangsfunktion

$$\sigma(t) = H(t) \sigma_1. \quad (23)$$

Die Systemantwort, das heißt der Verlauf der Verformung in der Zeit ist hier

$$\epsilon(t) = L^{-1} \left[\frac{\sigma(p)}{Z(p)} \right] = \sigma_1 L^{-1} \left[\frac{1}{pZ(p)} \right]. \quad (24)$$

An die aus rheologischen Messungen ermittelten Kurven $\sigma^*(t)$ und $\epsilon^*(t)$ werden die Kurven $\sigma(t)$ und $\epsilon(t)$ des geeignet ausgewählten linearen viskoelastischen Modells angepaßt. Die Anpassung erfolgt nach der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate. Aus den Parametern der angepaßten Modellkurve können die Modellkonstanten sowie die Konstanten der Differentialgleichung bestimmt werden. Die Ausgleichsrechnung wird wegen des hohen numerischen Aufwandes zweckmäßiger Weise auf einer EDVA durchgeführt.

LITERATUR

- [1] Reiner, M.: Rheologie in elementarer Darstellung. Fachbuchverlag, Leipzig, 1969.
- [2] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation I-II-III. Verlag Birkhäuser, Basel, 1950 – 1955 – 1956.

- [3] Handbuch der Physik. Band VI. Springer Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1958., S. 434 – 551.
- [4] Fodor, Gy.: Linearis rendszerek analízise (Analyse der linearen Systeme). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1967.
- [5] Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. R. Oldenbourg, München, 1956.
- [6] Sitkei, Gy.; A mezőgazdasági anyagok mechanikája (Mechanik der landwirtschaftlichen Stoffe). Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. István HUSZAR,
Dr.-Ing. Zoltán MÜLLER

Agrarwissenschaftliche Universität, Fakultät für
Landtechnik, Lehrstuhl für Technische Mechanik
2103 Gödöllo, UVR
Páter Karoly u. 1