

Anwendung der Randintegralmethode auf ebene Rißprobleme in Fällen elastischer Anisotropie

H. Maschke

1. Einleitung

Alle Bereiche der Bruchmechanik – die Untersuchung der mikrostrukturellen Prozesse beim Bruch, die Entwicklung spezieller, bruchmechanischer Methoden der Materialprüfung und die Sicherheitsbeurteilung rißbehafteter Bauteile – erfordern den Einsatz moderner numerischer Methoden der Kontinuumsmechanik. Neben der FEM werden dafür international zunehmend computerorientierte Randintegralmethoden (BEM) eingesetzt. Auch in anderen Bereichen, die durch Kontinuumstheorien beschrieben werden, haben Randintegralmethoden Eingang gefunden [1] bis [4]. International besteht heute die Tendenz, daß der Anteil der Rechnerkosten (für Rechenstunden bzw. -minuten) an den Gesamtkosten im Gegensatz zu den Kosten der Datenvor- und -nachbereitung (für Arbeitskräftestunden) ständig sinkt. Bei Anwendung der Methode der finiten Elemente ist die Generierung der Netzwerkdaten auch bei Verwendung von Datengeneratoren mit erheblichem Arbeitsaufwand verbunden. Besondere Schwierigkeiten bereitet darüber hinaus die Vernetzung unendlicher oder halbunendlicher Gebiete. Schließlich sinkt die Genauigkeit einer FEM-Approximation generell dann, wenn starke Feldgrößengradienten auftreten, also z. B. in der Umgebung von Singularitäten. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit werden spezielle hybride Sonderelemente (z. B. Rißspitzenelemente) verwendet [5], [6], [7]. Es ist jedoch relativ umständlich und mit hohem Rechenzeitaufwand verbunden, kompliziertere analytische Lösungen in ein FEM-Netzwerk einzubauen. Da Randintegralmethoden diese Nachteile nicht aufweisen, sind sie für den Einsatz in der linear elastischen Bruchmechanik besonders geeignet [8] bis [13]. Ähnlich dem Vorgehen bei der FEM können Rißspitzensingularitäten durch knotenpunktdistordierte isoparametrische Elemente modelliert werden [9]. Da für die Existenz der Randintegrale Stetigkeit der Randwerte nicht notwendig ist, hat man größere Freiheit bei der Diskretisierung als im Falle der FEM und kann z. B. auch nichtkonforme Vernetzungen anwenden [14], [15]. Dies ist – neben der Verminderung der Dimension der Diskretisierung – ein weiterer Grund für die Anwenderfreundlichkeit der Randintegralmethode [15]. Unstetigkeiten der Randspannungen lassen sich mit Hilfe doppelter Knoten, „lokaler“ Randspannungen [16] oder nichtkonformer Elemente ohne Schwierigkeiten exakt modellieren. Für die Behandlung von Anordnungen gerader ebener Risse werden mit Erfolg spezielle Fundamentallösungen angewendet. Dabei erübrigt sich die Vernetzung der Risse und die Spannungsintensitätsfaktoren können direkt mit hoher Genauigkeit berechnet werden [17]. Wegen des geringen Vernetzungs- und Rechenzeitaufwandes

kann man mit Hilfe der Substrukturtechnik eine große Zahl von Rissen berücksichtigen [18]. Snyder und Cruse [17] gaben die Fundamentallösung für einen endlichen Riß in der monoklin anisotropen Vollebene an. Daraus kann durch Grenzübergang die Lösung für den halbunendlichen Riß gewonnen werden. In der vorliegenden Arbeit wird die entsprechende Lösung für den Fall trikliner Anisotropie angegeben, so daß nun Fälle beliebiger elastischer Anisotropie behandelbar sind. Bei der Berechnung der Wechselwirkung stark genäherter Rißspitzen mit Hilfe dieser Lösungen treten wegen der unumgänglichen Substrukturgrenze zwischen den Rißspitzen jedoch Fehler auf, die umso größer sind, je geringer der Rißspitzenabstand ist. Die Rißspitzenwechselwirkung kann exakt ermittelt werden mit Hilfe der Fundamentallösung für zwei kollineare halbunendliche Risse, welche in der vorliegenden Arbeit ebenfalls für den Fall allgemeinsten Anisotropie angegeben wird.

2. Grundgleichungen und Grundzüge des Verfahrens

Verschiebungsvektor \vec{u} und Spannungstensor $\vec{\sigma}$ sind diejenigen kontinuumsmechanischen Feldgrößen, welche die Verformung des Kontinuums und die Kräfte im Kontinuum beschreiben. Der Zusammenhang zwischen beiden wird durch den Verzerrungstensor $\vec{\epsilon}$ vermittelt. Im Falle der linearen kompatiblen Elastostatik wird die Verformung durch äußere Lasten oder innere Kräfte, die mit der Dichte \vec{k} verteilt sind, verursacht. Äußeren Lasten entspricht der Randspannungsvektor \vec{t} mit

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.1)$$

und \vec{n} als dem Oberflächennormaleneinheitsvektor. Es gelten die folgenden Grundgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{k}(\vec{r}) \quad (2.2)$$

$$\vec{\sigma}(\vec{r}) = \vec{\tilde{C}} : \vec{\epsilon}(\vec{r}) \quad (2.3)$$

$$\vec{\epsilon}(\vec{r}) = \frac{1}{2} [\vec{u}(\vec{r}) \vec{\nabla} + \vec{\nabla} \vec{u}(\vec{r})] \quad (2.4)$$

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ hat die Darstellung:

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_3 \quad (2.5)$$

Der Hookesche Tensor $\vec{\tilde{C}}$ stellt den hier linearen Zusammenhang zwischen $\vec{\sigma}$ und $\vec{\epsilon}$ her. Aus (2.2) – (2.4) folgt die Gleichung für den Verschiebungsvektor:

$$\tilde{D} \cdot \vec{u}(\vec{r}) = \vec{k}(\vec{r}) \quad (2.6)$$

mit

$$\tilde{D} = \vec{\nabla} \cdot \tilde{C} \cdot \vec{\nabla} \quad (2.7)$$

wegen der Symmetrieeigenschaften von \tilde{C} .

Mit Hilfe einer Fundamentallösung $\tilde{U}(\vec{r}, \vec{r}')$ läßt sich die Lösung von (2.6) wie folgt darstellen:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \int \tilde{U}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{k}(\vec{r}') dV' \quad (2.8)$$

Demnach genügt \tilde{U} der Gleichung:

$$\tilde{D} \cdot \tilde{U}(\vec{r}, \vec{r}') = \tilde{E} \delta(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.9)$$

mit \tilde{E} als dem Einheitstensor und der Diracschen Deltafunktion δ . Zentrales Problem kontinuumsmechanischer Rechnungen ist die Lösung von Randwertaufgaben. Bei sachgemäßer Vorgabe von Verschiebungs- und Spannungsvektorwerten auf dem Rand ∂B eines Gebietes B sind die restlichen Randwerte sowie die Felder im Innern zu bestimmen. Aus Bettis Reziprozitätssatz erhält man die folgenden Gleichungen (für den Fall fehlender Volumenkräfte):

$$\int [\tilde{U}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{t}(\vec{r}) - \tilde{T}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{u}(\vec{r})] dS$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}(\vec{r}') \cdot \vec{u}(\vec{r}') \text{ falls } \vec{r}' \text{ auf } \partial B \\ \vec{u}(\vec{r}') \text{ falls } \vec{r}' \text{ in } B \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}(\vec{r}') \cdot \vec{u}(\vec{r}') \text{ falls } \vec{r}' \text{ auf } \partial B \\ \vec{u}(\vec{r}') \text{ falls } \vec{r}' \text{ in } B \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{c}(\vec{r}') \cdot \vec{u}(\vec{r}') \text{ falls } \vec{r}' \text{ auf } \partial B \\ \vec{u}(\vec{r}') \text{ falls } \vec{r}' \text{ in } B \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

\tilde{T} ist der aus \tilde{U} abgeleitete Tensor der Randspannungen. Der Tensor \tilde{c} hängt von der lokalen Geometrie des Randes ab. Da seine explizite Berechnung praktisch immer umgangen werden kann, sei hier nicht näher darauf eingegangen. Über die Gleichung (2.11) kann das Verschiebungsfeld in B berechnet werden, falls alle Randwerte bekannt sind. Durch Anwendung der Operationen (2.4) und (2.3) auf (2.11) erhält man die Darstellung der Verzerrungen und Spannungen. Bei sachgemäßer Vorgabe von Randwerten stellt (2.10) eine Integralgleichung zur Bestimmung der zunächst unbekanntenen Randwerte dar. Im Rahmen der direkten BEM wird diese Gleichung auf der Grundlage einer geeigneten Diskretisierung des Randes und numerischer Integration über die Randelemente rechtechnisch gelöst.

3. Spezielle Fundamentallösungen für ebene Rißprobleme

In ebenen Fällen sind alle Feldgrößen (abgesehen von möglicher linearer Abhängigkeit von u_3) unabhängig von z . Damit ist

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (3.1)$$

Für die Darstellung von \tilde{U} wird folgender Ansatz gewählt (siehe auch [19]):

$$\tilde{U}(\vec{r}, \vec{r}') = \tilde{D}^* V(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3.2)$$

mit

$$\tilde{D}^* = \tilde{D}^* \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \tilde{D}_x^* \tilde{D} \quad (3.3)$$

als dem Tensor der Adjunkten von D_{ij} . Man erhält

$$|\tilde{D}| V(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3.4)$$

mit

$$|\tilde{D}| = |\tilde{D}| \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{3} \tilde{D} : \tilde{D}^* \quad (3.5)$$

V ist also Fundamentallösung des Operators $|\tilde{D}|$. Damit haben Spannungstensor \tilde{S} und Randspannungstensor \tilde{T} , welche \tilde{U} entsprechen, die Darstellung:

$$\tilde{S}(\vec{r}, \vec{r}') = \tilde{C} : \vec{\nabla} \tilde{U}(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3.6)$$

$$\tilde{T}(\vec{r}, \vec{r}') = \vec{n} \cdot \tilde{C} : \vec{\nabla} \tilde{U}(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3.7)$$

Zunächst ist die Fundamentallösung für die Vollebene zu konstruieren. Als elliptischer Operator in $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ hat $|\tilde{D}|$ die Form:

$$|\tilde{D}| = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \quad (3.8)$$

mit

$$\Delta_k = \alpha_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \gamma_k \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.9)$$

Damit hat V die Darstellung:

$$V = \sum_{k=1}^3 \text{Re } f_k(z_k) \quad (3.10)$$

mit

$$z_k = x + \mu_k y \quad (3.11)$$

die μ_k sind die Wurzeln der Gleichung

$$|\tilde{D}|(1, \mu) = 0 \quad (3.12)$$

wobei zu gelten hat: $\text{Im } \mu_k > 0$.

Wie bekannt, ist der Logarithmus von $z_k - z_k'$ die Fundamentallösung des Operators Δ_k mit

$$z_k' = x' + \mu_k y' \quad (3.13)$$

Damit hat V die Form:

$$V = \frac{1}{24} \sum_{k=1}^3 \text{Re} [A_k (z_k - z_k')^4 \ln(z_k - z_k')], \quad (3.14)$$

und es ist

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^3 \text{Re} [A_k v_{ijk} \ln(z_k - z_k')] \quad (3.15)$$

$$S_{ijl} = \sum_{k=1}^3 \text{Re} [A_k s_{ijk} \frac{1}{z_k - z_k'}], \quad (3.16)$$

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} \left[A_k t_{ijk} \frac{1}{z_k - z_k'} \right] \quad (3.17)$$

mit

$$v_{ijk} = D_{ij}^* (1, \mu_k) \quad (3.18)$$

$$s_{ijk} = C_{ijmn} \nabla_n (1, \mu_k) v_{mjk} \quad (3.19)$$

$$t_{ijk} = n_j C_{ijmn} \nabla_n (1, \mu_k) v_{mjk} \quad (3.20)$$

Hier wie im folgenden gilt die Einsteinsche Summationskonvention. Die komplexen Konstanten A_k werden z. B. durch die Bedingung der Stetigkeit der Verschiebungen und die Wahl der Richtung der Einheitskraft (z. B. \vec{e}_1) bestimmt:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \operatorname{Im} [v_{ijk} A_k] &= 0 \\ \sum_{k=1}^3 \operatorname{Im} [s_{1jk} A_k / \mu_k] &= \delta_{ij} / 2\pi \end{aligned} \right\} \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (3.21)$$

Hier ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol. Man erhält unabhängig von l das gleiche Ergebnis A_1, A_2, A_3 .

Als nächstes sind die Randbedingungen für die drei Rißkonfigurationen a, b, c (vgl. Bild 1) zu erfüllen. Die Risse liegen hier auf der x-Achse, können aber über eine an-

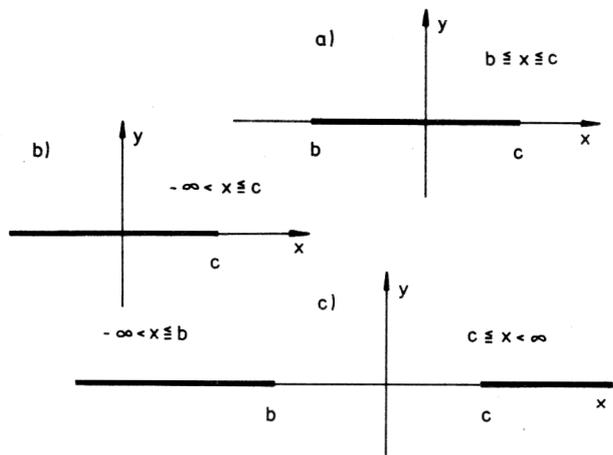


Bild 1

Die Rißgeometrien der Fundamentallösungen a, b bzw. c

- a - endlicher Riß
- b - halbusendlicher Riß
- c - zwei kollineare halbusendliche Risse

schließende Koordinatentransformation jede gewünschte Lage in der x-y-Ebene einnehmen. Der Lastfreiheit der Rißufer entspricht die Forderung

$$S_{12l} = S_{22l} = S_{23l} = 0 \text{ für } l = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

in den entsprechenden Bereichen der x-Achse. Dies wird durch Überlagerung geeigneter Funktionen $J(\alpha, \beta)$ erreicht. Generell hat die Lösung die Form:

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} \left\{ A_k v_{ijk} [\ln(z_k - z_k') - J(z_k, z_k')] \right\}$$

$$- \bar{A}_k \sum_{k=1}^3 [K_{mlk} v_{iln} J(z_n, \bar{z}_k')] \quad (3.23)$$

$$S_{ijl} = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} \left\{ A_k s_{ijkl} [1/(z_k - z_k') - J'(z_k, z_k')] \right\} - \bar{A}_k \sum_{m=1}^3 [K_{mlk} s_{ijln} J'(z_n, \bar{z}_k')] \quad (3.24)$$

$$T_{ijl} = \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} \left\{ A_k t_{ijk} [1/(z_k - z_k') - J'(z_k, z_k')] \right\} - \bar{A}_k \sum_{m=1}^3 [K_{mlk} t_{ilm} J'(z_n, \bar{z}_k')] \quad (3.25)$$

mit

$$J'(\alpha, \beta) = \frac{d}{d\alpha} J(\alpha, \beta) \text{ und}$$

$$n = \begin{cases} k & \text{für } m = 1 \\ k^* & \text{für } m = 2 \\ k^{**} & \text{für } m = 3; k, k^*, k^{**} = 1, 2, 3 \text{ zyklisch vertauscht} \end{cases} \quad (3.26)$$

Die Konstanten K_{mlk} gewinnt man durch die Lösung der Gleichungssysteme:

$$K_{1lk} s_{12lk} + K_{2lk} s_{12lk}^* + K_{3lk} s_{12lk}^{**} = \bar{s}_{12lk} \\ K_{1lk} s_{22lk} + K_{2lk} s_{22lk}^* + K_{3lk} s_{22lk}^{**} = \bar{s}_{22lk} \quad (3.27)$$

$$K_{1lk} s_{23lk} + K_{2lk} s_{23lk}^* + K_{3lk} s_{23lk}^{**} = \bar{s}_{23lk} \text{ mit } l = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3$$

Für die Geometrien a, b, c gelten die folgenden Darstellungen:

a) endlicher Riß:

$$J(\alpha, \beta) = \ln [\sqrt{\alpha-b} \sqrt{\beta-c} + \sqrt{\alpha-c} \sqrt{\beta-b}] - \ln [\sqrt{\alpha-b} + \sqrt{\alpha-c}] \\ J'(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\alpha-b} \sqrt{\alpha-c} - \alpha - \sqrt{\beta-b} \sqrt{\beta-c} + \beta}{2\sqrt{\alpha-b} \sqrt{\alpha-c} (\alpha-\beta)} \quad (3.28)$$

b) halbusendlicher Riß:

$$J(\alpha, \beta) = \ln [\sqrt{\alpha-c} + \sqrt{\beta-c}] \\ J'(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\alpha-c} - \sqrt{\beta-c}}{2\sqrt{\alpha-c} (\alpha-\beta)} \quad (3.29)$$

c) zwei kollineare halbusendliche Risse:

$$J(\alpha, \beta) = \ln [\sqrt{\alpha-b} \sqrt{c-\beta} + \sqrt{c-\alpha} \sqrt{\beta-b}] \\ J'(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\alpha-b} \sqrt{c-\alpha} - \sqrt{\beta-b} \sqrt{c-\beta}}{2\sqrt{\alpha-b} \sqrt{c-\alpha} (\alpha-\beta)} \quad (3.30)$$

4. Zur direkten Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren

Entsprechend der Asymptotik des Spannungsfeldes an Risfispitzen gilt für die Spannungsintensitätsfaktoren K_I , K_{II} , K_{III} die Darstellung:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{22} \quad | \vartheta=0$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{12} \quad | \vartheta=0 \quad (4.1)$$

$$K_{III} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{23} \quad | \vartheta=0$$

mit r als dem Abstand zur Risfispitze.

Aus (2.10) erhält man:

$$\begin{aligned} K_I &= \int [\vec{F}_{10}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) - \vec{F}_{11}(\vec{r}) \cdot \vec{u}(\vec{r})] dS \\ K_{II} &= \int [\vec{F}_{20}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) - \vec{F}_{21}(\vec{r}) \cdot \vec{u}(\vec{r})] dS \\ K_{III} &= \int [\vec{F}_{30}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) - \vec{F}_{31}(\vec{r}) \cdot \vec{u}(\vec{r})] dS \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit

$$\begin{aligned} F_{10l} &= \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} s_{22mn} f_{lmnk}^*(x, y) \\ F_{11l} &= \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} s_{22mn} f_{lmnk}^*(x, y) \\ F_{20l} &= \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} s_{12mn} f_{lmnk}^*(x, y) \\ F_{21l} &= \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} s_{12mn} f_{lmnk}^*(x, y) \\ F_{31l} &= \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} s_{23mn} f_{lmnk}^*(x, y) \\ F_{32l} &= \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} s_{23mn} f_{lmnk}^*(x, y) \end{aligned} \quad (4.3)$$

sowie

$$\begin{aligned} f_{lijk}^*(x, y) &= -v_{lijk} A_k J^*(z_k) \nabla_i(1, \mu_k) \\ &- \bar{A}_k \sum_{m=1}^3 v_{ljn} K_{mjk} J^*(z_n) \nabla_i(1, \mu_n) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} f'_{lijk}(x, y) &= -t_{lijk} A_k J'^*(z_k) \nabla_i(1, \mu_k) \\ &- \bar{A}_k \sum_{m=1}^3 t_{ljn} K_{mjk} J'^*(z_n) \nabla_i(1, \mu_n) \end{aligned}$$

Dabei gilt wieder (3.26).

Es ist

$$J^*(\alpha, \beta) = \frac{d}{d\beta} J(\alpha, \beta); \quad J'^*(\alpha, \beta) = \frac{d}{d\beta} J'(\alpha, \beta) \quad (4.5)$$

Für die drei betrachteten Risftypen (Bild 1) erhält man:

a)

linke Risfispitze:

$$\begin{aligned} J^*(\alpha) &= J_L^*(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow b} \sqrt{b-\beta} J^*(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\sqrt{\alpha-c}}{2\sqrt{\alpha-b}\sqrt{c-b}} \\ J'^*(\alpha) &= J_L'^*(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow b} \sqrt{b-\beta} J'^*(\alpha, \beta) \\ &= -\frac{\sqrt{c-b}}{4\sqrt{\alpha-b}\sqrt{\alpha-c}(\alpha-b)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

rechte Risfispitze:

$$\begin{aligned} J^*(\alpha) &= J_R^*(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow c} \sqrt{\beta-c} J^*(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\sqrt{\alpha-b}}{2\sqrt{\alpha-c}\sqrt{c-b}} \\ J'^*(\alpha) &= J_R'^*(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow c} \sqrt{\beta-c} J'^*(\alpha, \beta) \\ &= -\frac{\sqrt{c-b}}{4\sqrt{\alpha-b}\sqrt{\alpha-c}(\alpha-c)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

b)

$$\begin{aligned} J^*(\alpha) &= \lim_{\beta \rightarrow c} \sqrt{\beta-c} J^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha-c}} \\ J'^*(\alpha) &= \lim_{\beta \rightarrow c} \sqrt{\beta-c} J'^*(\alpha, \beta) = -\frac{1}{4\sqrt{\alpha-c}(\alpha-c)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

c)

linke Risfispitze:

$$\begin{aligned} J^*(\alpha) &= J_L^*(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow b} \sqrt{\beta-b} J^*(\alpha, \beta) \\ &= \frac{\sqrt{c-\alpha}}{2\sqrt{\alpha-b}\sqrt{c-b}} \\ J'^*(\alpha) &= J_L'^*(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow b} \sqrt{\beta-b} J'^*(\alpha, \beta) \\ &= -\frac{\sqrt{c-b}}{4\sqrt{\alpha-b}\sqrt{c-\alpha}(\alpha-b)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

rechte Risfispitze:

$$J^*(\alpha) = J_R^*(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow c} \sqrt{c-\beta} J^*(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{\sqrt{\alpha - b}}{2 \sqrt{c - \alpha} \sqrt{c - b}} \\
 J'^*(\alpha) &= J'_R(\alpha) = \lim_{\beta \rightarrow c} \sqrt{c - \beta} J'^*(\alpha, \beta) \\
 &= - \frac{\sqrt{c - b}}{4 \sqrt{\alpha - b} \sqrt{c - \alpha} (c - \alpha)} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

5. Einige numerische Ergebnisse

Auf der Grundlage der vorgestellten Fundamentallösungen wurden am IFE Halle die Programmsysteme ATALANTE und ATRIDE als Realisierung der direkten BEM für ebene Probleme mit monokliner bzw. trikliner Anisotropie entwickelt. Isotrope Rechnungen werden vorteilhaft mit dem Programm ATALANTE durchgeführt, wobei die elastischen Konstanten in einer Epsilon-Umgebung der isotropen Werte zu liegen haben mit $\epsilon \approx 10^{-3}$. Für die Diskretisierung werden quadratische isoparametrische Elemente benutzt. Die Elementintegration erfolgt nach der Gauss'schen Quadraturregel. Singuläre Integrale werden nach einer Quadraturregel mit logarithmischer Gewichtsfunktion ausgewertet bzw. durch die „Methode der Starrkörpertranslation“ bestimmt (vgl. [20]). In Bild 2 ist schematisiert eine Kompaktzugprobe (CT-Probe) dargestellt und ihre Vernetzung mit 9 Randelementen

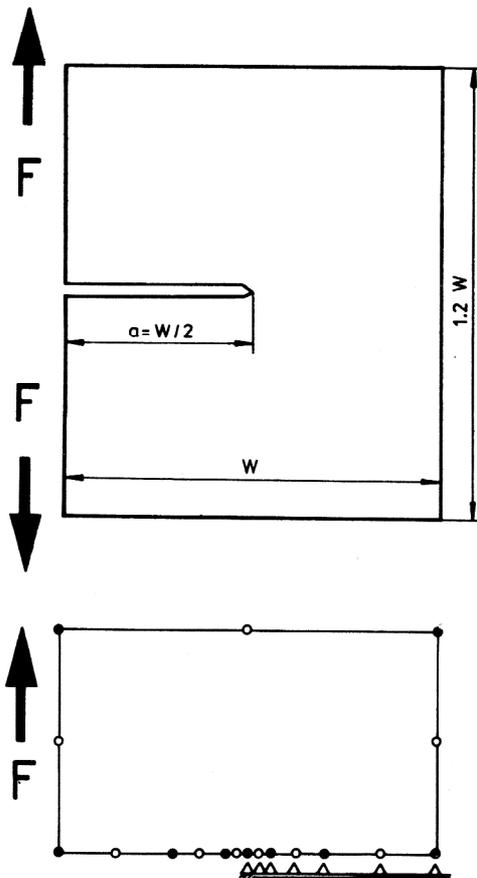


Bild 2 CT-Probe und BEM-Diskretisierung mit 9 Elementen

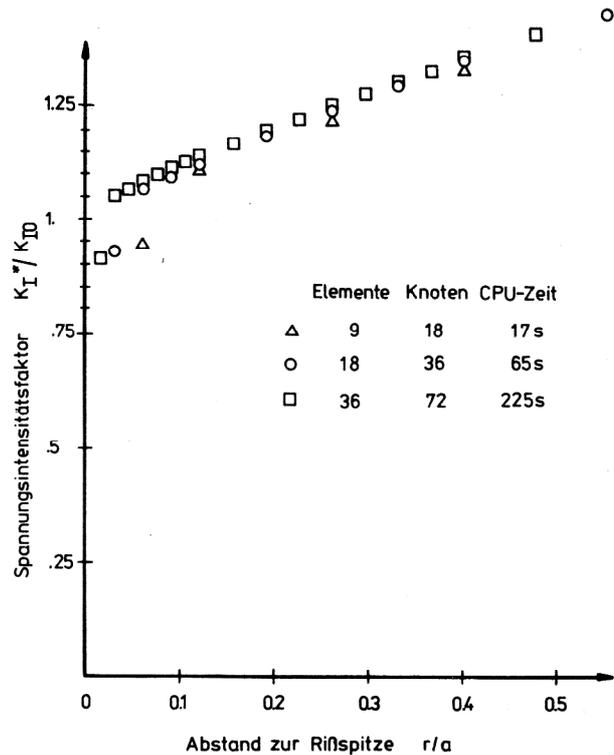


Bild 3 Lokale Spannungsintensitätsfaktoren der CT-Probe, berechnet mit Standardversion der direkten BEM.

für die Standardvariante der BEM, bei der die Vollraum-Fundamentallösung zum Einsatz kommt. Das folgende Bild 3 zeigt den Verlauf des „lokalen“ Spannungsintensitätsfaktors K_I^* , aus dem durch Extrapolation, wie bei der FEM üblich, K_I bestimmt wird.

Im isotropen Fall gilt:

$$K_I^*(r) = \frac{\sqrt{2\pi} E u_2(r)}{4(1 - \nu^2) \sqrt{r}} \quad (5.1)$$

Der Vergleichswert K_{I0} wurde Tadas Handbuch [21] entnommen. Es zeigt sich, daß auch mit der groben Diskretisierung von Bild 2 die Knotenwerte sehr gut auf einer

Tabelle 1 Ergebnisse einiger FEM-Rechnungen für die CT-Probe. Die Randkollokationslösung aus [21] diente als Vergleichswert.

Methode	Knoten	Genauigkeit	CPU-Zeit in Sekunden
FEM mit hybridem Rissspitzelement und 5 Ansatzfunktionen	33	+ 0,5 %	73
Dasselbe mit 9 Ansatzfunktionen	33	- 0,5 %	241
FEM mit isoparametrischen Viertel-punktelementen	136	- 1 %	159
FEM mit einfachen Dreieckelementen	384	- 2 %	1500

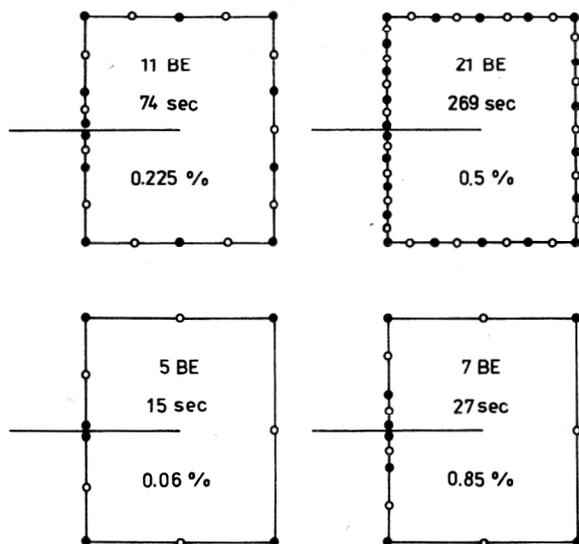


Bild 4
Verschiedene Diskretisierungen der CT-Probe bei Verwendung der Fundamentallösung b, CPU-Zeiten und Genauigkeit

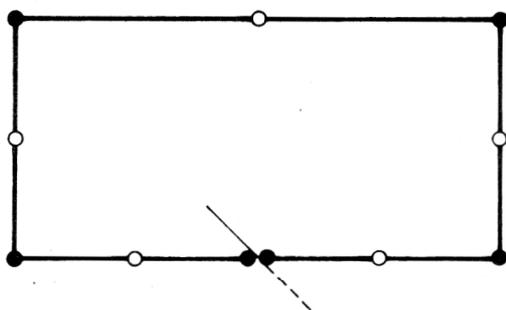
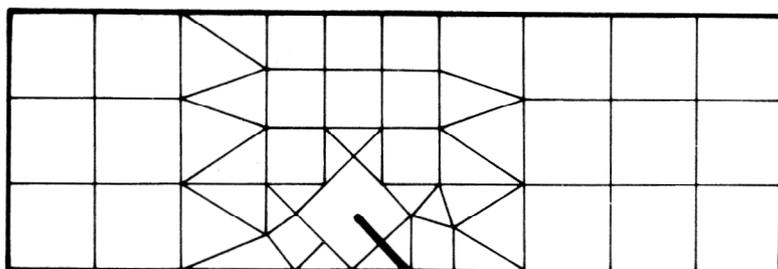


Bild 5
Rechteckige Scheibe mit schrägem Außenriß, FEM- und BEM-Diskretisierung (Fundamentallösung b)

Geraden liegen, deren Extrapolation den Vergleichswert mit einer Genauigkeit von etwa 1 % reproduziert. Da hier keine knotenpunktdistordierten singulären Rißspitzenelemente verwendet wurden, weicht der jeweils rißspitzennächste Knotenwert von der Geraden ab. Zum Vergleich sind in Tabelle 1 die Rechenzeiten einiger FEM-Rechnungen für das gleiche Problem angegeben (vgl. [22]). Die Rechnungen wurden stets mit der EDVA EC 1040 durchgeführt. Noch vorteilhafter ist die BEM bei Verwendung der Fundamentallösung b. Aus Bild 4 wird ersichtlich, daß die größte Vernetzung, mit der die CT-Probe überhaupt diskretisiert werden kann, völlig hinreichend ist und das Ergebnis mit hoher Genauigkeit liefert. Um im isotropen Fall auch die Berechnung des Faktors K_{II} einzubeziehen, wurde eine Rechteck-Zugprobe mit schrägem Außenriß betrachtet. Bild 5 oben

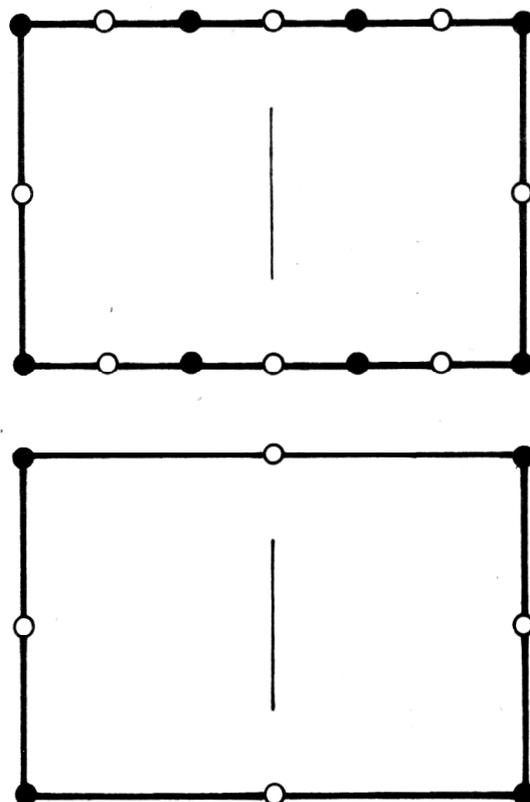


Bild 6
Rechteckige Scheibe mit zentralem Innenriß, BEM-Diskretisierung mit 4 bzw. 8 Elementen (Fundamentallösung a)

zeigt das Netzwerk für eine FEM-Rechnung, die zum Vergleich herangezogen wurde (vgl. [22]). Darunter ist die BEM-Diskretisierung bei Verwendung der Fundamentallösung b dargestellt. Zum Vergleich wurde eine Rechnung von Bowie [23] herangezogen. Die Ergebnisse stimmten in beiden Fällen innerhalb der Genauigkeit der graphischen Darstellung mit denen von Bowie überein. Die CPU-Zeiten lagen bei 11 min (FEM) bzw. 26 sec (BEM) für die Berechnung von K_I und K_{II} . Am Beispiel einer rechteckigen, durch Vorgabe der Verschiebungen gezogenen Rechteckscheibe mit zentralem Innenriß wurde der Einfluß der Anisotropie untersucht. Für den isotropen Fall liegen hier Ergebnisse von Isida [24] vor. Bei isotropen BEM-Rechnungen zeigt sich, daß hier die größte mögliche Vernetzung (Bild 6 unten) bei Verwendung der Fundamentallösung a zu einem Fehler von 5 % führt. Offenbar ist hier die Diskretisierung der rißspitzennahen Seitenbereiche zu grob. Eine Vernetzung mit 8 Elementen (Bild 6 oben) führt zur Übereinstimmung mit Isida's Ergebnis innerhalb der Genauigkeit der graphischen Darstellung. Als anisotrope Modellsubstanzen wurden die Alkalihalogenide LiF und KBr gewählt, die einen relativ großen elastischen Anisotropieparameter aufweisen. Durch Drehen der kristallographischen Hauptachse aus der Symmetrielage heraus läßt sich damit monoklines (Drehen in der Ebene) und triklines (Drehen aus der Ebene heraus) Materialverhalten modellieren. Bild 7 zeigt die Verläufe der normierten Spannungsintensitätsfaktoren F_1 und F_2 . Der Anisotropieeffekt beträgt hier zwischen 10 und 20 % von K_I . Um die Fundamentallö-

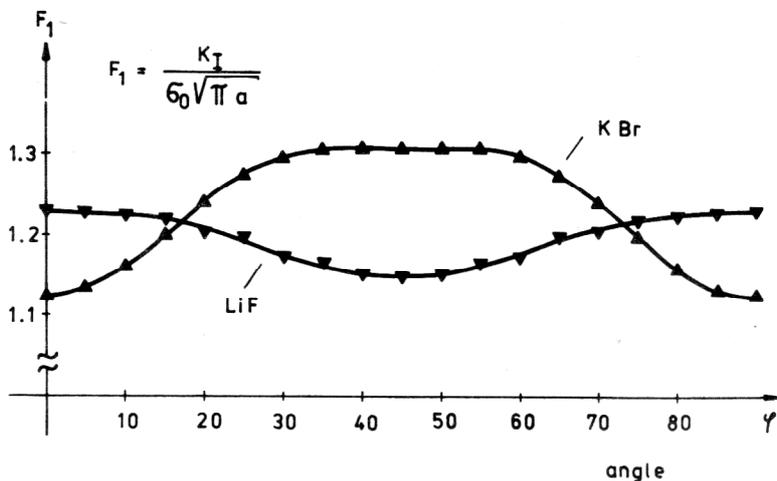
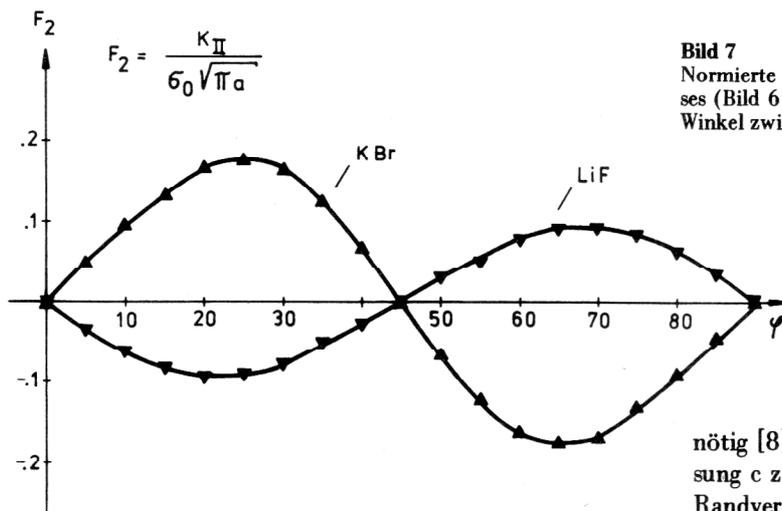


Bild 7

Normierte Spannungsintensitätsfaktoren des zentralen Innenris- ses (Bild 6) in einer rechteckigen anisotropen Zugprobe. φ ist der Winkel zwischen Zugrichtung und kristallographischer Achse



nötig [8]. Das trifft insbesondere auf die Fundamentallö- sung c zu. Es sei bemerkt, daß die Generierung der BEM- Randvernetzung im ebenen Falle extrem einfach ist. Das gilt auch für die Generierung der Substrukturgrenzen, für die in aller Regel Geraden gewählt werden können. Die guten Ergebnisse auch der Standardvariante (Bild 2 und 3) weisen darauf hin, daß Randintegralmethoden auch für räumliche elastostatische Rechnungen gegenüber der BEM favorisiert sind. Wegen der einfachen Handhabung empfiehlt sich die Entwicklung von BEM-Programmen für Kleinrechner, welche in den verschiedensten Institu- tionen zunehmend zur Verfügung stehen.

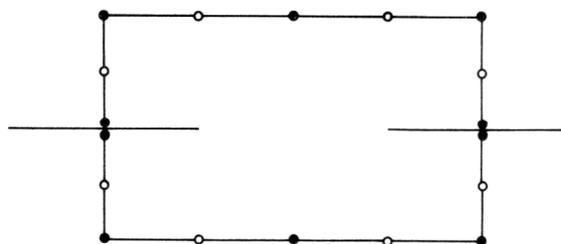


Bild 8

Diskretisierung der „doppelten CT-Probe“ für den Test der Fundamentallösung c

sung c zu testen, wurde eine „doppelte“ CT-Probe unter- sucht (Bild 8). Bemerkenswert ist die gute Übereinstim- mung der Ergebnisse (besser als 1 %) mit denen der „ein- fachen“ Probe auch im Falle der größten Diskretisie- rung der rißabgewandten Seite (Abb. 4 unten) der ein- fachen Probe.

6. Schlußbemerkung

Die Überlegenheit der BEM über die FEM bei der Lösung ebener elastostatischer Rißprobleme ist nach Aussage der vorgestellten Rechenbeispiele evident. Um aus der Ver- wendung spezieller Fundamentallösungen vollen Nutzen zu ziehen, ist die Realisierung einer Substrukturtechnik

LITERATUR

- [1] Brebbia, C., Telles, J. C. F. and Wrobel, L.: Boundary Element Techniques – Theory and Applications. Berlin-Heidelberg-New York 1984.
- [2] Brebbia, C. A. (Ed.): Boundary Element Methods. Proceedings of the Third International Seminar, Irvin, California, July 1981. Berlin-Heidelberg-New York 1981.
- [3] Brebbia, C. A. (Ed.): Boundary Element Methods in Engineering. Proceedings of the Fourth International Seminar, Southampton, England, September 1982, Berlin-Heidelberg-New York 1982.
- [4] Brebbia, C. A., Futagami, T. and Tanaka, M. (Eds.): Boundary Elements. Proceedings of the Fifth International Conference, Hiroshima, Japan, November 1983, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1983.
- [5] Tong, P., Pian, T. H. H. and Lasry, S. J.: A Hybrid Element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity. Int. J. num. Meth. Eng. 7,277-308 (1973).
- [6] Atluri, S. N., Kobayashi, A. S. and Nakagaki, M.: An Assumed Displacement Hybrid Finite-Element Model for Linear Fracture Mechanics. Int. J. Fracture 11, 257 – 271 (1975).

- [7] Kuna, M., Khanh, D. Q.: Ein spezielles Hybrid-Rißelement für die Spannungsanalyse ebener Körper mit Rissen. VIII. IKM Weimar 1978, Berichte Bd. 2, 71 – 76.
- [8] Cruse, T. A.: Two- and Three-dimensional Problems of Fracture Mechanics. In Banerjee, P. K. and Butterfield, R. (Eds.): *Developments in Boundary Element Methods-1*, London 1979, S. 97 – 120.
- [9] Smith, R. N. L. and Mason, J. C.: A Boundary Element Method for Curved Crack Problems in Two Dimensions. In [3], 472 – 484.
- [10] Sladek, V. and Sladek, J.: Three Dimensional Curved Crack in an Elastic Body. *Int. J. Solids Structures* 19, 425 – 436 (1983).
- [11] Smith, R. N. L. and Mason, J. C.: Prediction of Crack Growth Direction Using the Boundary Element Method. In [4], 495 – 503.
- [12] Tamura, H. and Nagao, Y.: Application of the Boundary Element Method to Fracture Mechanics Problems. In [4], 471 – 479.
- [13] Luchi, M. L. and Poggialini, A.: Computation of 3-Dimensional Stress Intensity Factors Using Special Boundary Elements. In [4], 461 – 469.
- [14] Patterson, C. and Sheikh, M. A.: Non-Conforming Boundary Elements for Stress Analysis. In [2], 137 – 152.
- [15] Danson, D. J.: BEASY – A Boundary Element Analysis System. In [3], 557 – 575.
- [16] Gakwaya, A., Dhatt, G. and Cardou, A.: An Implementation of Stress Discontinuity in the Boundary Element Method. In [3], 233 – 253.
- [17] Snyder, M. D. and Cruse, T. A.: Boundary Integral Equation Analysis of Cracked Anisotropic Plates. *Int. J. Fracture* 11, 315 – 328 (1975).
- [18] Kuhn, G.: Numerische Behandlung von Mehrfachrissen in ebenen Scheiben. *ZAMM* 61, T 105 – T 106 (1981).
- [19] Maschke, H.: Ein Spannungsfunktionstensor für den allgemeinen Fall der linearen inkompatiblen Elastizitätstheorie. *ZAMM* 64, 62 – 64 (1984).
- [20] Lachat, J. C. and Watson, J. O.: Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 10, 991 – 1005 (1976).
- [21] Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R.: *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Hellertown 1973.
- [22] Kuna, M., Wiltinger, L. und Altenbach, J.: CRACK 2D – Ein Finite-Element-Programm zur bruchmechanischen Analyse ebener elastostatischer Rißprobleme. *Maschinenbautechnik* 30, 75 – 78 (1981).
- [23] Bowie, O. L.: Solution of Plane Crack Problems by Mapping Techniques. In Sih, G. C. (Ed.): *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Leyden 1973, S. 1 – 55.
- [24] Isida, M.: Method of Laurent Series Expansion for Internal Crack Problems. *Ebenda* S. 56 – 130.

Anschrift des Verfassers:

Dr. H. Maschke
 Akademie der Wissenschaften der DDR
 Institut für Festkörperphysik und
 Elektronenmikroskopie
 4020 Halle
 Weinberg, Postfach 250