

Fiktive Randmembranelemente als Grundlage einer verbesserten Spannungsberechnung

Eckhard Scholz, Johannes Altenbach

1. Einleitung

Bei der Dimensionierung hochbeanspruchter Bauteile spielt die genaue Kenntnis des Spannungszustandes eine entscheidende Rolle. Da die Spannungsmaxima bei einer Vielzahl der Probleme der linearen Elastizitätstheorie an der Oberfläche eines Bauteiles auftreten, ist insbesondere die genaue Berechnung der Oberflächenspannungen von wesentlicher Bedeutung. Bei Finite-Element-Modellen auf der Grundlage der Verschiebungsgrößenmethode erfordert die Berechnung hinreichend genauer Spannungswerte aufgrund der niedrigen Konvergenzordnung der Spannungen gegenüber den Verschiebungen einen sehr viel höheren Aufwand als die Berechnung des Verschiebungszustandes. In der vorliegenden Arbeit wird die Möglichkeit einer verbesserten Oberflächenspannungsberechnung mit Hilfe spezieller fiktiver Randmembranelemente untersucht und getestet.

2. Die Spannungsberechnung der Elemente des PS-COSAR

Bei den im Programmsystem COSAR/E84 verwendeten dreidimensionalen Elementen mit quadratischem Verschiebungsansatz handelt es sich um isoparametrische Vollkörperelemente. Eine ausführliche Beschreibung dieser Elemente befindet sich in [1], [6] und [7]. Als Ergänzung zu diesen Vollkörperelementen wurden zur Simulation von Versteifungen und Bewehrungen die in Bild 1 dargestellten räumlichen Stab- und Flächenelemente entwickelt. Diese sogenannten Membranelemente sind ebenfalls isoparametrische Elemente mit quadratischen Verschiebungsansätzen und drei Verschiebungsfreiheitsgraden je Knoten. Eine detaillierte Ableitung der Elementgleichungen befindet sich in [1].

Nach der Ausführung einer Verschiebungsberechnung erfolgt die Spannungsberechnung für die Vollkörperelemente im Innern und auf dem Rand eines Bauteils bezüglich eines lokalen Koordinatensystems (n, t, s) in gleicher Form entsprechend den Gln. (1).

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_n + \nu(\epsilon_t + \epsilon_s)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_t + \nu(\epsilon_n + \epsilon_s)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_s &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_s + \nu(\epsilon_n + \epsilon_t)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \tau_{nt} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{nt}; \quad \tau_{ts} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{ts}; \\ \tau_{ns} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{ns} \end{aligned} \quad (1)$$

Für die Flächenmembranelemente RKM 24 und DKM 18, die keine Belastung in Normaleinrichtung aufnehmen können, gelten die Gln. (2).

$$\begin{aligned} \sigma_t^* &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_t + \nu\epsilon_s] - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \sigma_s^* &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_s + \nu\epsilon_t] - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \tau_{ts} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{ts} \end{aligned} \quad (2)$$

Entsprechend erfolgt die Spannungsberechnung für das Stabmembranelement SKM 9 nach Gl. (3).

$$\sigma_t^{**} = E\epsilon_t - E\alpha T \quad (3)$$

3. Berechnung der Oberflächenspannungen beim räumlichen Spannungszustand

Eine verbesserte Spannungsberechnung in der hier beschriebenen Form ist für lastfreie bzw. normal belastete Ränder durchführbar. Die Verbesserung erstreckt sich auf die beiden Normalspannungskomponenten σ_s und σ_t tangential zum Rand der Struktur.

Es sei ein Rand mit einer Flächenlast der Intensität p belastet. Somit ergibt sich für diesen Rand die Normalspannung σ_n zu

$$\sigma_n = p. \quad (4)$$

Damit folgt aus der ersten Gleichung von (1):

$$p = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_n + \nu(\epsilon_t + \epsilon_s)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu}. \quad (5)$$

Stellt man Gl. (5) nach ϵ_n um und setzt in die beiden verbleibenden Gln. (1) ein, ergeben sich die Gln. (6).

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_t + \nu\epsilon_s] + \frac{\nu}{1-\nu} p - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \sigma_s &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_s + \nu\epsilon_t] + \frac{\nu}{1-\nu} p - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \end{aligned} \quad (6)$$

Vergleicht man die Gln. (6) mit den Gln. (2), so lassen sich die Gln. (6) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_t^* &= \sigma_t^* + \frac{\nu}{1-\nu} p \\ \bar{\sigma}_s^* &= \sigma_s^* + \frac{\nu}{1-\nu} p. \end{aligned} \quad (7)$$

Das heißt, daß an einem normal belasteten Strukturrand die Membranelemente in der Lage sind, die beiden Normalspannungskomponenten σ_t und σ_s zu berechnen.

Daß die Spannungskomponenten $\bar{\sigma}_t^*$ und $\bar{\sigma}_s^*$ verbesserte Werte darstellen, soll folgender kurzer Vergleich veranschaulichen. Bei beiden Berechnungen sind die Ausgangsgrößen die Dehnungen, die aufgrund des Näherungscharakters der FEM gegenüber einer analytischen Lösung in der Regel fehlerbehaftet sind, und sich deshalb formal in zwei Anteile zerlegen lassen.

$$\begin{aligned} \epsilon_n \text{ FEM} &= \epsilon_n \text{ anal.} + \Delta \epsilon_n & \sigma_n \text{ FEM} &= \sigma_n \text{ anal.} + \Delta \sigma_n \\ \epsilon_t \text{ FEM} &= \epsilon_t \text{ anal.} + \Delta \epsilon_t & \sigma_t \text{ FEM} &= \sigma_t \text{ anal.} + \Delta \sigma_t \\ \epsilon_s \text{ FEM} &= \epsilon_s \text{ anal.} + \Delta \epsilon_s & \sigma_s \text{ FEM} &= \sigma_s \text{ anal.} + \Delta \sigma_s \end{aligned} \quad (8)$$

$\Delta \epsilon$ und $\Delta \sigma$ sei der Fehler gegenüber einer exakten analytischen Lösung. Setzt man jetzt die Dehnungen aus den Gln. (8) in die Gln. (1) ein, so bestimmt sich der Fehler in den Spannungswerten entsprechend den Gln. (9).

$$\Delta \sigma_n = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \Delta \epsilon_n + \nu (\Delta \epsilon_t + \Delta \epsilon_s)]$$

$$\Delta \sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \Delta \epsilon_t + \nu (\Delta \epsilon_n + \Delta \epsilon_s)]$$

$$\Delta \sigma_s = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) \Delta \epsilon_s + \nu (\Delta \epsilon_n + \Delta \epsilon_t)] \quad (9)$$

Für die Membranspannungsberechnung nach Gl. (2) ergibt sich der Fehler in den Normalspannungskomponenten zu:

$$\Delta \bar{\sigma}_t^* = \frac{E}{1-\nu^2} [\Delta \epsilon_t + \nu \Delta \epsilon_s]$$

$$\Delta \bar{\sigma}_s^* = \frac{E}{1-\nu^2} [\Delta \epsilon_s + \nu \Delta \epsilon_t]. \quad (10)$$

Da die berechneten Dehnungen als Ausgangsgrößen identisch sind, lassen sich die Gln. (9) und (10) direkt gegenüberstellen. Dabei wird deutlich, daß die Verbesserung der Spannungswerte der Membranspannungsberechnung aus der Einarbeitung der bekannten Spannungskomponente $\sigma_n = p$ resultiert, die eine Verwendung der in der Regel fehlerbehafteten Größe ϵ_n nicht notwendig werden läßt. Die Schubspannungskomponenten werden nach wie vor in unveränderter Form ermittelt.

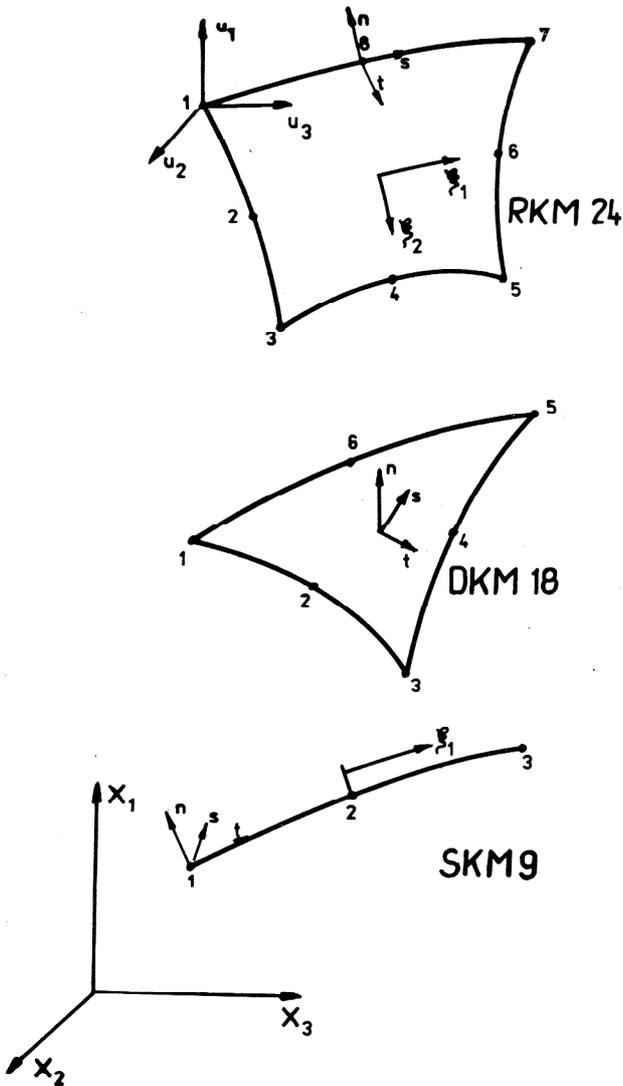


Bild 1
Räumliche isoparametrische Flächen- und Stabmembranelemente des Programmsystems COSAR mit quadratischem Verschiebungsansatz

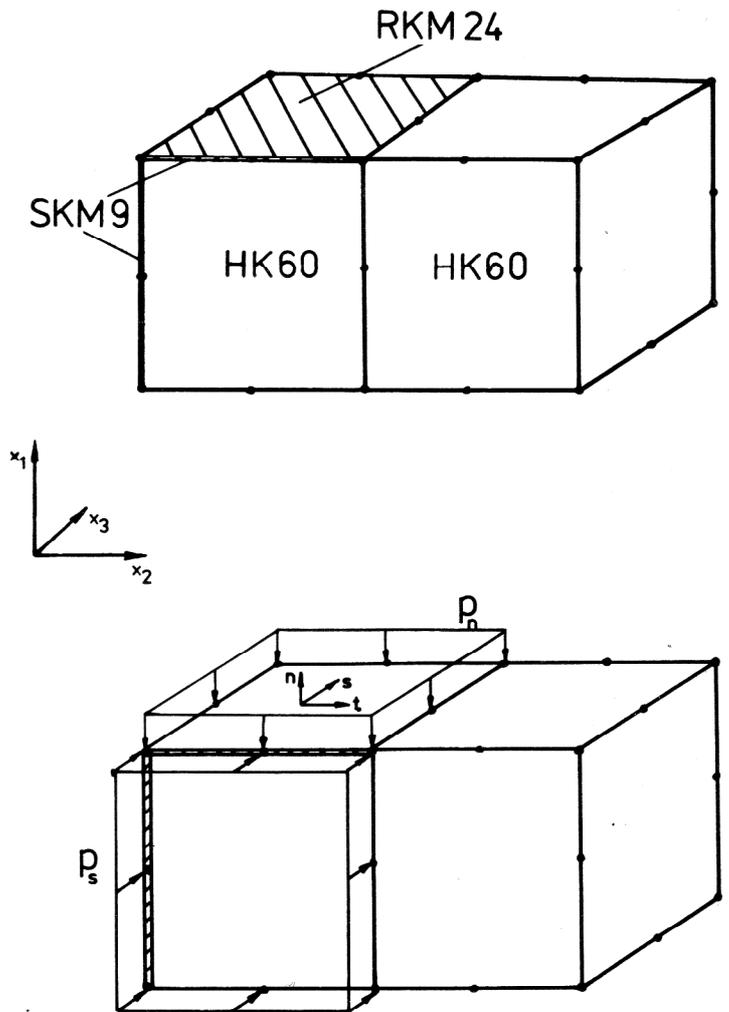


Bild 2
Verwendung von Flächen- bzw. Stabmembranelementen zur Spannungsberechnung auf Oberflächen bzw. an Kanten dreidimensionaler FE-Modelle

In analoger Weise läßt sich das Stabmembranelement aus Bild 1 auf die Spannungsberechnung der Normalspannungskomponente entlang einer Strukturkante anwenden, wenn als Randbedingung zwei Spannungskomponenten in Form der Belastungen bekannt sind, vgl. Bild 2.

$$\sigma_n = p_n ; \sigma_s = p_s \quad (11)$$

Damit ergibt sich aus den ersten drei Gleichungen (1) durch Elimination von ϵ_n und ϵ_s :

$$\sigma_t = E\epsilon_t + \nu[p_n + p_s] - E\alpha T. \quad (12)$$

Mit Gl. (3) erhält man dann:

$$\bar{\sigma}_t^{**} = \sigma_t^{**} + \nu[p_n + p_s]. \quad (13)$$

Dadurch, daß jetzt der Fehlereinfluß von ϵ_n und ϵ_s über die Einarbeitung der Randbedingungen (11) vermindert worden ist, ergibt sich eine gute Verbesserung der Normalspannungskomponente σ_t .

4. Berechnung der Randspannungen beim ebenen Spannungszustand

Die Spannungsberechnung für den ebenen Spannungszustand erfolgt entsprechend den Gln. (14).

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_n + \nu\epsilon_t] - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_t + \nu\epsilon_n] - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \tau_{nt} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{nt} \end{aligned} \quad (14)$$

Das in Bild 3 vorgestellte ebene Stabmembranelement SKM 6 berechnet seine Zugspannungskomponente σ_t^{**} zu:

$$\sigma_t^{**} = E\epsilon_t - E\alpha T. \quad (15)$$

Mit der Spannungsrandbedingung (16),

$$\sigma_n = p \quad (16)$$

ergibt sich aus der ersten der Gln. (14) für ϵ_n :

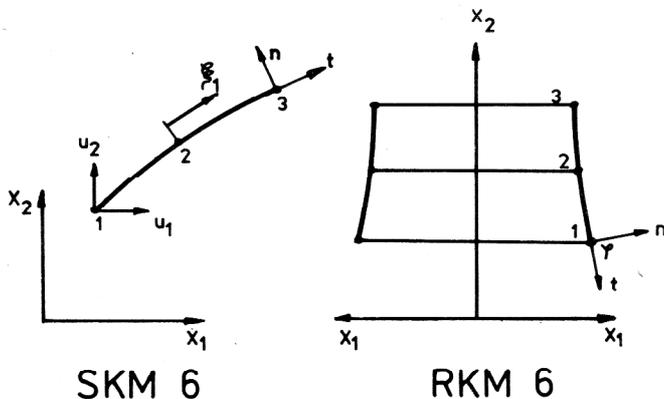


Bild 3
Ebenes Stabmembran- bzw. Ringmembranelement des Programmsystems COSAR

$$\epsilon_n = \frac{1-\nu^2}{E} \left(p + \frac{E\alpha T}{1-\nu} \right) - \nu\epsilon_t. \quad (17)$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung (14) erhält man damit:

$$\sigma_t = E\epsilon_t + \nu p - E\alpha T. \quad (18)$$

Unter Einbeziehung von Gl. (15) läßt sich Gl. (18) dann durch Gl. (19) ausdrücken:

$$\bar{\sigma}_t^{**} = \sigma_t^{**} + \nu p. \quad (19)$$

In gleicher Weise lassen sich analog auch die Gleichungen des ebenen Verzerrungszustandes beschreiben, auf die jedoch an dieser Stelle verzichtet werden soll, da sich dadurch nichts qualitativ Neues ergibt.

5. Berechnung der Oberflächenspannungen beim rotationssymmetrischen Spannungszustand

Die Spannungsberechnung für den rotationssymmetrischen Spannungszustand erfolgt entsprechend den Gleichungen (20).

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\epsilon_n + \nu(\epsilon_t + \epsilon_\varphi)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\epsilon_t + \nu(\epsilon_n + \epsilon_\varphi)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\epsilon_\varphi + \nu(\epsilon_n + \epsilon_t)] - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \\ \tau_{nt} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \gamma_{nt} \end{aligned} \quad (20)$$

Das rotationssymmetrische Ringmembranelement RKM 6, vgl. Bild 3, berechnet eine Normalspannungskomponente σ_t in Längsrichtung und die Ringspannungskomponente σ_φ entsprechend den Gln. (21).

$$\begin{aligned} \sigma_t^* &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_t + \nu\epsilon_\varphi] - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \\ \sigma_\varphi^* &= \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_\varphi + \nu\epsilon_t] - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \end{aligned} \quad (21)$$

Unter Einarbeitung der Spannungsrandbedingung nach Gl. (22),

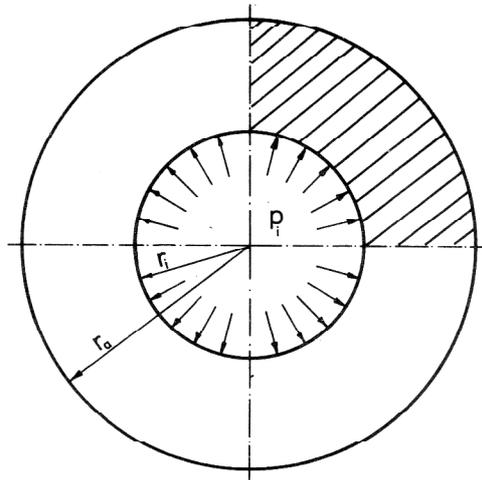
$$\sigma_n = p \quad (22)$$

erhält man für die beiden verbleibenden Normalspannungskomponenten unter Verwendung der Gln. (21) folgende Form:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_t^* &= \sigma_t^* + \frac{\nu}{1-\nu} p \\ \bar{\sigma}_\varphi^* &= \sigma_\varphi^* + \frac{\nu}{1-\nu} p. \end{aligned} \quad (23)$$

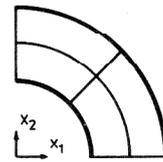
6. Numerische Tests

In diesem Abschnitt soll anhand von Testbeispielen die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Membranelemente untersucht werden.

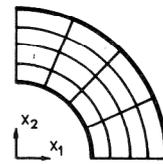


$r_i = 50 \text{ mm}$ Dicke 1 mm
 $r_a = 100 \text{ mm}$
 $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$ $p_i = 200 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0,3$

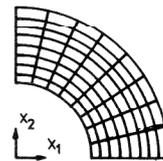
Bild 4
Mechanisches Modell des Testbeispiels Kreisringscheibe unter Innendruck



Variante 1
 4 Elem.
 42 Frgr.



Variante 2
 16 Elem.
 130 Frgr.

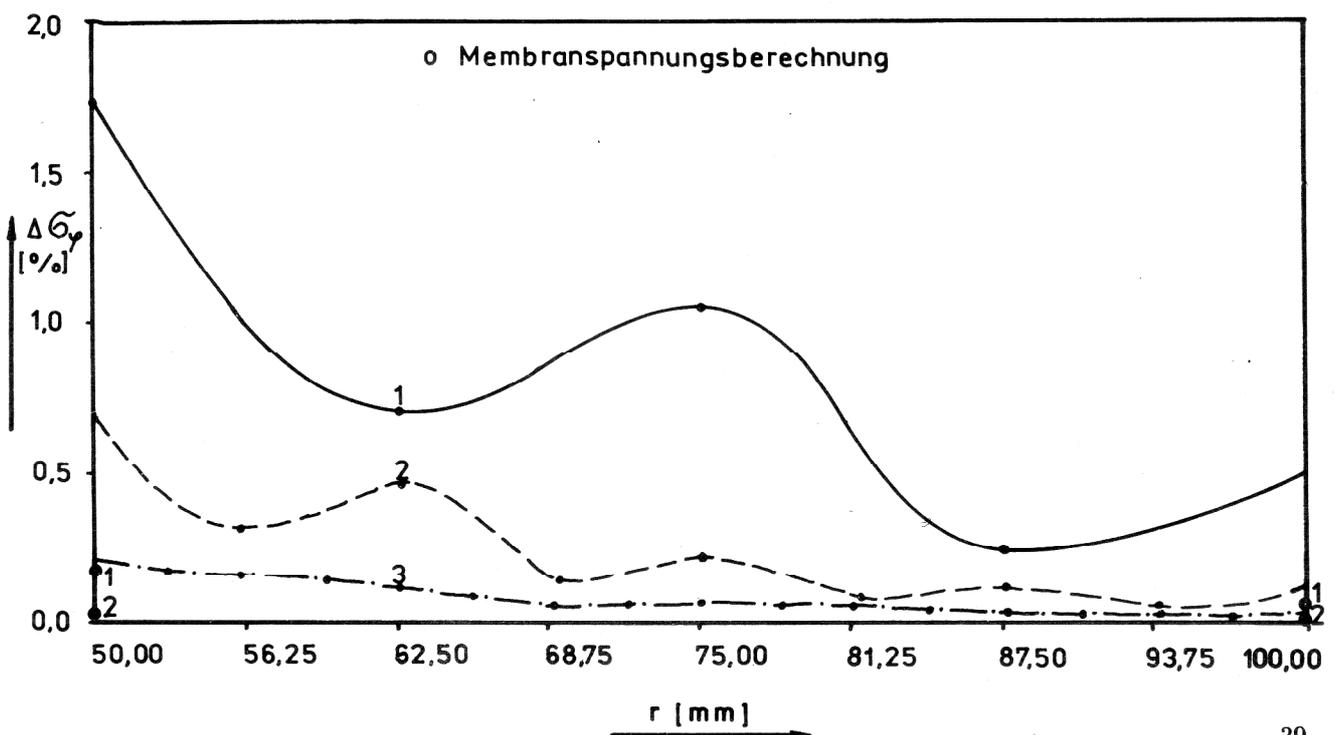


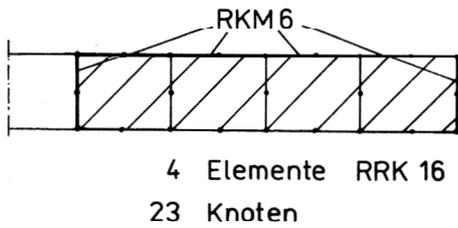
Variante 3
 64 Elem.
 450 Frgr.

Bild 5
Vernetzungsvarianten des Testbeispiels Kreisringscheibe

Bild 6
Ergebnisse der Spannungsberechnung für das Testbeispiel Kreisringscheibe unter Innendruck

Variante	anal. Lös.		1		2		3				
r [mm]	σ_φ [N/mm]	α_φ	Δ [%]	$\bar{\sigma}_\varphi^*$	Δ	σ_φ	Δ	$\bar{\sigma}_\varphi^*$	Δ	σ_φ	Δ
50,00	333,33	339,1	1,73	332,7	0,20	335,6	0,68	333,2	0,02	334,0	0,20
56,25	277,36					276,3	0,32			277,9	0,16
62,50	237,33	235,0	0,70			238,9	0,47			237,7	0,11
68,75	207,71					207,2	0,15			208,0	0,05
75,00	185,18	188,7	1,06			185,9	0,22			185,4	0,07
81,25	167,65					167,4	0,08			167,8	0,05
87,50	153,74	153,0	0,22			154,1	0,11			153,8	0,02
93,75	142,52					142,4	0,04			142,6	0,02
100,00	133,33	135,0	0,50	133,2	0,05	133,7	0,11	133,3	0,00	133,4	0,02





r [mm]	analyt. Lösung	RRK 16		RKM 6 (horizontal)		RKM 6 (vertikal)	
	σ_φ [N/mm]	σ_φ	Δ [%]	$\bar{\sigma}_\varphi^*$	Δ	$\bar{\sigma}_\varphi^*$	Δ
50,00	333,33	337,41	1,22	336,05	0,82	333,15	0,05
56,25	277,36	275,84	0,46	276,38	0,29		
62,50	237,33	239,84	0,75	238,91	0,47		
68,75	207,71	206,87	0,25	207,19	0,16		
75,00	185,18	186,33	0,36	185,90	0,22		
81,25	167,65	167,23	0,13	167,38	0,08		
87,50	153,74	154,36	0,19	154,13	0,12		
93,75	142,52	142,31	0,06	142,39	0,04		
100,00	133,33	133,78	0,13	133,63	0,09	133,33	0,00

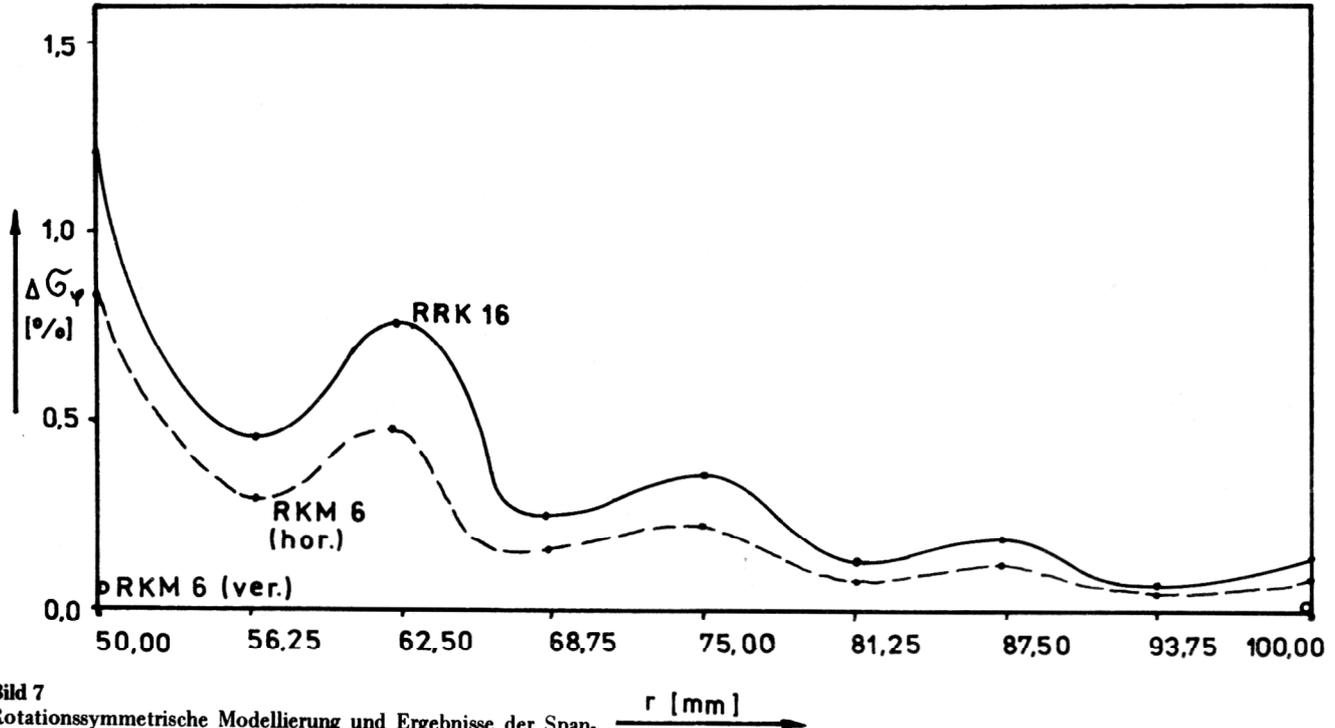


Bild 7
Rotationssymmetrische Modellierung und Ergebnisse der Spannungsberechnung des Testbeispiels Kreisringscheibe unter Innendruck

Als erstes Beispiel wurde eine Kreisringscheibe unter Innendruck (Bild 4) untersucht, von der aus Symmetriegründen nur eine Viertelscheibe vernetzt wurde. Die drei berechneten Varianten sind in Bild 5 dargestellt, wobei an den dick ausgezogenen Kanten zusätzlich Randmembranelemente des Typs SKM 6 mitvernetzt wurden. Diese fiktiven Membranelemente dienen lediglich der Spannungsberechnung. Sie führen zu keiner Beeinflussung der Steifigkeit der Struktur. In Bild 6 sind die Ergebnisse der Spannungsberechnung der drei Varianten aufgetragen und gegenübergestellt.

An diesem Beispiel zeigt sich, daß die Werte der Membranspannungsberechnung deutlich besser sind als die der herkömmlichen Spannungsberechnung. Die Spannungsmaxima am Innenrand wurden mit der Membranspannungsberechnung der Variante 1 noch genauer berechnet als mit der herkömmlichen Spannungsberechnung der Variante 3, die wesentlich aufwendiger ist. Das gleiche mechanische Modell wurde entsprechend Bild 7 mit rotationssymmetrischen Elementen vernetzt, wobei der gesamte obere Rand und Innen- und Außenrand mit Membranelementen des Typs RKM 6 ausgestattet wurde. Die Ergebnisse, ebenfalls in Bild 7 dargestellt, zeigen deutlich die Überlegenheit der Membranspannungsbe-

rechnung. Die horizontal vernetzten Membranelemente am oberen Rand zeigen für σ_φ den gleichen typischen Fehlerverlauf, wie die rotationssymmetrischen Elemente RRK 16, sind aber deutlich genauer. Außerordentlich gute Ergebnisse liefern die vertikal stehenden Elemente am Innen- und Außenrand der Struktur, die über die Elementlänge hier nur einen konstanten Spannungszustand nachzubilden hatten. Als ein dreidimensionales Problem wurde das sogenannte Leon-Problem, der unendlich ausgedehnten Körper mit kugelförmiger Kerbe unter einachsiger Zugbelastung, berechnet. Das mechanische Modell ist in Bild 8 dargestellt. Als erstes FE-Modell erfolgte eine rotationssymmetrische Berechnung entsprechend Bild 9, wobei neben den Membranelementen die in [13] vorgestellten kompatiblen Übergangselemente mit stückweise quadratischem Verschiebungsansatz verwendet wurden, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden soll. Außerdem wurde eine dreidimensionale Modellierung als Würfel nach Bild 10 vorgenommen, wobei aus Symmetriegründen nur ein Achtel des Würfels betrachtet wurde. Da die Spannungskonzentration von der Kerbe weg rasch abklingt, und die Kerbe gegenüber der Kantenlänge des Würfels klein ist, kann dieser als unendlich ausgedehnt idealisiert werden. Bild 10 zeigt eine re-

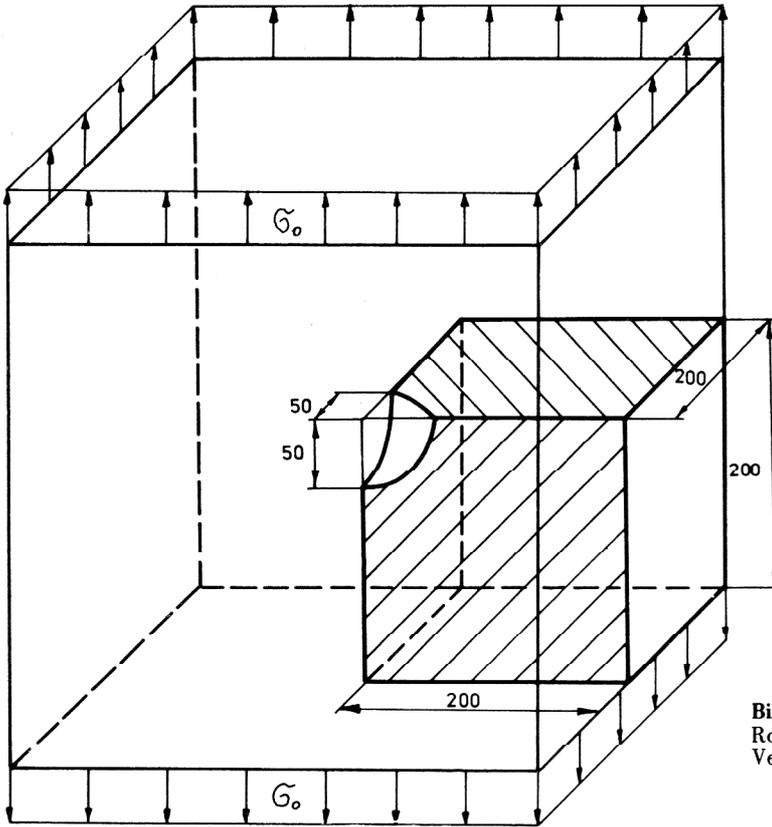


Bild 8
Mechanisches Modell des Leon-Problems (kugelförmige Kerbe im einachsigen Zugfeld)

lativ grobe Vernetzung des Modells, wobei von der Möglichkeit unkonventioneller Elementverknüpfungen über die Realisierung von Zwangsbedingungen Gebrauch gemacht wurde. Die Freiheitsgrade der hierbei entstehenden irregulären Knoten können entsprechend [10] mittels der Penalty-Funktion-Methode eliminiert werden. Für die Membranspannungsberechnung erfolgte eine Auskleidung des Kugelsektors der Kerbe mit den dreidimensionalen Flächenmembranelementen RKM 24 und DKM 18. Die Ergebnisse sind in Bild 11 zusammen mit den bereits vorliegenden Berechnungen aus [9], [11] und [12] dargestellt, wobei die Ergebnisse der Membranspannungsberechnung gegenüber der konventionellen Spannungsberechnung deutlich bessere Werte liefern. Anhand dieser Beispiele zeigt sich, daß bei einer sinnvollen Kombination unkonventioneller Elementverknüpfungen und der Membranspannungsberechnung bei einem relativ geringen Aufwand gute Spannungswerte berechnet werden können. In Bild 12 ist noch einmal $(\sigma_z/\sigma_0)_{max}$ über der Zahl der Freiheitsgrade aufgetragen, um eine Einschätzung von Genauigkeit und Ergebnisaufwand zu veranschaulichen.

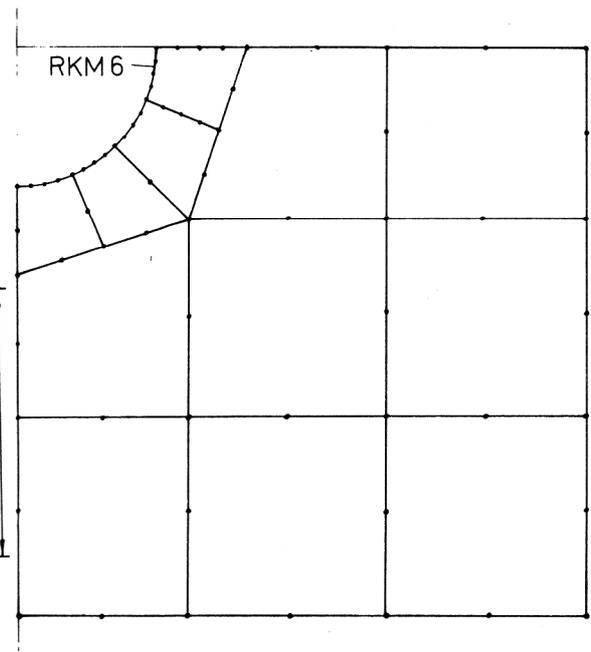


Bild 9
Rotationssymmetrische Vernetzung des Leon-Problems unter Verwendung kompatibler Übergangselemente

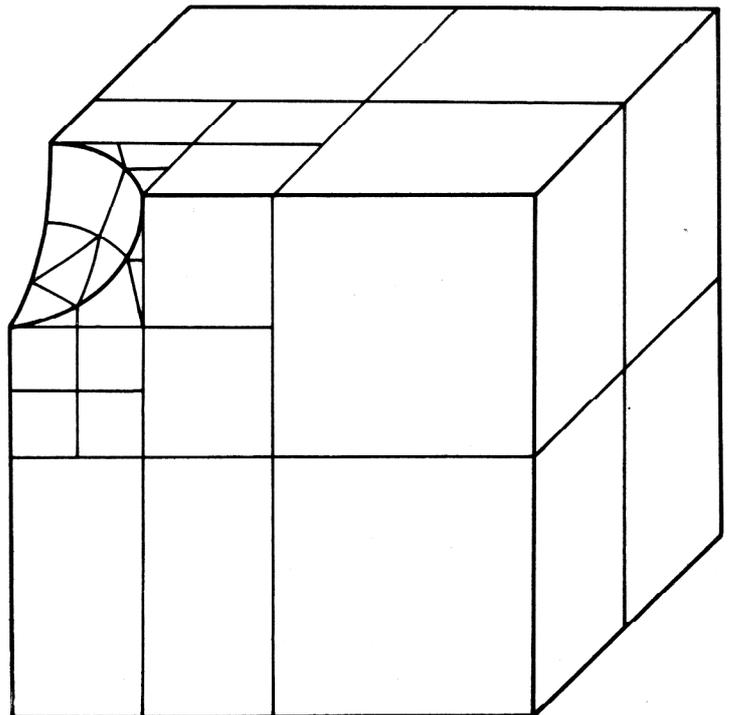
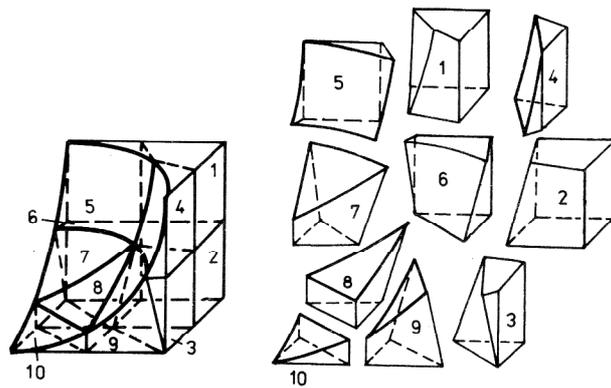


Bild 10
Dreidimensionale Vernetzung des Leon-Problems

Elemente	Freiheitsgrade	$(\sigma_z / \sigma_o)_{max}$	Δ in %	
Neuber	analytisch	2,04		
rotationssymmetrische Modelle				
Dario / Bradley (TRIAX 6)	52 128	254 582	1,934 2,065	5,20 1,20
Schnack (TRIAXC 3)	76 171	306 636	2,11 2,06	3,43 0,98
Schnack (HYBAX)	29 61	136 276	1,86 2,02	8,82 0,98
COSAR (RKM 16, RKM 32)	12 12	134 134	2,103 2,054 ◦	3,08 0,72
dreidimensionale Modelle				
Argyris (TET 4)	1797 1797	1145 1145	2,17 2,15	6,37 5,39
Nguyen (TET 10)	107 276 464	681 1515 2451	1,99 2,08 2,00	2,45 1,96 1,96
COSAR (HK60, AK54, PK45, CK36, WK39)	38 38	807 807	2,094 2,065 ◦	2,63 1,25

◦ Membranspannungsberechnung

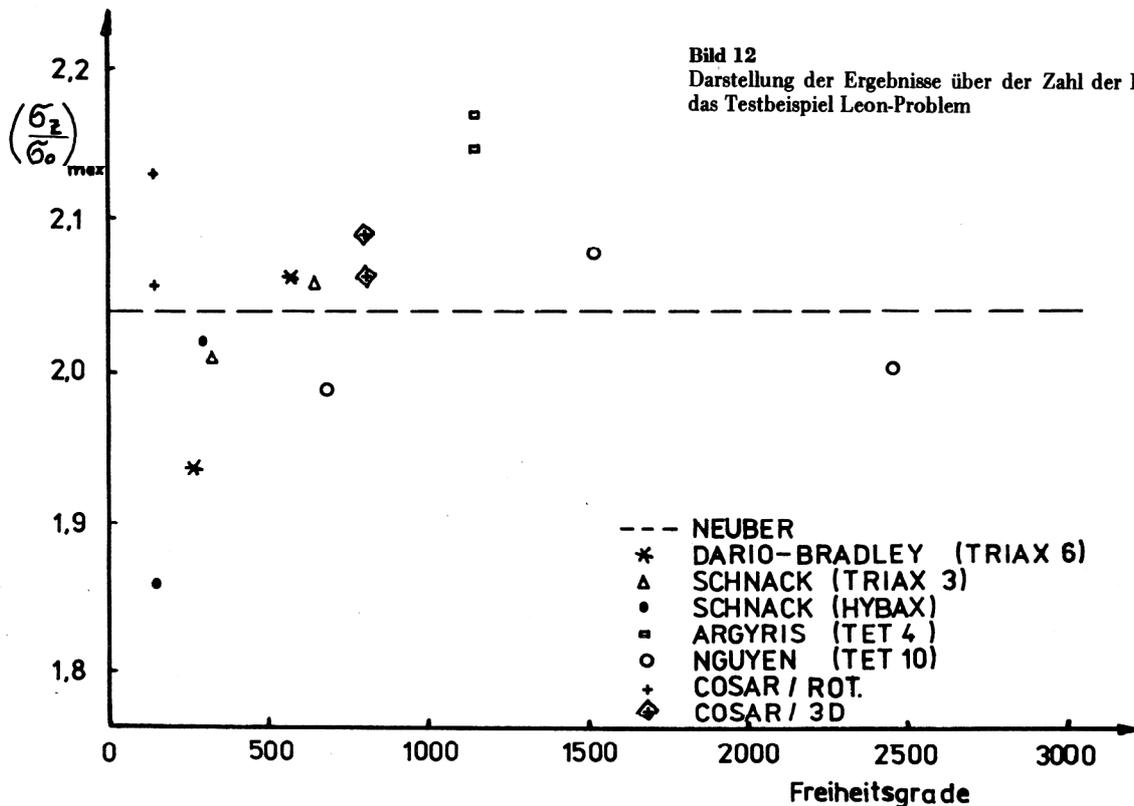


Bild 12
Darstellung der Ergebnisse über der Zahl der Freiheitsgrade für das Testbeispiel Leon-Problem

7. Zusammenfassung

Wie die Ausführungen des vorliegenden Beitrages zeigen, lassen sich die vorgestellten Randmembranelemente sehr effektiv für eine verbesserte Spannungsberechnung einsetzen. Für den hier beschriebenen Zweck der verbesserten Berechnung einzelner Spannungskomponenten muß

eine Beeinflussung der Steifigkeit der Struktur vermieden werden, d. h. man verwendet nur fiktive Membranelemente ohne Steifigkeit, um die vorangegangenen Ableitungen zu veranschaulichen. In Programmen, in denen solche Elemente nicht vorhanden sind, hat die entsprechende Variation der Spannungsberechnung den gleichen Effekt. Da der Algorithmus der Membranspannungsbere-

rechnung ohne Schwierigkeiten in die spannungsberechnenden Programmteile eingearbeitet werden kann, erübrigt sich die Verwendung gesonderter Elemente. Für den Anwender entfällt damit der Aufwand der Implementierung neuer Elemente gänzlich. Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die vorgestellten Membranelemente bei allen Testbeispielen zu einer Verbesserung der in den ersten Abschnitten beschriebenen Spannungskomponenten führten. Die Einarbeitung eines solchen Algorithmus der Spannungsberechnung in vorhandene Programme ist problemlos durchführbar, wobei der rechen-technische Mehraufwand vergleichsweise gering bleibt.

LITERATUR

- [1] Autorenkollektiv: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1982.
- [2] Berger, H.: Beitrag zur Spannungsberechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente auf der Grundlage dreidimensionaler Verschiebungsmodelle, Dissertation A, TH Magdeburg 1982.
- [3] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1983.
- [4] Nutzerhandbuch COSAR/E84. TH Magdeburg, Sektion Maschinenbau, Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik.
- [5] Autorenkollektiv: Lehrbuch Höhere Festigkeit Band 1. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1979.
- [6] Berger, H., Altenbach, J.: Berechnung verbesserter Spannungswerte für dreidimensionale finite Elemente. Technische Mechanik 5 (1984) 2.
- [7] Berger, H., Altenbach, J.: Optimale Punkte für die Spannungsberechnung bei finiten 3D-Verschiebungsmodellen. Technische Mechanik 4 (1983) 3.
- [8] Vocke, W.: Räumliche Probleme der linearen Elastizität. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1969.
- [9] Nguyen, V.: Automatische Netzgenerierung für dreidimensionale Festigkeitsberechnung mit der Methode der finiten Elemente. VDI-Verlag GmbH Düsseldorf Reihe 1 Nr. 65.
- [10] Gabbert, U.: Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in der FEM mittels der Penalty-Funktion-Methode. Technische Mechanik 4 (1983) 2.
- [11] Neuber, H.: Kerbspannungslehre – Grundlage für genaue Festigkeitsberechnungen. Springer Verlag Berlin/W. 1958.
- [12] Schnack, E.: Beitrag zur Berechnung rotationssymmetrischer Spannungskonzentrationsprobleme mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation Technische Universität München 1973.
- [13] Scholz, E., Altenbach, J.: Kompatible Übergangselemente für lokale Netzverfeinerungen bei 2D- und 3D-Finite-Elemente-Modellen. Technische Mechanik 6 (1985) 2.

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. Eckhard Scholz
 Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach
 Technische Hochschule „Otto von Guericke“
 Sektion Maschinenbau
 3010 Magdeburg, PSF 124