

Das Höchstkraft-Kriterium für Plastifizierungskennlinien mit Exponential-Ansatz

W. Seifert

1. Das Höchstkraft-Kriterium

Aus dem Last-Verlängerungs-Diagramm $F(\Delta L)$ des Zugversuches (Bild 1) läßt sich nach Elimination der linear-elastischen Verlängerung ΔL_e (des Probestabes und erforderlichenfalls der Übertragungseinrichtungen) und Division durch Bezugsgrößen die Plastifizierungskennlinie $\sigma(\epsilon_{pl})$ bestimmen (Bild 2).

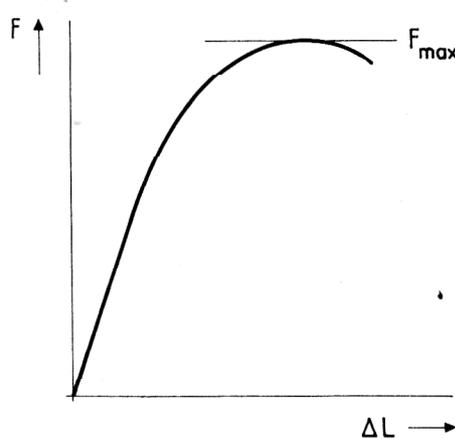


Bild 1
Zerreißdiagramm

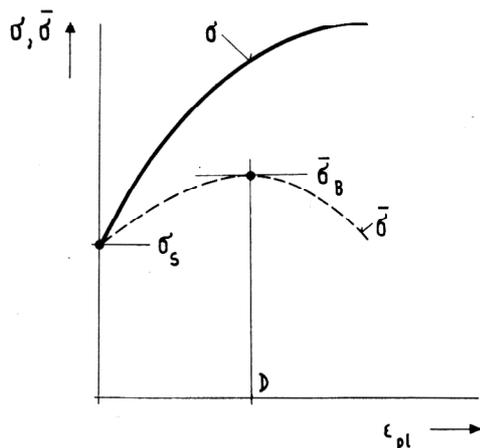


Bild 2
Plastifizierungskennlinie

Aus der Zugkraft F ergibt sich mit der Bezugsgröße „momentaner Querschnitt“ A die Spannung

$$\sigma = F / A \quad (1)$$

Aus der „bleibenden“ Längenänderung $\Delta L - \Delta L_e$ wird mit Bezug auf die Ursprungslänge L_0 die plastische Dehnung

$$\epsilon_{pl} = (\Delta L - \Delta L_e) / L_0 \quad (2)$$

Infolge der Querkontraktion (für plastische Verformung aus der Volumenkonstanz zu bestimmen) ist das Kraftmaximum (Höchstkraft) F_{max} der Zerreißkurve in der Plastifizierungskennlinie nicht mehr explizit erkennbar. Die bleibende Dehnung D bei Höchstkraft kann aus

$$(1 + D) \cdot \frac{d\sigma}{d\epsilon_{pl}}(D) - \sigma(D) = 0 \quad (3)$$

bestimmt werden (3.1./7) in [1]. Damit (3) ein Maximum beschreibt, muß

$$\frac{d^2\sigma}{d\epsilon_{pl}^2}(D) < 0 \quad (4)$$

sein (3.1./8) in [1]; es sind „unterlineare“ Ansätze für Plastifizierungskennlinien notwendig.

Bei der Berechnung von Bauteilen bleibt häufig die Verformung in der Spannungsdefinition unberücksichtigt, es wird die Nennspannung $\bar{\sigma}$ mit Bezug auf den Ursprungsquerschnitt A_0 bestimmt:

$$\bar{\sigma} = F / A_0 \quad (5)$$

Die Höchstkraft wird dabei durch die in den Werkstoff-Standards tabellierte Bruchfestigkeit (Bild 2)

$$\bar{\sigma}_B = F_{max} / A_0 \quad (6)$$

charakterisiert. Zusammen mit D und der Streckgrenze (Spannung des Plastifizierungsbeginns) σ_s können also 3 kennzeichnende Werkstoffgrößen dem Zerreißversuch oder dem Standard entnommen werden. Um beliebige Kombinationen von σ_s , $\bar{\sigma}_B$ und D erfassen zu können, sollten Ansätze von Plastifizierungskennlinien mit 3 freien Koeffizienten benutzt werden.

Außer (2) werden in der Literatur auch andere Dehnungsdefinitionen verwendet, wovon die „logarithmische“ Dehnung (bezogen auf Momentanlänge L)

$$\lambda = (\Delta L - \Delta L_e) / L = \ln(1 + \epsilon_{pl}) \quad (7)$$

wohl die größte Bedeutung besitzt. Bei Ansätzen $\sigma(\lambda)$ ist für (3), (4) noch die innere Ableitung

$$d\lambda / d\epsilon_{pl} = 1 / (1 + \epsilon_{pl})$$

zu berücksichtigen (4.5) in [2].

Ansätze $\sigma(\lambda)$, die (4) erfüllen, benötigen trotz des Bezuges auf den Momentanzustand in (7) zum Beschreiben der momentanen Änderung die Definition eines Ausgangs-(Nenn-) Zustandes.

Hiervon ist nur der lineare Ansatz

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_p \cdot \lambda, \quad \sigma_p > \sigma_s$$

ausgenommen, der aber wegen der 2 freien Koeffizienten auf eine Kopplung der Kenngrößen (Anlage 4/4 in [1]) führt:

$$\left. \begin{aligned} D &= \exp(1 - \sigma_s / \sigma_D) - 1 \\ \bar{\sigma}_B &= \sigma_p / \exp(1 - \sigma_s / \sigma_D) \end{aligned} \right\} (1 + D) \cdot \bar{\sigma}_B = \sigma_p$$

2. Ansatzfunktionen für Plastifizierungskennlinien

Auf Anlage 4/1 von [1] wurden Ansatzfunktionen zusammengefaßt, die die Bedingung (4) erfüllen und 3 freie Koeffizienten besitzen:

$$q = \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_Q} \right)^2 + \frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_L}, \quad (8)$$

$$\sigma = (1 + S \cdot q^M) \cdot \sigma_s, \quad (9)$$

$$\sigma = (1 + q / q_0)^M \cdot \sigma_s, \quad (10)$$

$$\sigma = \sigma_s + (1 - \exp(-q \cdot M)) \cdot \Delta \sigma. \quad (11)$$

In (8) bis (11) ist das Symbol q (verallgemeinerte Dehnung) für ϵ_{pl} (2) oder λ (7) benutzt worden. Der Gültigkeitsbereich der Koeffizienten und das Kennfeld der Lösung wird durch die Definition von q beeinflusst, wie in [3] für (8) bis (10) gezeigt ist.

Eine Literatur-Recherche [4] auf weitere Ansätze von Plastifizierungskennlinien ergab für diese Untersuchung keine weiteren geeigneten Varianten.

Für die Ansätze (8) bis (10) sind Kennfelder entspr. Absatz 3 in [3] veröffentlicht. Der Ansatz (11) wird z. B. von Zouhar [6] mit $q = \epsilon$ und von Backhaus [7] mit $q = \lambda$ benutzt, weshalb auch hierfür Kennfelder bestimmt werden sollen.

3. Kennfelder für Exponential-Ansatz

In (11) beschreibt

- σ_s die Anfangsspannung des Plastifizierens,
- $\sigma_s + \Delta \sigma$ die maximale Spannung,
- M den Dehnungsmaßstab,

Bild 3. Die maximale Spannung wird asymptotisch für $q \rightarrow \infty$ erreicht. Die Bruchfestigkeit ist kleiner als die maximale Spannung:

$$\bar{\sigma}_B < (\sigma_s + \Delta \sigma) / (1 + D).$$

Um den Einfluß der Koeffizienten auf die charakteristischen Größen des Zerreißversuches übersichtlich darstellen zu können, wird (11) umgeformt:

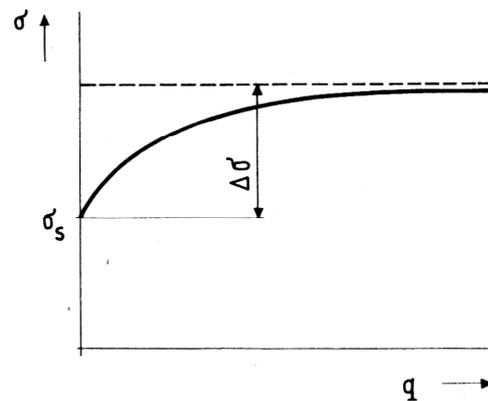


Bild 3
Exponential-Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \sigma / \sigma_s &= (1 - \exp(-M \cdot q) \cdot S) / (1 - S) \\ \text{mit } S &= \Delta \sigma / (\sigma_s + \Delta \sigma). \end{aligned} \right\} (12)$$

Die Lösung für (3) ergibt sich nach [5] bei vorgegebenen Koeffizienten S und D für $q = \epsilon$:

$$\exp(-D \cdot M) \cdot (M \cdot D + M + 1) \cdot S = 1, \quad (13)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_B}{\sigma_s} = \frac{M}{(M \cdot D + M + 1) \cdot (1 - S)} \quad (14)$$

wobei D aus (13) iterativ zu bestimmen ist. Für $q = \lambda$ ist (3) direkt lösbar:

$$D = ((M + 1) \cdot S)^{1/M} - 1, \quad (15)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_B}{\sigma_s} = \frac{M}{((M + 1) \cdot S)^{1/M} \cdot (M + 1) \cdot (1 - S)}$$

Für das Umkehrproblem (Bestimmen der Koeffizienten) gilt für $q = \epsilon$:

$$\ln(M \cdot D + M + 1 - M \cdot \sigma_s / \bar{\sigma}_B) = M \cdot D, \quad (17)$$

$$S = 1 - M / (M \cdot D + M - 1) \quad (18)$$

und für $q = \lambda$:

$$\ln\left(M + 1 - \frac{M}{D + 1} \cdot \frac{\sigma_s}{\bar{\sigma}_B}\right) = M \cdot \ln(D + 1), \quad (19)$$

$$S = 1 - \frac{M}{(M + 1) \cdot (D + 1)} \cdot \frac{\sigma_s}{\bar{\sigma}_B}. \quad (20)$$

Die Gleichungen (17) bzw. (19) sind iterativ zu lösen. Die Lösungen (13) bis (20) sind für BESM 6 der TU Dresden programmiert, Lösungskennfelder enthält [5].

Für den Bereich $D < 0,4$ und $\bar{\sigma}_B / \sigma_s < 4$ sind die direkten Kennfelder in Bild 4 für $q = \epsilon$, Bild 5 für $q = \lambda$ dargestellt.

Ansatz (11) kann für

$$1 > S > 1 / (1 + M), \quad M > 0 \quad (21)$$

alle Kennwert-Kombinationen realisieren.

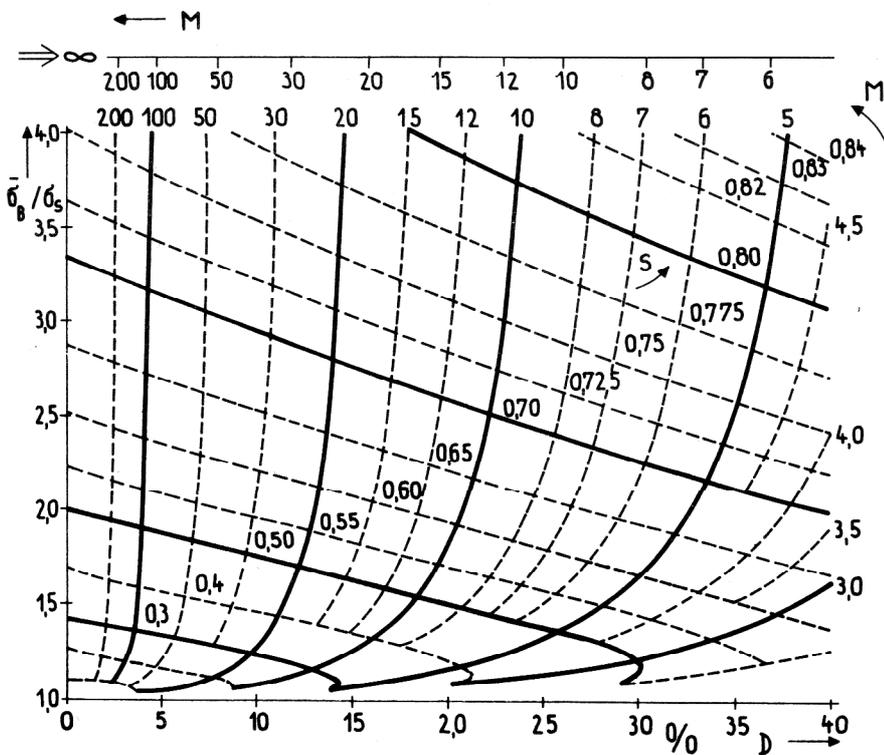


Bild 4
Kennfeld für lineare Dehnung ϵ

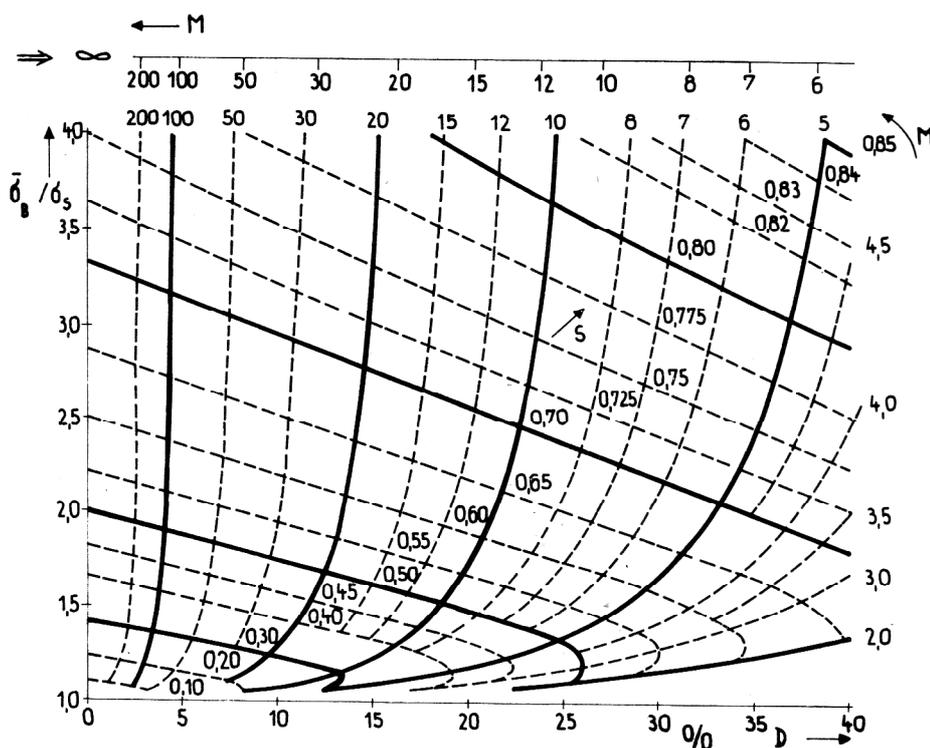


Bild 5
Kennfeld für logarithmische Dehnung λ

Als Grenzwerte ergeben sich:

$$\left. \begin{aligned} M \rightarrow \infty, \quad D \rightarrow 0, \quad \bar{\sigma}_B / \sigma_s &\rightarrow 1 / (1 - S), \\ M \rightarrow 0, \quad D \rightarrow 0, \quad \bar{\sigma}_B / \sigma_s &\rightarrow 1, \\ S \rightarrow 1, \quad D = f(M), \quad \bar{\sigma}_B / \sigma_s &\rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} (22)$$

Für konstantes M wachsen D und $\bar{\sigma}_B / \sigma_s$ monoton.
Für konstantes S wächst $\bar{\sigma}_B / \sigma_s$ monoton, während D ein Maximum besitzt.

Die Kennfelder für lineare und logarithmische Definition der Dehnung stimmen für $D \rightarrow 0$ überein.

Mit wachsendem D gilt zunehmend

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_B / \sigma_s (\epsilon, S) &> \bar{\sigma}_B / \sigma_s (\lambda, S), \\ D (\epsilon, S) &<, > D (\lambda, S); \end{aligned} \right\} (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_B / \sigma_s (\epsilon, M) &> \bar{\sigma}_B / \sigma_s (\lambda, M), \\ D (\epsilon, M) &> D (\lambda, M). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Bei Bedarf können mit dem vorhandenen Programm auch andere Ausschnitte der Kennfelder (einschl. Umkehrproblem) oder einzelne Lösungen berechnet werden.

Symbolik

A	momentaner Querschnitt
A ₀	Ursprungsquerschnitt
D	Dehnung bei Höchstkraft (lin. definiert)
F	Zugkraft
F _{max}	Höchstkraft
L	Momentanlänge
L ₀	Ursprungslänge
ΔL	Längenänderung
ΔL _e	„elastische“ Längenänderung
M	Exponent des Ansatzes
q	verallgemeinerte Dehnung
S	Faktor des Ansatzes
ε	Dehnung (lin. definiert)
ε _p	plastische Dehnung
λ	Dehnung (log. definiert)
σ	Spannung
σ _s	Spannung bei Plastifizierungsbeginn
σ̄	Nennspannung, bezogene Kraft
σ̄ _B	Bruchfestigkeit

LITERATUR

- [1] Seifert, W.: Ein Beitrag zur Schädigungsdefinition bei quasistatischer Zug-Druck-Beanspruchung. Dissertation A, TU Dresden, 1977.
- [2] Backhaus, G.: Deformationsgesetze. Akademieverlag, Berlin, 1983.
- [3] Seifert, W.: Unterlineare Plastifizierungskennlinien (Koeffizienten-Kennfelder). TU Dresden, Weiterbildungszentrum Festkörpermechanik, Konstruktion und rationeller Werkstoffeinsatz, Heft 3/81, S. 46 – 61.
- [4] Mai, D.: Nichtlineare Plastifizierungskennlinien. Großer Beleg, TU Dresden, 1981.
- [5] Boettner, F.: Koeffizienten für Plastifizierung mit maximaler Fließspannung. Großer Beleg, TU Dresden, 1982.
- [6] Zouhar, G.: Verformungslokalisierung in Relation zur Werkstoffstruktur und Beanspruchungsart. Wie [3], S. 101 – 117.
- [7] Backhaus, G.: Spannungs-Deformations-Beziehungen für den plastischen Bereich von Metallen. Festigkeitslehre und Materialverhalten, Tagung der HFR Festkörpermechanik, Dresden, 1976, Bd. B, XXXVIII.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. W. Seifert
 Technische Universität Dresden
 Sektion Grundlagen des Maschinenwesens
 8027 Dresden
 Mommsenstraße 13