

Chemisch verfestigtes Glas - eine bruchmechanische Analyse

Christian Ullner, Ralf Wille

1. Problemstellung

Eine Reihe chemischer Verfahren zur Erhöhung der Bruchfestigkeit von Glaserzeugnissen beruhen auf der Erzeugung einer Druckspannung an der Oberfläche. Ein in der DDR industriell genutztes Verfahren zur chemischen Verfestigung von Erzeugnissen aus Glas basiert auf einem Ionenaustauschprozeß unterhalb der Glastransformationstemperatur. In einer Kaliumnitratschmelze werden bei etwa 400 °C die Natriumionen (Ionenradius 0,98 nm) des Glasnetzwerkes an der Oberfläche durch die größeren Kaliumionen (Ionenradius 0,133 nm) ausgetauscht [1]. Der größere Platzbedarf bewirkt die Entstehung einer Druckspannung, die von der Oberfläche ins Innere des Glases näherungsweise linear abfällt. In einer planparallelen Platte der Dicke h beträgt die innere Spannung $\sigma_i(x)$

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} -P_{\max} \left(1 - \frac{x}{D} - \frac{D}{h}\right) & 0 \leq x \leq D \\ P_{\max} \frac{D}{h} & D \leq x \leq h-D \\ -P_{\max} \left(1 - \frac{x}{D} - \frac{D}{h} + \frac{h}{D}\right) & h-D \leq x \leq h \end{cases} \quad (1)$$

Darin ist x der senkrechte Abstand von der Oberfläche und D die Tiefe des Ionenaustauschprofils. In der Praxis treten folgende Werte auf: $P_{\max} = 400 \dots 800$ MPa; $D = 20 \dots 80$ μm . Es handelt sich um ein schmales und steiles Druckspannungsprofil.

Wir setzen voraus, daß die festigkeitsbestimmenden Defekte Risse senkrecht zur Oberfläche sind und die äußere Belastung durch Biegung der Platte aufgebracht wird

$$\sigma_B = \sigma \left(1 - \frac{2x}{h}\right) \quad (2)$$

Bild 1 veranschaulicht das bruchmechanische Problem. Infolge des überlagerten Spannungsprofils

$$P(x) = \sigma_i(x) + \sigma_B(x) \quad (3)$$

befindet sich der Oberflächenriß teilweise unter Druckspannung. Es ist zu erwarten, daß bei einer äußeren Belastung, die am Rißgrund auf den kritischen Spannungsintensitätsfaktor K_{IC} führt, der Beginn der Rißöffnung $x = b$ zwischen Oberfläche und Nulldurchgang des Spannungsprofils liegt:

$$0 < b < d.$$

Mit dem Problem des teilweise geschlossenen Risses befassen sich unter anderem die Arbeiten [2] bis [4]. Die aufwendige numerische Behandlung von Bakioglu u. a. [3] erfolgt am Beispiel thermisch verfestigter Gläser und ermöglicht auch, den Ort der Rißöffnung zu berechnen. Weniger aufwendig ist die Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren nach der von Green [4] angegebenen

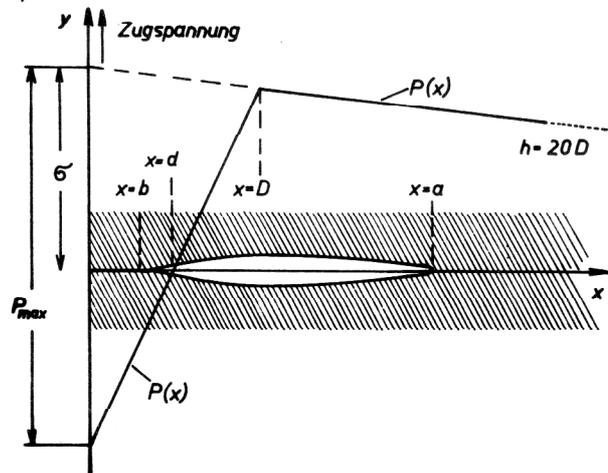


Bild 1
Darstellung des verwendeten Modells für ein chemisch verfestigtes Glas

Formel. Allerdings ist die Angabe des Ortes der Rißöffnung erforderlich, der näherungsweise nach einer von Thresher und Smith [2] angegebenen Formel berechnet werden kann. Für chemisch verfestigte Gläser mit ihrem schmalen, nahezu linear abfallenden Spannungsprofilen basieren die bisherigen Modellbetrachtungen [5], [6] auf der analytischen Form [7], [8]

$$K_I^{(S)} = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^a \frac{P(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (4)$$

die für einen vollgeöffneten Riß im Körperinneren gültig ist.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist ein Vergleich der berechneten Spannungsintensitätsfaktoren mit variablem und festen Ort der Rißöffnung. Die Ergebnisse geben Hinweise, wie mit vertretbarem Aufwand die Festigkeit ionenausgetauschter Gläser aus der Festigkeit der unbehandelten Gläser näherungsweise berechnet werden kann, ohne daß der Ort der Rißöffnung bekannt sein muß.

2. Basismodell B

Als Basismodell dient uns das Modell von Bakioglu [3], [9], das die Bestimmung des wahren Ortes der Rißöffnung ermöglicht. Das in Bild 1 dargestellte zweidimensionale Problem einer homogenen, isotropen elastischen Platte der Dicke h mit dem spannungsfreien Riß kann auf Grund der Linearität als Summe der folgenden beiden Teilprobleme betrachtet werden:

1. Die Platte ohne Riß besitzt die innere Spannung $\sigma_{yy}(x, y) = P(x)$

2. In der von äußeren Beanspruchungen freien Platte mit Riß wirkt nur auf die Rißufer eine Belastung der Form

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -P(x), \quad (b < x < a)$$

Um die Spannungsintensitätsfaktoren bei $x = b$ (Rißöffnung) und $x = a$ (Rißgrund) zu bestimmen, muß nur Problem 2 behandelt werden. Die Lösung dieser Randwertaufgabe führt zur folgenden singulären Integralgleichung

$$\frac{1}{\pi} \int_b^a \left[\frac{1}{t-x} + K(x, t) \right] f(t) dt = P(x), \quad b < x < a \quad (6)$$

mit dem Fredholmschen Kern

$$K(x, t) = \int_0^{\infty} [\kappa(x, t, s) - \kappa(h-x, h-t, s)] ds \quad (7)$$

$\kappa(x, t, s)$

$$= \frac{B(s)P(s)e^{-s(2h+x+t)} - A(s)R(s)e^{-s(2h-x+t)}}{2Z(s)}$$

$$P(s) = e^{2hs} - 1 - 2hs - 2ts(e^{2hs} - 1)$$

$$R(s) = 2hs - 1 + e^{-2hs} - 4ths^2$$

$$Z(s) = (1 - e^{-2hs})^2 - 4h^2s^2e^{-2hs}$$

$$A(s) = 3 - 2(h-x)s + e^{2(h-x)s}$$

$$B(s) = 3 + 2(h-x)s + e^{-2(h-x)s}$$

Hierbei unterliegt die unbekannte Funktion $f(t)$ in (6)

der Zusatzbedingung $\int_b^a f(t) dt = 0$.

Zur Lösung der Integralgleichung (6) in der Standardform (Integration im Intervall $[-1, 1]$) erfolgt für die unbekannte Funktion $f(x)$ der Ansatz

$$f(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} F^*(t)$$

$F^*(t)$ ist in $[-1, 1]$ beschränkt, die Singularität wird ausschließlich vom ersten Faktor repräsentiert. Es wird angenommen, daß $F^*(t)$ in $[-1, 1]$ hinreichend genau durch eine Linearkombination von Tschebyschew-Polynomen 1. Art $T_j(t)$ dargestellt werden kann:

$$F^*(t) \simeq F(t) = \sum_{j=0}^p B_j T_j(t)$$

Dann gilt für die Funktionswerte von $F(t)$ an den Orten der Nullstellen t_k des Tschebyschew-Polynoms 1. Art

$$T_n(t_k) = 0, \quad t_k = \cos \left[\frac{\pi(2k-1)}{2n} \right], \quad k = 1, \dots, n \quad (8)$$

das inhomogene lineare Gleichungssystem der Dimension n

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left[\frac{1}{t_k - x_r} + \pi K(x_r, t_k) \right] F(t_k) = P(x_r); \quad r = 1, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} F(t_k) = 0 \quad (9)$$

Darin ist $K(x_r, t_k)$ der Fredholmsche Kern, Gl. (7), und x_r sind die Nullstellen des Tschebyschew-Polynoms 2. Art in $[-1, 1]$

$$U_{n-1}(x_r) = 0, \quad x_r = \cos \left[\frac{\pi r}{n} \right] \quad (10)$$

Mit Hilfe der Koordinationstransformation

$$t' = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} t; \quad x' = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} x \quad (11)$$

wird das Intervall $[-1, 1]$ auf das reale Intervall $[b, a]$ der Rißausdehnung zurückgeführt. Die Spannungsintensitätsfaktoren an den Rißenden berechnen sich aus der unbekanntem Funktion $f(x)$ der Integralgleichung (6) bzw. aus ihrer approximierten Darstellung $F(x)$:

$$K_{Ib} = \lim_{x \rightarrow b} \sqrt{2\pi(b-x)} f(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{b-a}} F(b) \quad (12)$$

$$K_{Ia} = -\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(a-x)} f(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{b-a}} F(a) \quad (13)$$

Mit Hilfe der Gl. (12) kann der Ort der Rißöffnung $x = b$ für eine vorgegebene Rißlänge a und einen vorgegebenen Spannungsverlauf $P(x)$ bestimmt werden. Dieser ergibt sich aus der physikalisch sinnvollen Bedingung, wonach der Spannungsintensitätsfaktor am Ort der Rißöffnung Null werden muß:

$$K_{Ib} = 0 \quad (14)$$

Somit berechnet sich der Spannungsintensitätsfaktor am Rißgrund $K_I^{(B)} = K_{Ia}$ nach dem Modell B entsprechend der Gl. (13) unter Einhaltung der Bedingung (14).

Die numerische Realisierung des Modells B basiert auf der Lösung des Gleichungssystems (9). Mit Hilfe einer quadratischen Interpolation jeweils an den Enden des Rißöffnungsintervalls werden die Werte $F(b)$ und $F(a)$ durch Extrapolation berechnet. Zur Bestimmung der Rißöffnung nach Gl. (14) wird iterativ vorgegangen: Durch Vorgabe einer geeigneten Anfangsrißöffnung b_0 wird aus $F(x) = 0$ nahe der Stelle $x = b_0$ die neue Rißöffnung b_1 bestimmt. Mit der veränderten Randbedingung wird das Gleichungssystem (9) erneut gelöst usw. bis zur Unterschreitung einer geeignet vorgegebenen Schranke für die Differenz aufeinanderfolgender b -Werte.

Numerische Schwierigkeiten treten bei der Berechnung des Fredholmschen Kernes, Gl. (7) auf. Zähler und Nenner des Integranden verschwinden an der unteren Grenze $s = 0$, so daß neben numerisch vorteilhaften Umstellungen auch eine Reihendarstellung für kleine s erforderlich ist.

Eine Fehlerabschätzung der Lösungen des Gleichungssystems (9) erfolgte auf der Basis der Maximalnorm. Die Kondition der Koeffizientenmatrix lag in der Größenordnung von 10, so daß bei einem relativen Fehler $\epsilon_{rel} < 10^{-5}$ für die Lösung $F(t_k)$ $\epsilon_{rel} < 10^{-4}$ gilt. Durch die erfolgte Extrapolation und durch Ungenauigkeiten in der Erfüllung der Bedingung (14) beträgt letztlich der relative Fehler des berechneten Spannungsintensitätsfaktors $K_I^{(B)}$ weniger als 10^{-3} .

3. Vergleichsmodelle G, H, S

Nach Green [4] beträgt der Spannungsintensitätsfaktor eines bis $x = b$ geschlossenen Kantenrisses der Länge a (ebenes Problem)

$$K_I^{(G)} = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right)} \int_b^a \frac{P(x) f(x) x dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \quad (15)$$

$P(x)$ ist die Spannung, die sich am Ort des Risses befand, bevor dieser eingebracht wurde. Die Korrekturfunktion $f(x)$ wird als Polynom 10. Grades angegeben:

$$f(x) = 1,294 - 0,6857 \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1,1597 \left(\frac{x}{a}\right)^4 - 1,7627 \left(\frac{x}{a}\right)^6 + 1,5036 \left(\frac{x}{a}\right)^8 - 0,5094 \left(\frac{x}{a}\right)^{10} \quad (16)$$

Für die erforderliche Berechnung des Ortes der Riß-Öffnung $x = b$ wird in (4) die Gleichung von Thresher und Smith [2] verwendet, deren Ableitung den Einfluß der freien Oberfläche für den Fall eines Kantensisses unberücksichtigt läßt. Für ein lineares Spannungsprofil $P(x)$ (d. h. nur im Fall $a \leq D$) vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\frac{b}{d} = -\frac{1}{3} \frac{a}{d} + \frac{4}{3} \quad (17)$$

Darin ist d der Ort des Vorzeichenwechsels der Spannung $P(x)$. Für ein chemisch-verfestigtes Glas gilt entsprechend der Gl. (1), (2) und (3)

$$d = \frac{1 - \frac{\sigma}{P_{\max}} - \frac{D}{n}}{1 - \frac{2\sigma}{P_{\max}} - \frac{D}{n}} D \quad (18)$$

Nach Gl. (17) hängt der Ort der Rißöffnung nicht vom Betrag des Spannungsgradienten ab, und für $a \geq 4d$ ist der Riß vollständig geöffnet.

Die Berechnung von $K_I^{(G)}$ (Gl. 15) erfolgt durch numerische Integration, da die in [4] angegebene Rechenvorschrift nicht für den Fall $a > D$ anwendbar ist.

Ist der Riß vollständig geöffnet ($b = 0$), so ist Gl. (15) identisch mit der von Hartranft und Sih [10] angegebenen Formel

$$K_I^{(H)}(x_0) = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{x_0}^a \frac{P(x) f(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (19)$$

wobei $x_0 = 0$ ist. Es handelt sich um die Überlagerung von Lösungen für eine punktförmige Kraft, die senkrecht an den Flanken eines Kantensisses angreift. Die variable untere Integrationsgrenze x_0 kennzeichnet somit, daß auch nur ein Teil der auf den Riß wirkenden Spannungen zur Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors berücksichtigt zu werden braucht, beispielsweise nur die Zugspannungen, falls $x_0 = d$.

Ist eine relative Genauigkeit von etwa 10^{-3} für die Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors ausreichend, kann die Korrekturfunktion $f(x)$ in Gl. (19) durch die lineare Funktion

$$\bar{f}(x) = 1 + C \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad (20)$$

mit $C = 0,344$ ersetzt werden. Für eine konstante Belastung $P(x) = \sigma$ erhält man damit aus Gl. (19) $K_I^{(H)}(0)$

= $1,125 \sigma \sqrt{\pi a}$ (der genauere Wert des Zahlenfaktors beträgt 1,1215).

Für das in den Gln. (1), (2), (3) definierte Spannungsprofil ergibt die Integration von Gl. (19) folgenden Ausdruck:

$a \leq D$:

$$K_I^{(H)}(x_0) = K^* = \sqrt{\pi a} \left\{ \left[\sigma \left(1 + C + \frac{Ca}{h}\right) - P_{\max} \left(\left(1 + C\right) \left(1 - \frac{D}{h}\right) + \frac{Ca}{2D} \right) \right] \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x_0}{a}\right) - \frac{2}{\pi} \left[\sigma \left(\left(1 + C\right) \frac{2a}{h} + C \left(1 - \frac{x_0}{h}\right) \right) - P_{\max} \left(\left(1 + C\right) \frac{a}{D} + C \left(1 - \frac{D}{h} - \frac{x_0}{2D}\right) \right) \right] \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2} \right\}$$

$a > D$:

$$K_I^{(H)}(x_0) = K^* + \sqrt{\pi a} P_{\max} \left[\left(1 + C + \frac{Ca}{2D}\right) \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{D}{a}\right) - \frac{2}{\pi} \left(\left(1 + C\right) \frac{a}{D} + \frac{C}{2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{D}{a}\right)^2} \right] \quad (21)$$

Mit $C = 0$ und $x_0 = 0$ erhält man aus Gl. (19) die von Sneddon und Lowengrub [7] angegebene Gleichung (4) zur Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors für einen vollgeffneten Riß im Körperinneren.

4. Ergebnisse

Die Ergebnisse des numerischen Vergleichs zwischen den aufgeführten Modellen werden auf der Basis einer relativen Rißlänge a/d und einer relativen Spannungszonenbreite D/d dargestellt. Wie auch aus Gl. (17) ersichtlich ist, stellt die Nullstelle des Spannungsprofils $P(x) = 0$ mit $x = d$ eine wichtige Bezugsgröße dar, die eine von P_{\max} unabhängige Darstellung ermöglicht. Im oberen Teil von Bild 2 sind die nach Gl. (19) berechneten Spannungsintensitätsfaktoren bezogen auf die Ergebnisse des Basismodells aufgetragen. Dabei wurde anstelle des wahren Ortes der Rißöffnung entweder die Oberfläche ($x_0 = 0$) oder die Nullstelle des Spannungsprofils ($x_0 = d$) gewählt. Da es sich um eine von der Oberfläche her abfallende Druckspannung handelt, sind die K_I -Werte im ersten Fall zu gering und im zweiten zu hoch. Im unteren Teil von Bild 2 sind die dazugehörigen Orte der Rißöffnung, ebenfalls auf d bezogen, nach Modell B enthalten. Dieses Modell ist jedoch nur für $b > 0$ gültig, so daß die Kurven von $b/d = 0,01$ aus bis auf $b = 0$ extrapoliert werden mußten. Die Kurve für $D/d = 5$ erreicht den Wert $b = 0$ bei $a/d = 3,3$. Dagegen ist der Riß nach Gl. (17) erst bei $a/d = 4$ voll geöffnet. Auf Grund dieser Unterschiede bei der Berechnung der Rißöffnung ist die Anwendung des Modells G wenig geeignet, obwohl die Gleichung (15) mit der aus Modell B berechneten Rißöffnung (Bild 1) die gleichen K_I -Werte liefert wie Modell B.

Aus Bild 2 ist außerdem zu entnehmen, daß das Modell B bei Annäherung an den vollgeffneten Riß auf die K_I -Werte des Modells H führt: $\lim_{b \rightarrow 0} K_I^{(B)}(b) = K_I^{(H)}(0)$. Somit lassen sich die K_I -Werte mit Hilfe des Modells H, Gl. (21), näherungsweise ohne größeren Aufwand wie

5. Festigkeit und Bruchzeitvorhersage von chemisch-verfestigtem Glas

Die Anwendung der erzielten Ergebnisse soll anhand spezieller Fragestellungen erläutert werden.

Wir betrachten zunächst die Festigkeit als einen vom subkritischen Rißwachstum unbeeinflussten Wert (Inertfestigkeit, gemessen in flüssigem Stickstoff). Somit kann mit Hilfe des kritischen Spannungsintensitätsfaktors K_{IC} aus der Festigkeit des unverfestigten Glases S_0 auf die Rißlänge $a = (K_{IC}/Y S_0)^2$ geschlossen werden. Die Festigkeit des chemisch verfestigten Glases ist diejenige Belastung $\sigma = S_{ion}$, die auf den kritischen Wert des Spannungsintensitätsfaktors für einen Riß der Länge a führt. Unter Verwendung des Modells S (Gl. (21) mit $C = x_0 = 0$) kann S_{ion} direkt angegeben werden [5]:

$$S_{ion} = S_0 + P_{max} f\left(\frac{a}{D}, \frac{a}{h}\right) \quad (22)$$

Wegen $a \ll h$ ist $f(a/d, a/h)$ näherungsweise unabhängig von a/h .

Werden die geeigneteren Modelle B und H verwendet, ist eine geschlossene Lösung nicht möglich, da die Nullstelle d des Spannungsprofils nach Gl. (18) von der Festigkeit $S_{ion} = \sigma$ abhängt. Die numerisch erzielten Ergebnisse der Festigkeit von chemisch verfestigtem Glas sind in Bild 4 enthalten. Dabei ist eine aus Gl. (22) folgende Darstellung gewählt, obgleich die Kurven in abgeschwächter Weise auch von P_{max} abhängen. Die durchgezogene Kurve im oberen Teil von Bild 4 ist unter Verwendung des geeignetsten Modells B berechnet worden. Aus dem unteren Teil von Bild 4 kann entnommen werden, daß

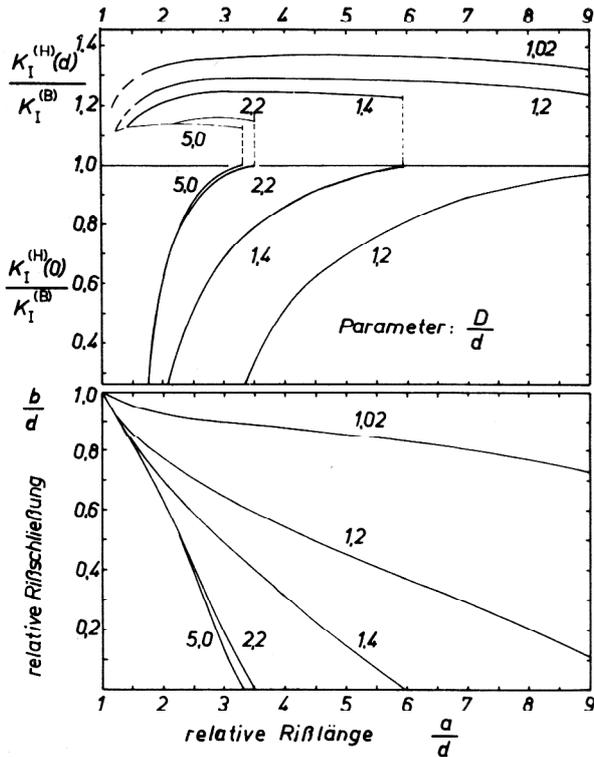


Bild 2
Vergleich berechneter Spannungsintensitätsfaktoren K_I und Abhängigkeit der relativen Rißschließung von der relativen Rißlänge

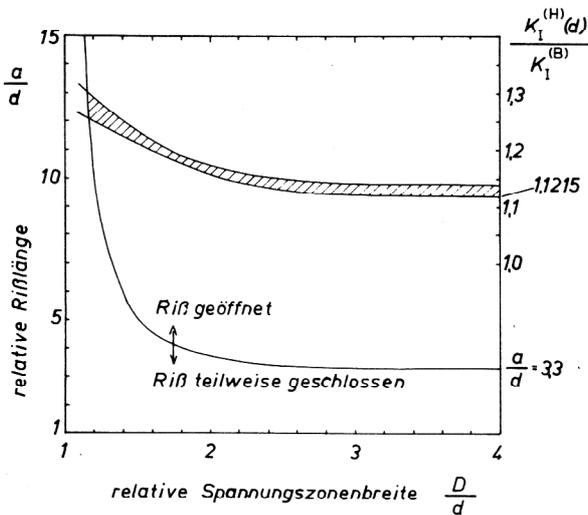


Bild 3
Korrekturfaktor des nach Gl. (21) berechneten Spannungsintensitätsfaktors für teilweise geschlossene Risse

folgt berechnen. Oberhalb der relativen Rißlängen a_0/d , bei der ein vollständig geöffneter Riß vorliegt, gilt exakt $K_I^{(H)}(0)$. Unterhalb von a_0/d berechnet man $K_I^{(H)}(d)$ und dividiert durch einen Korrekturfaktor, der nach Bild 1, oberer Teil, wenig mit a/d variiert. In Bild 3 sind die erforderlichen Angaben zusammengefaßt. Aus dem für den Korrekturfaktor angegebenen Bereich geht hervor, daß auf diese Weise der K_I -Wert auf etwa 2% genau berechnet werden kann.

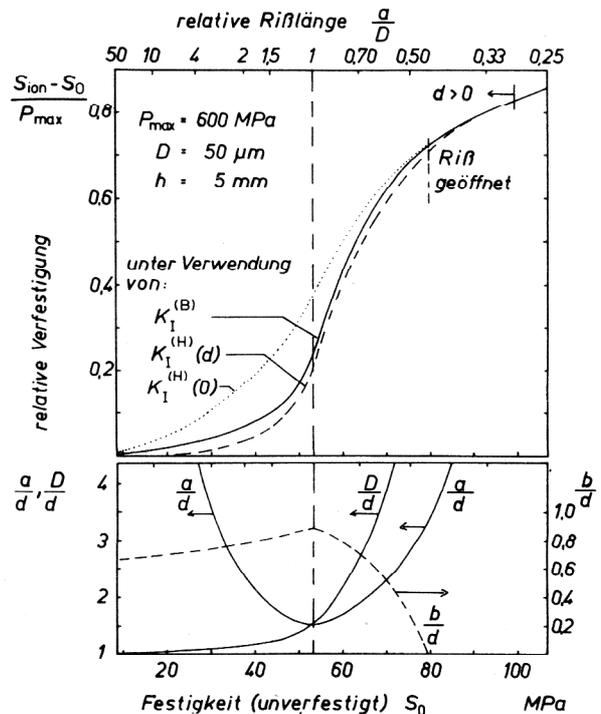


Bild 4
Relative Verfestigung in Abhängigkeit von der Festigkeit des unverfestigten Glases

oberhalb von $S_0 = 80$ MPa der Riß voll geöffnet ist. Daher sind die Kurven deckungsgleich, die unter Verwendung von $K_I^{(B)}$ und $K_I^{(H)}$ (0) (punktierte Kurve) berechnet wurden. Oberhalb von $S_0 = 99$ MPa mündet auch die unter Verwendung von $K_I^{(H)}$ (d) berechnete Kurve (gestrichelt) in die durchgezogene ein, da nach Gl. (18) für $S_{ion} = \sigma > 694$ MPa keine Druckspannungen an der Oberfläche vorhanden sind.

Bild 4 zeigt, daß der Festigkeitsverlauf bei Verwendung des Modells H mit $x_0 = d$ in guter Näherung ermittelt werden kann, ohne den wahren Ort der Rißöffnung b kennen zu müssen. Benutzt man außerdem einen einheitlichen Korrekturfaktor von 1,15 (Bild 3), so verbessert sich die Genauigkeit auf etwa 1 % für Werte im Bereich $a \leq D$. Die berechneten Festigkeiten für $a > D$ sind überdies stärker von der im Inneren der Platte wirkenden Zugspannung $P_{max} D/h$ abhängig.

Die Abhängigkeit der Festigkeit ionenausgetauschter Gläser von der Belastungsgeschwindigkeit $\dot{\sigma} = S_{ion}/t_B$ wurde in [11] durch numerische Integration der Riwachstumsgleichung

$$\frac{da}{dt} = v \left\{ K_I [\sigma(t), a(t)] \right\} \quad (23)$$

ermittelt. Die Wachstumsgeschwindigkeit der Risse als Funktion des Spannungsintensitätsfaktors $v \{ K_I \}$ ist aus Messungen an makroskopischen Proben bekannt. In vielen Fllen kann von einer potentiellen Riwachstumfunktion ausgegangen werden:

$$v \{ K_I \} = v_c \left(\frac{K_I}{K_{IC}} \right)^n \quad (24)$$

Die Integration der Gl. (23) erfolgt vom Anfangswert $a_0 = a(t_0)$ bis zur Bruchzeit t_B , bei der $K_I [\sigma(t_B), a(t_B)] = K_{IC}$ gilt. Wie man sieht, ist auch für diese Fragestellung eine genaue Kenntnis des funktionellen Verlaufes von K_I von Bedeutung. Ohne näher darauf einzugehen, sei erneut auf Bild 4 hingewiesen, aus dem die Bereiche abgeschätzt werden können, in denen der Riß teilweise geschlossen ist.

Die Bruchzeit t_B eines unter konstanter Belastung σ_0 stehenden ionenausgetauschten Glases sollte analog einer in [12] vorgeschlagenen Näherung abgeschätzt werden können:

$$t_B \approx \frac{2 a_0}{(n-2) v \{ K_I [\sigma_0, a_0] \}} \quad (25)$$

n hat einen Wert von 20 . . . 100. Kennt man die Riwachstumfunktion, z. B. Gl. (24), so erfolgt die Abschätzung allein aus dem K_I -Wert zur Zeit t_0 .

Von speziellem Interesse ist die Bruchzeit ionenausgetauschter Gläser, die Risse tiefer als die Druckspannungszone enthalten: $a > D$. Wegen der im Innern der Glasprobe wirkenden Zugspannung kann es zur Selbstzerstörung in Abwesenheit äußerer Belastungen kommen. Für $\sigma = 0$ und repräsentativen Werten D und h gilt nach Gl. (18) $1 < D/d < 1,1$. Damit ergibt sich aus Bild 3 ein Korrekturfaktor $K_I^{(H)}$ (d)/ $K_I^{(B)}$ = 1,3. $K_I^{(H)}$ (d) wird aus Gl. (21) berechnet. Für den Fall $d \approx D$, $2 < a/D < 20$ erhält man schließlich

$$K_I^{(B)} = Y \sigma_i \sqrt{a} \quad (26)$$

$$Y = \frac{\sqrt{\pi}}{1,3} \left[(1+C) \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{D}{a} \right) - \frac{2}{\pi} C \sqrt{1 - \left(\frac{D}{a} \right)^2} \right]$$

$$Y \approx 1,4$$

$$\sigma_i = P_{max} \frac{D}{h}$$

Ist die Abhängigkeit des Spannungsintensitätsfaktors nach Gl. (26) mit $Y = \text{konst.}$ vorhanden, gilt Gl. (15) exakt [12]. Unter Verwendung der Gln. (24) und (26) erhält man aus Gl. (25):

$$t_B = \frac{2 K_{IC}^n h^n}{(n-2) v_c Y^n P_{max}^n D^n a_0^{\frac{n-2}{2}}} \quad (27)$$

Mit den charakteristischen Werten $n = 19$, $v_c = 0,01$ m/s, $K_{IC} = 0,85$ MNm^{-3/2} und den in Bild 4 verwendeten Werten $P_{max} = 600$ MPa, $D = 50$ μ m, $h = 5$ mm beträgt die Zeit bis zur Selbstzerstörung nach Gl. (27) mehr als 10⁶ Jahre, falls in der verfestigten Glasplatte Risse bis zu einer Länge von $a_0 = 200$ μ m = 4 D vorhanden sind. Beträgt die Wandstärke anstelle 5 mm nur 2 mm, kann die Selbstzerstörung bereits 13 Tage nach der Verfestigung auftreten. Dieses Beispiel, das den Erfahrungen der Praxis entspricht, verdeutlicht die Bedeutung minimaler Schädigungen an Glaserzeugnissen, die für den Verfestigungsproze vorgesehen sind.

6. Schluß

Die Anwendungsbeispiele zeigen, daß zur Modellierung des Festigkeitsverhaltens ionenausgetauschter Gläser auf die genaue Ermittlung des auftretenden Rischlieens größtenteils verzichtet werden kann. Der Spannungsintensitätsfaktor kann mit ausreichender Genauigkeit nach Gl. (19) bzw. (21) direkt berechnet werden, wobei aus der Rißlänge a (bezogen auf die Nullstelle d des Spannungsprofils) folgt, ob es sich um einen voll geöffneten Riß handelt ($x_0 = 0$) oder ob lediglich der Bereich der Zugspannungen zu berücksichtigen ist ($x_0 = d$). Die Größe des Spannungsgradienten hat darauf keinen Einfluß.

Eine weitere Erhöhung der Genauigkeit erscheint angesichts des relativ einfachen Modells wenig sinnvoll. Das reale Spannungsprofil chemisch verfestigter Gläser weicht von dem hier verwendeten linearen Verlauf insbesondere im Übergangsbereich zum Glasinnern ab. Darüberhinaus können Risse existieren, die nicht senkrecht zur Oberfläche orientiert sind. Somit ist die Voraussetzung einer Ribelastung 1. Art nicht mehr erfüllt. Die Lösung dieses Problems erfordert weitergehende Untersuchungen.

LITERATUR

- [1] Mller, W., Hhnert, M., Kolitsch, A.: Mechanismus des Alkalitransportes in Gläsern. Silikatechnik 32 (1981) H. 2, S. 53 - 56.
- [2] Thresher, R. W., Smith, F. W.: The Partially Closed Griffith Crack. Int. J. Fract. 9 (1973) H. 1, S. 33 - 41.

- [3] Bakioglu, M.; Erdogan, F., Hasselman, D. P. H.: Fracture Mechanical Analysis of Self-Fatigue in Surface Compression Strengthened Glass Plates. *J. Mater. Sci.* 11 (1976), S. 1826 – 1834.
- [4] Green, D. J.: Compressive Surface Strengthening of Brittle Materials by a Residual Stress Distribution. *J. Am. Ceram. Soc.* 66 (1983) H. 11, S. 807 – 810.
- [5] Ullner, Ch., Wagner, G. F., Hähner, M.: Zur Wahrscheinlichkeitsverteilung der Festigkeit von ionenausgetauschtem Glas. XIth. Int. Congr. on Glass, Prag 1977, Proc. II., S. 589 – 598.
- [6] Hagan, J. T.; Swain, M. V., J. E. Field: Stress Corrosion Characteristics of Toughened Glasses and Ceramics. *J. Mater. Sci.* 13 (1978), S. 189 – 194.
- [7] Sneddon, I. N., Lowengrub, M.: Crack Problems in the classical theory of elasticity. *J. Wiley, New York* 1969 (Series in Applied Mathematics).
- [8] Paris, P. S., Sih, G. C.: Stress Analysis of Cracks. In: ASTM Spec. Techn. Publ. No. 381 (1965), S. 30 – 83.
- [9] Erdogan, F., Gupta, G. D.: On the Numerical Solution of Singular Integral Equation. *Q. Appl. Math.* 29 (1972), S. 525 – 534.
- [10] Hartranft, R. J., Sih, G. C.: Alternating Method applied to Edge and Surface Crack Problems. In: *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems* (Hrsg. G. C. Sih), Noordhoff Int. Publ., Leyden, 1973, S. 179.
- [11] Ullner, Ch., Gehrke, E., Hähner, M.: Dynamische Ermüdung durch Ionenaustausch verfestigter Gläser, *Silikattechnik* 32 (1981) H. 5, S. 134 – 136.
- [12] Ullner, Ch.: Näherungsweise Zusammenhang zwischen Rißwachstum und Ermüdung von Glas im Fall nichtintegrierbarer Funktionen. *Techn. Mech.* 4 (1983) 3, S. 59 – 63.

Anschrift der Verfasser:

Dr. Christian Ullner
Akademie der Wissenschaften der DDR
Zentralinstitut für anorganische Chemie
1199 Berlin
Rudower Chaussee 5

Dr. Ralf Wille
Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg
Sektion Mechanisierung der Pflanzenproduktion
1127 Berlin
Dorfstraße 10