

## Kritische Drehgeschwindigkeiten elastisch gestützter hohler Rotoren, die teilweise mit Flüssigkeit gefüllt sind

Sergej Bogomolov, Sergej Korsunskij, Udo Fischer

Die Untersuchung der Stabilität und der dynamischen Festigkeit von Konstruktionen, die aus hohlen Rotoren bestehen, die teilweise mit Flüssigkeit unterschiedlicher Dichte und Viskosität gefüllt sind (z. B. Zentrifugen), ist aufgrund der Notwendigkeit der Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Festkörper und Flüssigkeit recht schwierig.

In [6] sind die Gleichungen für kleine Störungen der stationären Rotation eines symmetrischen Kreisels, dessen zylindrischer Hohlraum teilweise mit Flüssigkeit gefüllt ist, abgeleitet. Jedoch wurde dabei die Abhängigkeit der Werte für die Parameter der Relativbewegung von der Dicke der Flüssigkeitsschicht nicht berücksichtigt. In [2] wurde die Stabilität eines Kreisels mit zylindrischem Hohlraum, der teilweise mit Flüssigkeit gefüllt ist, untersucht. Dabei wurde eine transzendente charakteristische Gleichung erhalten. Die Ermittlung ihrer Wurzeln ist jedoch mit großen Schwierigkeiten verbunden. In [3] wird die Stabilität eines rotierenden, teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Zylinders, der elastisch gelagert ist, untersucht, wobei nur die Schwingungen der Flüssigkeit in Querrichtung zur Zylindermantelfläche berücksichtigt wurden. Beim Betrieb von Zentrifugen und bei experimentellen Untersuchungen [4] wurden auch Schwingungen in den zur Zylinderachse parallelen Ebenen beobachtet. Diese Erscheinungen sind in der vorliegenden Arbeit einbezogen.

Unter Nutzung einer von B. I. Rabinovic in [7] behandelten Methodik ist es gelungen, die Gleichungen für die gestörte Bewegung des sich drehenden Rotors, dessen Zylinderhohlraum teilweise mit Flüssigkeit gefüllt ist, unter Berücksichtigung der Dicke der Flüssigkeitsschicht in eine kanonische Form zu überführen. Dies gestattet die Untersuchung der Dynamik von elastisch gelagerten Rotoren mit Hilfe traditioneller Methoden, so z. B. die Bestimmung der kritischen Drehgeschwindigkeiten.

Zur Illustration sind einige numerische Ergebnisse angeführt. Es wird gezeigt, daß die Berücksichtigung der Bewegung der Flüssigkeit in dem sich drehenden Rotor zu zusätzlichen kritischen Drehgeschwindigkeiten führt.

Folgende Koordinatensysteme werden eingeführt (Bild 1):

$0, x, y, z$  ortsfestes Koordinatensystem  
 $C, x_1, y_1, z_1$  sich translatorisch gegenüber dem  $0, x, y, z$ -Koordinatensystem bewegendes System.

Die Lage des Rotors im Raum gegenüber dem ortsfesten Koordinatensystem ist durch zwei Schwerpunktskoordinaten  $x_C, y_C$  und drei Winkel ( $\alpha, \beta$  kleine Drehwinkel des Rotors um die Achsen  $x_1$  und  $y_1, \varphi = \omega t$  ( $\omega = \text{konst}$ ) – Drehwinkel um die  $z$ -Achse) definiert.

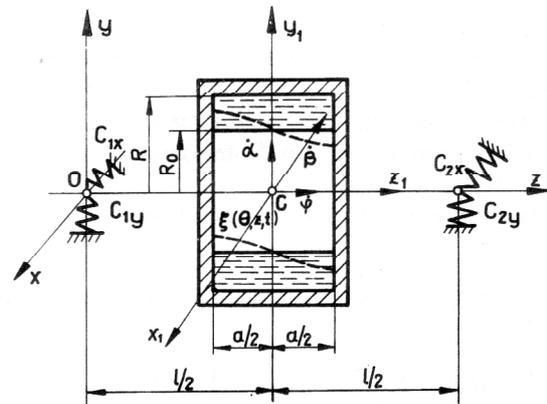


Bild 1

Geometrie eines hohlen Rotors, der teilweise mit Flüssigkeit gefüllt ist

Der Rotor wird als starr angenommen, die Masse der kreisrunden Welle ist auf den Rotor reduziert, der die Exzentrizität  $e$  besitzt. Die Flüssigkeit wird zunächst als reibungsfrei angesehen. Folgende Bezeichnungen werden eingeführt:

- $Q$  – das von der Flüssigkeit eingenommene Volumen,
- $S$  – die benetzte Oberfläche,
- $S_1$  – die benetzte Seitenfläche mit der Koordinaten  $z_1 = a/2$ ,
- $S_2$  – die benetzte Seitenfläche mit der Koordinaten  $z_1 = -a/2$ ,
- $S_3$  – die benetzte Zylinderfläche mit der Koordinaten  $r = R$ ,
- $\Sigma$  – die freie Oberfläche der Flüssigkeit,
- $\vec{n}$  – der Einheitsvektor der äußeren Normalen zur Flüssigkeitsoberfläche
- $c_{1x}, c_{1y}, c_{2x}, c_{2y}$  – die entsprechenden Lagersteifigkeiten,
- $\vec{u}$  – der Vektor der kleinen Verschiebungen für den Punkt  $C$  bei gestörter Bewegung,
- $\vec{\Theta}$  – der Vektor der kleinen Drehwinkel für den Rotor um den Punkt  $C$ ,
- $\vec{R}_S$  – der vom Punkt  $C$  ausgehende Radiusvektor für einen beliebigen Punkt der Fläche  $S$ ,
- $\vec{R}_\Sigma$  – der vom Punkt  $C$  ausgehende Radiusvektor für einen beliebigen Punkt der Fläche  $\Sigma$ ,
- $\alpha, \beta, \varphi$  – die Komponente der Geschwindigkeit  $\dot{\Theta}$ ,
- $\Delta$  – der Laplace-Operator,
- $\nabla$  – der Hamilton-Operator.

Die Differentialgleichungen für die Bewegung des Rotors werden mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen II. Ordnung aufgestellt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, k), \quad (1)$$

wobei

T — die kinetische Energie und  
U — die potentielle Energie des Systems sind.

Es gilt

$$T = T^* + T^0, \quad U = U^* + U^0,$$

mit  $T^*$  und  $U^*$  als kinetische und potentielle Energie der Flüssigkeit,  $T^0$  als kinetische Energie des Rotors ohne Flüssigkeitsfüllung und  $U^0$  als potentielle Deformationsenergie des Systems mit dem Rotor ohne Flüssigkeitsfüllung.

Die Ausdrücke für  $T^0$  und  $U^0$  haben folgendes Aussehen [1]:

$$2 T^0 = m^0 (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + J^0 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + I^0 (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \beta)^2, \quad (2)$$

$$U^0 = \frac{c_{11}}{2} \left[ \left( x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 \right] + \frac{c_{22}}{2} \left[ \left( \alpha - \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \left( \beta - \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (c_{1x} x_1^2 + c_{2x} x_2^2 + c_{1y} y_1^2 + c_{2y} y_2^2) \quad (3)$$

mit

$m^0$  als Masse des Rotors,  
 $I^0$  und  $J^0$  als polares und äquatoriales Trägheitsmoment des Rotors.

Für die Welle mit Gelenklagern und dem Rotor in der Mitte gilt

$$c_{11} = \frac{48 EJ_W}{l^3}, \quad c_{22} = \frac{12 EJ_W}{l}.$$

Außerdem gelten folgende Formeln und Bezeichnungen  
 $J_W$  ist das Flächenträgheitsmoment der Welle mit dem Durchmesser  $d_W$ ,

$$J_W = \frac{\pi d_W^4}{32},$$

E ist der Elastizitätsmodul,

$$x_C = x + e \cos \varphi, \quad y_C = y + e \sin \varphi.$$

Die kinetische Energie der Flüssigkeit läßt sich wie folgt bestimmen

$$T^* = \frac{1}{2} \rho_Q \int v^2 dQ,$$

wobei  $v$  die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen ist. Wenn eine Potentialbewegung der Flüssigkeit vorliegt, so gilt

$$T^* = \frac{1}{2} \rho_Q \int (\nabla \chi)^2 dQ$$

mit  $\chi'$  als Geschwindigkeitspotential der Flüssigkeitsteilchen.

Das Verschiebungspotential ist mit dem Geschwindigkeitspotential wie folgt verbunden

$$\chi' = \frac{d\chi}{dt} = \dot{\chi},$$

entsprechend gilt

$$T^* = \frac{1}{2} \rho_Q \int (\nabla \chi)^2 dQ. \quad (4)$$

Die Umformung des Volumenintegrals in ein Flächenintegral geschieht mit Hilfe der Greenschen Formel:

$$T^* = \frac{1}{2} \rho \int_{S+\Sigma} \dot{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS. \quad (5)$$

Das Verschiebungspotential wird in folgender Form dargestellt [7]:

$$\chi = (\vec{u}, \vec{\Phi}) + (\vec{\Theta}, \vec{\psi}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n s_n \quad (6)$$

mit

$\vec{\Phi}$  ( $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ ) und  $\vec{\psi}$  ( $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ ) als harmonische Vektorfunktionen, deren Komponenten Verschiebungspotentiale der Flüssigkeitsteilchen im Resultat der entsprechenden ebenen und Drehbewegung um die entsprechenden Achsen sind,

$\varphi_n(x, y, z)$  als harmonische Eigenfunktionen der Randwertaufgabe von Flüssigkeitsschwingungen bei kleinen Wellenbewegungen,

$s_n(t)$  als Verschiebung eines fixierten Punktes der freien Flüssigkeitsoberfläche in Richtung der Achse  $r^0$  bei der  $n$ -ten Schwingform für die Flüssigkeit.

Die kinematischen Randbedingungen lauten [7]

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_S = (\vec{u}, \vec{n}) + (\vec{\Theta}, \vec{R}_S \times \vec{n}), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = (\vec{u}, \vec{n}) + (\vec{\Theta}, \vec{R}_{\Sigma} \times \vec{n}) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \psi_n \quad (8)$$

mit

$$\psi_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \Big|_{\Sigma}.$$

Die Dgln. und die Randbedingungen für die aufgestellten Verschiebungspotentiale ergeben sich mit

$$\Delta \vec{\Phi} = 0, \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial n} \Big|_{S+\Sigma} = \vec{n}, \quad (10)$$

$$\Delta \vec{\psi} = 0, \quad \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial n} \Big|_S = \vec{R}_S \times \vec{n}, \quad \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \vec{R}_{\Sigma} \times \vec{n}, \quad (11)$$

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} + \frac{\sigma_n^2}{w^2 R_0} \varphi_n \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (12)$$

wobei

$\sigma_n$  – die Eigenfrequenz der n-ten Schwingform für die Flüssigkeit ist.

Folgende Normierung für die Funktion  $\varphi_n$  wird vorgenommen

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = \pm 1 \quad \text{bei } r = R_0, \quad z = \mp \frac{a}{2}, \quad \Theta = \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

mit  $\Phi$  als Polwinkel.

Die Funktion  $\varphi_n(r, \Theta, z)$  wird in der Form

$$\varphi_n(r, \Theta, z) = Z(z) \zeta(r, \Theta). \quad (14)$$

dargestellt. Um der Randbedingung

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \Big|_{z=\pm \frac{a}{2}} = 0$$

zu genügen, wird die Funktion  $Z(z)$  wie folgt dargestellt:

$$Z(z) = \sin \kappa z, \quad (15)$$

wobei

$$\kappa = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

ist. Nach Einsetzen der Gl. (14) in die Laplace-Gl. und unter Beachtung der Gl. (15) erhält man

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \Theta^2} - \kappa^2 \zeta = 0.$$

$\zeta(r, \Theta)$  wird wie folgt dargestellt

$$\zeta(r, \Theta) = u(r) + v(\Theta),$$

entsprechend gilt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + m^2 v = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(1 + \frac{m^2}{y^2}\right) u = 0, \quad (17)$$

wobei  $y = i \kappa r$  ist.

Die Lösungen der Gln. (16), (17) lauten:

$$v(\Theta) = C_1 \sin m \Theta + C_2 \cos m \Theta,$$

$$u(r) = C_3 I_m(\kappa r) + C_4 K_m(\kappa r),$$

mit  $I_m(\kappa r)$  und  $K_m(\kappa r)$  als Bessel-Funktionen I. und II. Ordnung für imaginäre Argumente.

Auf der Randbedingung

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$$

läßt sich der Koeffizient  $C_3$  bestimmen

$$C_3 = -C_4 \frac{K'_m(\kappa R)}{I'_m(\kappa R)},$$

wobei ( $'$ ) die Differentiation nach  $r$  bedeutet. Dann gilt

$$u(r) = C_4 \left[ K_m(\kappa r) - \frac{K'_m(\kappa R)}{I'_m(\kappa R)} I_m(\kappa r) \right].$$

Aus der Bedingung für die Normierung (13) folgt

$$C_2 = 0, \quad C_1 C_4 = \frac{1}{M_m^n}$$

mit

$$M_m^n = \frac{K'_m(\kappa R)}{I'_m(\kappa R)} I'_m(\kappa R_0) - K'_m(\kappa R_0).$$

Damit erhält man abschließend

$$\varphi_{nm} = \frac{1}{M_m^n} \left[ K_m(\kappa r) - \frac{K'_m(\kappa R)}{I'_m(\kappa R)} I_m(\kappa r) \right] \sin m \Theta \sin \kappa z. \quad (18)$$

Es wird die Bewegung in der Ebene  $yOz$ , d. h. kleine Verschiebungen des Punktes C parallel zur  $Oy$ -Achse und kleine Drehungen des Rotors um die Achse  $Cx_1$ , betrachtet. Aus den Gln. (10) und (11) folgt

$$\Phi_2 = y_1 = r \sin \Theta,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \cos(n, y_1) = n_{y_1},$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=\pm \frac{a}{2}} = \pm r \sin \Theta, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = -z \sin \Theta,$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = z \sin \Theta, \quad \Delta \psi_1 = 0.$$

Folgende neue, der Laplace-Gleichung genügende Funktion  $F_1$  wird eingeführt:

$$F_1 = \psi_1 - z r \sin \Theta. \quad (19)$$

Die Randbedingungen für die Funktion  $F_1$  lassen sich ermitteln, wenn man die Ableitung der Funktion  $F_1$  in Richtung der Normalen bildet:

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} \Big|_{z=\pm \frac{a}{2}} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = -2 z \sin \Theta,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 2 z \sin \Theta.$$

Die Funktion  $F_1$  wird wie folgt dargestellt:

$$F_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n [R_n(r) - R_n^*(r)] \sin m \Theta \sin \kappa z,$$

wobei die Funktionen  $R_n(r)$  und  $R_n^*(r)$  den Randbedingungen genügen müssen:

$$\frac{\partial R_n}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial R_n}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 1,$$

$$\frac{\partial R_n^*}{\partial r} \Big|_{r=R} = 1, \quad \frac{\partial R_n^*}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0.$$

Der Koeffizient  $A_n$  wird aus der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \kappa z = 2z, \quad m = 1.$$

bestimmt.

Wenn man  $Z$  in eine Fourier-Reihe im Intervall

$$\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \quad \text{entwickelt, so ergibt sich}$$

$$A_n = \frac{8a}{\pi^2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}, \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Endgültig erhält man

$$F_1 = \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} [R_n(r) - R_n^*(r)] \sin \Theta \sin \kappa z$$

mit

$$R_n = \frac{L_1^n I_1(\kappa r) - K_1(\kappa r)}{M_1^n}$$

$$R_n^* = \frac{N_1^n I_1(\kappa r) - K_1(\kappa r)}{Q_1^n}$$

$$L_1^n = \frac{K_1'(\kappa R)}{I_1'(\kappa R)} = \frac{K_1(\kappa R) + \kappa R K_0(\kappa R)}{I_1(\kappa R) - \kappa R I_0(\kappa R)},$$

$$N_1^n = \frac{K_1'(\kappa R_0)}{I_1'(\kappa R_0)} = \frac{K_1(\kappa R_0) + \kappa R_0 K_0(\kappa R_0)}{I_1(\kappa R_0) - \kappa R_0 I_0(\kappa R_0)},$$

$$M_1^n = L_1^n I_1(\kappa R_0) - K_1(\kappa R_0)$$

$$= L_1^n \left[ I_0(\kappa R_0) - \frac{I_1(\kappa R_0)}{\kappa R_0} \right] + K_0(\kappa R_0) + \frac{K_1(\kappa R_0)}{\kappa R_0},$$

$$Q_1^n = L_1^n I_1'(\kappa R) - K_1'(\kappa R)$$

$$= L_1^n \left[ I_0'(\kappa R) - \frac{I_1'(\kappa R)}{\kappa R} \right] + K_0'(\kappa R) + \frac{K_1'(\kappa R)}{\kappa R}.$$

Die Funktion  $\psi_1$  bestimmt sich aus der Gl. (19)

$$\psi_1 = \left\{ zr + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{\pi^2} [R_n(r) - R_n^*(r)] \sin \kappa z \right\} \sin \Theta. \quad (20)$$

Die kinetische Energie des sich in der  $yOz$ -Ebene bewegenden Flüssigkeitsvolumens lautet:

$$T_{yz}^* = \frac{1}{2} \rho \int_{S+\Sigma} \dot{\chi} \frac{\partial \dot{\chi}}{\partial n} dS. \quad (21)$$

Dabei ist  $\dot{\chi}$  das Geschwindigkeitspotential der sich in der  $yOz$ -Ebenen bewegenden Flüssigkeit. Unter Berücksichtigung der Gl. (6) bis (9) erhält man:

$$\dot{\chi} = (\dot{u}, \vec{\Phi}) + (\dot{\Theta}, \psi) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{s}_n \varphi_n. \quad (22)$$

$$\frac{\partial \dot{\chi}}{\partial n} \Big|_S (\dot{u}, \vec{n}) + (\dot{\Theta}, \vec{R}_S \times \vec{n}), \quad (23)$$

$$\frac{\partial \dot{\chi}}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = (\dot{u}, \vec{n}) + (\dot{\Theta}, \vec{R}_{\Sigma} \times \vec{n}) + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{s}_n \psi_n, \quad (24)$$

$$\psi_n = \sin \kappa z \sin \Theta. \quad (25)$$

Dabei lassen sich die Komponenten in den Gl. (22) bis (24) wie folgt bestimmen

$$(\dot{u}, \vec{\Phi}) = \dot{y} r \sin \Theta,$$

$$(\dot{u}, \vec{\psi}) = \dot{\beta} \psi_1,$$

$$(\dot{u}, \vec{n}) \Big|_{S_1 + S_2} = 0,$$

$$(\dot{u}, \vec{n}) \Big|_{S_3} = \dot{y} \sin \Theta,$$

$$(\dot{u}, \vec{n}) \Big|_{\Sigma} = -\dot{y} \sin \Theta,$$

$$(\dot{\Theta}, \vec{R}_s \times \vec{n}) \Big|_{S_1} = \dot{\beta} r \sin \Theta,$$

$$(\dot{\Theta}, \vec{R}_s \times \vec{n}) \Big|_{S_2} = -\dot{\beta} r \sin \Theta,$$

$$(\dot{\Theta}, \vec{R}_s \times \vec{n}) \Big|_{S_3} = \dot{\beta} z \sin \Theta,$$

$$(\dot{\Theta}, \vec{R}_{\Sigma} \times \vec{n}) \Big|_{\Sigma} = -\dot{\beta} z \sin \Theta,$$

$$\varphi_n = \frac{1}{M_1^n} [K_1(\kappa r) - L_1^n I_1(\kappa r)] \sin \kappa z \sin \Theta.$$

Nach Einsetzen der Gl. (22) bis (24) in Gl. (21) erhält man für die kinetische Energie

$$T_{yz}^* = \frac{1}{2} \rho \int_{S_1} (\dot{y} r \sin \Theta + \dot{\beta} \psi_1$$

$$+ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{s}_n \varphi_n) \dot{\beta} r \sin \Theta dS$$

$$- \int_{S_2} (\dot{y} r \sin \Theta + \dot{\beta} \psi_1$$

$$+ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{s}_n \varphi_n) \dot{\beta} r \sin \Theta dS$$

$$+ \int_{S_3} (\dot{y} r \sin \Theta + \dot{\beta} \psi_1 + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{s}_n \varphi_n)$$

$$(\dot{y} \sin \Theta + \dot{\beta} z \sin \Theta) dS$$

$$- \int_{\Sigma} (\dot{y} r \sin \Theta + \dot{\beta} \psi_1 + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{s}_n \varphi_n)$$

$$(\dot{y} \sin \Theta + \dot{\beta} z \sin \Theta - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{s}_n \psi_n) dS.$$

Nach Integration und einigen Umformungen ergibt sich damit

$$T_{yz}^* = \frac{1}{2} \dot{\beta}^2 J^* + \dot{\beta} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{s}_n \lambda_{on} + \frac{1}{2} \dot{y}^2 m^* + \frac{1}{2} \dot{s}_n^2 \mu_n, \quad (26)$$

wobei

$$J^* = \rho a^5 \left\{ \frac{\pi}{4} (\bar{R}^4 - \bar{R}_o^4) + \frac{\pi}{12} (\bar{R}^2 - \bar{R}_o^2) + \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^4} (\bar{R}^2 P_2^n - \bar{R}_o^2 S_2^n) + \frac{1}{\pi n^5} (\bar{R} E_1^n - \bar{R}_o G_1^n) \right] \right\}, \quad (27)$$

$$\lambda_{on} = \rho a^4 \sin(n\pi/2) \left\{ \frac{1}{\pi^2 n^3} [\bar{R} D_1^n - \bar{R}_o (B_1^n - G_1^n)] - \frac{1}{\pi n^2} [\bar{R}^2 D_2^n - \bar{R}_o^2 (B_2^n - 1)] \right\},$$

$$m^* = \rho a^3 \pi (\bar{R}^2 - \bar{R}_o^2), \quad \mu_n = \rho a^3 \frac{\bar{R}_o B_1^n}{2n},$$

$$\bar{R} = \frac{R}{a}, \quad \bar{R}_o = \frac{R_o}{a},$$

$$P_2^n = \frac{K_2 (n\pi \bar{R}) + L_1^n I_2 (n\pi \bar{R})}{M_1^n} - \frac{K_2 (n\pi \bar{R}) + N_1^n I_2 (n\pi \bar{R})}{Q_1^n},$$

$$S_2^n = \frac{K_2 (n\pi \bar{R}_o) + L_1^n I_2 (n\pi \bar{R}_o)}{M_1^n} - \frac{K_2 (n\pi \bar{R}_o) + N_1^n I_2 (n\pi \bar{R}_o)}{Q_1^n},$$

$$E_1^n = \frac{K_1 (n\pi \bar{R}) - N_1^n I_1 (n\pi \bar{R})}{Q_1^n} - \frac{K_1 (n\pi \bar{R}) - L_1^n I_1 (n\pi \bar{R})}{M_1^n},$$

$$G_1^n = \frac{K_1 (n\pi \bar{R}_o) - N_1^n I_1 (n\pi \bar{R}_o)}{Q_1^n} - \frac{K_1 (n\pi \bar{R}_o) - L_1^n I_1 (n\pi \bar{R}_o)}{M_1^n},$$

$$D_1^n = \frac{K_1 (n\pi \bar{R}) - L_1^n I_1 (n\pi \bar{R})}{M_1^n},$$

$$B_1^n = \frac{K_1 (n\pi \bar{R}_o) - L_1^n I_1 (n\pi \bar{R}_o)}{M_1^n},$$

$$D_2^n = \frac{K_2 (n\pi \bar{R}) + L_1^n I_2 (n\pi \bar{R})}{M_1^n},$$

$$B_2^n = \frac{K_2 (n\pi \bar{R}_o) + L_1^n I_2 (n\pi \bar{R}_o)}{M_1^n}.$$

Analog kann man die kinetische Energie der Flüssigkeitsbewegung in der xOz-Ebenen ermitteln:

$$T_{xz}^* = \frac{1}{2} \dot{\alpha} J^* + \dot{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{q}_n \lambda_{on} + \frac{1}{2} \dot{x}^2 m^* + \frac{1}{2} \dot{q}_n^2 \mu_n. \quad (28)$$

Für die Flüssigkeitsbewegung in der xOy-Ebenen erhält man

$$\begin{aligned} T_{xy}^* &= \frac{1}{2} \rho \int_Q v_{\Theta}^2 dQ = \frac{1}{2} \rho \int_Q (\omega_{\xi} r)^2 dQ \\ &= \frac{1}{2} \beta \omega_{\xi}^2 \int_0^{2\pi} d\Theta \int_{R_o}^R r^3 dr \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \\ &= \frac{1}{4} \rho \pi a (R^4 - R_o^4) (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \beta) \end{aligned}$$

bzw.

$$T_{xy}^* = \frac{1}{2} I^* (\dot{\varphi} + \dot{\alpha} \beta), \quad (29)$$

wobei

$$I^* = \frac{1}{2} \rho a^5 \pi (\bar{R}^4 - \bar{R}_o^4),$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{konst} \quad (30)$$

sind und außerdem stellt

$$\omega_{\xi} = \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta \approx \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \beta$$

die Projektion der absoluten Winkelgeschwindigkeit des Rotors auf die Koordinatenachse  $\xi$  dar. Die Achse  $\xi$  geht durch den Massenmittelpunkt des Rotors und ist mit ihm starr verbunden.

Die potentielle Energie der Flüssigkeit läßt sich wie folgt bestimmen

$$U^* = \frac{1}{2} \rho \omega^2 R_o \int_{\Sigma} \xi_n^2 dS$$

mit

$$\xi_n = s_n \psi_n \text{ als Form der freien Flüssigkeitsoberfläche bei der } n\text{-ten Schwingform.}$$

Nach Integration erhält man

$$U_{yz}^* = \frac{2}{5} \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 \bar{R}_o^2 a^3 \quad (31)$$

Aus der Randbedingung (12) an der freien Flüssigkeitsoberfläche lassen sich die Eigenfrequenzen für die Schwingungen der Flüssigkeit bestimmen

$$\sigma_n^2 = \omega^2 \frac{n \pi \bar{R}_0}{B_1^n} \quad (32)$$

Damit ergibt sich folgender Ausdruck für die potentielle Energie der Flüssigkeit:

$$U_{yz}^* = \frac{1}{2} \sum_n^2 \sigma_n^2 \mu_n \quad (33)$$

Analog kann man

$$U_{xz}^* = \frac{1}{2} \sum_n^2 q_n^2 \sigma_n^2 \mu_n$$

erhalten.

Wenn man die potentielle und die kinetische Energie des Festkörpers und der Flüssigkeit addiert und in die Lagrange-Gl. (1) einsetzt, so führt dies bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung auf die Gln. für die gestörte Bewegung des Systems Festkörper-Flüssigkeit:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{x} + \gamma_1 x - \delta_1 \alpha = me \omega^2 \cos \omega t \\ m \ddot{y} + \gamma_2 y - \delta_2 \beta = me \omega^2 \sin \omega t \\ J \ddot{\alpha} + I \omega \dot{\beta} + \gamma_1 \frac{l^2}{4} \alpha - \delta_1 x + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_{on} \ddot{q}_n = 0 \\ J \ddot{\beta} - I \omega \dot{\alpha} + \gamma_2 \frac{l^2}{4} \beta - \delta_2 y + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_{on} \ddot{s}_n = 0 \\ \mu_n (\ddot{q}_n + \sigma_n^2 q_n) + \lambda_{on} \ddot{\alpha} = 0 \\ \mu_n (\ddot{s}_n + \sigma_n^2 s_n) + \lambda_{on} \ddot{\beta} = 0 \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \end{array} \right. \quad (34)$$

mit

$$m = m^* + m^0, \quad J = J^* + J^0, \quad I = I^* + I^0,$$

$$\gamma_1 = c_{11} \left[ 1 - \frac{c_{11}}{2} \left( \frac{1}{c_{11} + 2 c_{1x}} + \frac{1}{c_{11} + 2 c_{2x}} \right) \right],$$

$$\gamma_2 = c_{11} \left[ 1 - \frac{c_{11}}{2} \left( \frac{1}{c_{11} + 2 c_{1y}} + \frac{1}{c_{11} + 2 c_{2y}} \right) \right],$$

$$\delta_1 = \frac{c_{11}^2 l^2}{4} \left( \frac{1}{c_{11} + 2 c_{2x}} - \frac{1}{c_{11} + 2 c_{1x}} \right),$$

$$\delta_2 = \frac{c_{11}^2 l^2}{4} \left( \frac{1}{c_{11} + 2 c_{2y}} - \frac{1}{c_{11} + 2 c_{1y}} \right).$$

Die partielle Lösung des Dgl.-Systems (34) läßt sich wie folgt ermitteln

$$x = A_1 \cos \omega t, \quad \alpha = A_3 \cos \omega t, \quad q_n = B_n \cos \omega t,$$

$$y = A_2 \sin \omega t, \quad \beta = A_4 \sin \omega t, \quad s_n = C_n \sin \omega t.$$

10

Nach Einsetzen der Ausdrücke für die Variablen in das System (34) erhält man

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 (\gamma_1 - m \omega^2) - A_3 \delta_1 = me \omega^2 \\ A_2 (\gamma_2 - m \omega^2) - A_4 \delta_2 = me \omega^2 \\ A_3 \left( \gamma_1 \frac{l^2}{4} - J \omega^2 \right) + A_4 I \omega^2 - A_1 \delta_1 - \omega^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} B_n \lambda_{on} = 0 \\ A_4 \left( \gamma_2 \frac{l^2}{4} - J \omega^2 \right) + A_3 I \omega^2 - A_2 \delta_2 - \omega^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \lambda_{on} = 0 \\ B_n \mu_n (\sigma_n^2 - \omega^2) - A_3 \lambda_{on} \omega^2 = 0 \\ C_n \mu_n (\sigma_n^2 - \omega^2) - A_4 \lambda_{on} \omega^2 = 0 \end{array} \right.$$

Folgende Sonderfälle kann man betrachten:

1. Alle Lagersteifigkeitskoeffizienten sind gleich

$$c_{1x} = c_{1y} = c_{2x} = c_{2y} = c.$$

Daraus ergibt sich

$$\delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{2c : c_{11}}{c_{11} + 2c} = \gamma$$

In diesem Fall hat das System nur eine kritische Drehgeschwindigkeit

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$$

2. Es gelte

$$c_{1x} = c_{1y} = c_1, \quad c_{2x} = c_{2y} = c_2.$$

Daraus folgt

$$\gamma_1 = \gamma_2 = c_{11} \left[ 1 - \frac{c_{11}}{2} \left( \frac{1}{c_{11} + 2 c_2} + \frac{1}{c_{11} + 2 c_1} \right) \right] = \gamma,$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{c_{11}^2 l^2}{4} \left( \frac{1}{c_{11} + 2 c_2} - \frac{1}{c_{11} + 2 c_1} \right) = \delta.$$

Die kritischen Winkelgeschwindigkeiten für die reguläre Präzession ergeben sich als positive Wurzeln der Gl.

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) = & (\gamma - m \omega^2) \left[ \gamma \frac{l^2}{4} \right. \\ & \left. + (I - J - \omega^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_{on}^2}{\mu_n (\sigma_n^2 - \omega^2)}) \omega^2 \right] \\ & - \delta^2 = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Dabei ist

$$I - J - \omega^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_{on}^2}{\mu_n (\sigma_n^2 - \omega^2)} = \mathcal{L}$$

das äquivalente Trägheitsmoment.

Wenn der Einfluß der Flüssigkeit aus der Betrachtung ausgeschlossen wird ( $\rho = 0$ ), so stimmt die Gl. (35) mit

der bekannten Gl. für den festen Rotor [7] überein. Daß  $\mathcal{L}$  gegen  $-\infty$  bei  $\sigma_n = \omega$  geht, ist eine Folge der linearen Aufgabenstellung. Um dieses Problem zu beheben, muß die Energiedissipation für die Relativbewegung der Flüssigkeit in die Betrachtung einbezogen werden. Die Bewegungsgln. lassen sich unter Einbeziehung der Energiedissipation folgendermaßen formulieren: Die ersten vier Gln. des Systems (34) bleiben unverändert, die letzten zwei Gln. haben folgendes Aussehen [5]:

$$\begin{aligned} \mu_n (\ddot{q}_n + \tau_n \dot{q}_n + \sigma_n^2 q_n) + \lambda_{on} \ddot{\alpha} &= 0 \\ \mu_n (\ddot{s}_n + \tau_n \dot{s}_n + \sigma_n^2 s_n) + \lambda_{on} \ddot{\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (36)$$

wobei  $\tau_n$  der Dämpfungskoeffizient und  $\delta_n$  das logarithmische Dekrement für den entsprechenden Hohlraum sind.

$q_n$  und  $s_n$  werden in komplexer Form dargestellt

$$q_n = B_n e^{i\omega t}, \quad s_n = C_n e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}.$$

Nach Einsetzen dieser Werte in (34) unter Beachtung von (36) und Trennen des realen und imaginären Teils erhält man

$$\begin{aligned} \Delta(\omega) = (\gamma - m\omega^2) \left[ \gamma \frac{1}{4} + (1 - J \right. \\ \left. - \omega^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_{on}^2 (\sigma_n^2 - \omega^2)}{\mu_n [(\sigma_n^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \tau_n^2]} \right] \omega^2 - \delta^2 = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Jetzt hat das äquivalente Trägheitsmoment keine Sprungstellen bei  $\sigma_n = \omega$ . Im Falle von  $\tau_n = 0$  fällt Gl. (37) mit Gl. (35) zusammen. Als Dämpfungskoeffizient  $\tau_n$  bekommt man

$$\tau_n = \frac{\delta_n \sigma_n}{\pi} \quad (38)$$

mit

$$\delta_n = \frac{\Delta U_n}{2U} \quad (39)$$

$\Delta U_n$  ist die Energie, die während einer Schwingungsperiode abgegeben wird und

$U$  ist die maximale Energie der Flüssigkeitsschwingung, deren Wert sich aus Gl. (33) bestimmen läßt.

Wenn die Flüssigkeitsoberfläche harmonische Schwingungen mit der Geschwindigkeit  $v_n \cos \sigma_n t$  ausführt, so ist

$$\Delta U_n = \pi \rho \sqrt{\frac{\nu}{2\sigma_n}} \int_S v_n^2 dS, \quad (40)$$

wobei  $\nu$  die kinematische Viskosität und

$$v_n = \sigma_n s_{on} \nabla \varphi_n$$

die Geschwindigkeitsamplitude für die Schwingungen der idealen Flüssigkeit an den Wänden des Hohlraums ist.

Die Geschwindigkeitskomponenten  $v_n$  kann man folgendermaßen bestimmen. Auf der Fläche  $r = R$  gilt

$$v_{zn} = 0,$$

$$v_{\Theta n} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \Theta} \sigma_n s_{on} = \frac{D_1^n \sigma_n s_{on}}{\kappa R} \cos \Theta \sin \kappa z,$$

$$v_{zn} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \sigma_n s_{on} = D_1^n \sigma_n s_{on} \sin \Theta \cos \kappa z.$$

Auf der Fläche  $z = a/2$  gilt

$$v_{zn} = 0,$$

$$v_{rn} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \sigma_n s_{on}$$

$$= \frac{\sin(n\pi/2) \sigma_n s_{on}}{\kappa M_1^n} [K_1^n(\kappa r) - L_1^n I_1^n(\kappa r)] \sin \Theta,$$

$$v_{\Theta n} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \Theta} \sigma_n s_{on}$$

$$= \frac{\sin(n\pi/2) \sigma_n s_{on}}{\kappa M_1^n r} [K_1(\kappa r) - L_1^n I_1(\kappa r)] \cos \Theta.$$

und auf der Fläche  $z = -a/2$

$$v_{zn} = 0,$$

$$v_{rn} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} \sigma_n s_{on} = \frac{\sin(n\pi/2) \sigma_n s_{on}}{\kappa M_1^n}$$

$$[L_1^n I_1^n(\kappa r) - K_1^n(\kappa r)] \sin \Theta,$$

$$v_{\Theta n} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \Theta} \sigma_n s_{on} = \frac{\sin(n\pi/2) \sigma_n s_{on}}{\kappa M_1^n r}$$

$$[L_1^n I_1(\kappa r) - K_1(\kappa r)] \cos \Theta.$$

Wenn man die Werte der Geschwindigkeitskomponenten  $v_n$  in die Gl. (40) einsetzt und über die Fläche integriert, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\Delta U_n = \rho \sqrt{\frac{\nu}{2\sigma_n}} \frac{\omega^2 \bar{R}_o a^2 M_1^n s_{on}}{n H_1^n}$$

$$\left[ \frac{(D_1^n)^2}{2\bar{R}} (1 + n^2 \pi^2 \bar{R}) + \frac{2}{(M_1^n)^2} (F_R^n - F_{R_o}^n) \right]$$

mit

$$H_1^n = L_1^n I_1(n\pi \bar{R}_o) - K_1(n\pi \bar{R}_o),$$

$$F_R^n = \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 \bar{R}^2}{2}\right) [K_o(n\pi \bar{R}) + L_1^n I_o(n\pi \bar{R})]^2$$

$$- [K_1(n\pi \bar{R}) - L_1^n I_1(n\pi \bar{R})]^2$$

$$- [K_o(n\pi \bar{R}) - L_1^n I_o(n\pi \bar{R})]^2,$$

$$F_{R_o}^n = \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 \bar{R}_o^2}{2}\right) \left\{ [K_o (n \pi \bar{R}_o) + L_1^n I_o (n \pi \bar{R}_o)]^2 - [K_1 (n \pi \bar{R}_o) - L_1^n I_1 (n \pi \bar{R}_o)]^2 \right\} - [K_o (n \pi \bar{R}_o) - L_1^n I_o (n \pi \bar{R}_o)]^2.$$

Nach Einsetzen von  $\Delta U_n$  und  $U$  in die Gl. (39) ergibt sich

$$\delta_n = \frac{2 M_1^n \left[ \frac{(D_1^n)^2}{2R} (1 + n^2 \pi^2 \bar{R}) + \frac{2}{(M_1^n)^2} (F_R^n - F_{R_o}^n) \right]}{n \Pi_1^n \sqrt{2 R_{en}}} \quad (41)$$

mit

$$R_{en} = \frac{\sigma_n a^2}{\nu} \text{ als Reynoldszahl für die } n\text{-te Schwingform.}$$

Aus der Gl. (34) wird der Dämpfungskoeffizient ermittelt

$$\tau_n = \frac{2 M_1^n \sqrt{\sigma_n \nu} \left[ \frac{(D_1^n)^2}{2R} (1 + n^2 \pi^2 \bar{R}) + \frac{2}{(M_1^n)^2} (F_R^n - F_{R_o}^n) \right]}{a \sqrt{2} \pi n H_1^n} \quad (42)$$

### Numerische Ergebnisse

Auf Bild 2 ist die Abhängigkeit der kritischen Drehgeschwindigkeiten des Rotors vom Wert des Füllungsstandes mit Flüssigkeit für den Rotor gezeigt. Zum Vergleich ist die Kurve für die kritischen Drehgeschwindigkeiten des Rotors  $\Omega_{kr}$  bei Nichtberücksichtigung der Flüssigkeitsbewegung (die Flüssigkeit wurde wie ein fester Körper behandelt) angeführt. In der Tabelle 1 sind die Ausgangsdaten für den Rotor und die mechanischen sowie hydraulischen Charakteristika des Systems angeführt.

Wie auf dem Bild zu sehen ist, führt die Berücksichtigung der Flüssigkeitsbewegung im sich drehenden Rotor zum Auftreten zusätzlicher kritischer Drehgeschwindigkeiten des Rotors.

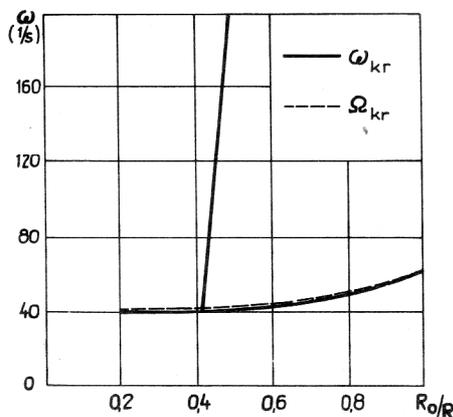


Bild 2

Abhängigkeit der kritischen Drehgeschwindigkeiten vom Flüssigkeitsstand

Tabelle 1

n	a	R	l	ρ	ν	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>11</sub>	m <sup>o</sup>	I <sup>o</sup>	J <sup>o</sup>
m	m	m	m	kg/m <sup>3</sup>	m <sup>2</sup> /c	N/m	N/m	N/m	kg	kg m <sup>2</sup>	kg m <sup>2</sup>
5	1	0,6	2,5	10 <sup>3</sup>	10 <sup>-6</sup>	6·10 <sup>8</sup>	2·10 <sup>8</sup>	3·10 <sup>6</sup>	600	200	160

N	R <sub>o</sub>	a	m <sup>o</sup>	I <sup>o</sup>	J <sup>o</sup>	ω <sub>kp</sub>	Ω <sub>kp</sub>
m	m	m	kg	kg m <sup>2</sup>	kg m <sup>2</sup>	1/s	1/s
1	0,4	0,5	400	133	75	64,7	64,7
2	0,4	1,0	600	200	160	49,3 427	49,4
3	0,4	1,6	600	200	160	43,2	43,5 324,2
4	0,4	2,0	800	267	450	38,1 49,6	38,2 103,4

Tabelle 2

In der Tabelle 2 sind die Ausgangsparameter und die kritischen Drehgeschwindigkeiten des Rotors mit und ohne Berücksichtigung der Bewegung der Flüssigkeit angeführt. Die Berücksichtigung der Flüssigkeitsbewegung kann zu zusätzlichen kritischen Drehgeschwindigkeiten oder zur Verringerung ihrer Anzahl führen. Das lässt sich damit erklären, daß die Gl. (37) eine positive reelle Wurzel hat, wenn das äquivalente Trägheitsmoment positiv ist, und zwei positive Wurzeln besitzt, wenn das äquivalente Trägheitsmoment negativ ist. Die Berücksichtigung der Bewegung der freien Flüssigkeitsoberfläche bei gewissen Verhältnissen der Rotorabmessungen, der hydraulischen sowie der mechanischen Charakteristika des Systems führt zur Vorzeichenänderung beim äquivalenten Trägheitsmoment. Dies führt gleichzeitig zu zusätzlichen kritischen Drehgeschwindigkeiten oder zur Verringerung ihrer Anzahl.

### LITERATUR

- [1] Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П.: Нестационарные колебания механических систем. Киев: Наукова думка, 1966, 336 с.
- [2] Костандян Б. А.: Об устойчивости вращательных движений волчка с плоскостью, неполостью наполненной жидкостью. Журнал прикладной механики и технической физики, 1960, № 3, с. 56 – 64
- [3] Кумок Ю. З., Новгородцева Л. З.: О малых свободных колебаниях вращающегося цилиндра, частично заполненного жидкостью. Прикладная механика, 1965, т. 1, в. 12, с. 86 – 94.
- [4] Малашенко С. В.: Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел. Журнал прикладной механики и технической физики, 1960, № 3, с. 205 – 211
- [5] Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.: Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Москва, Машиностроение, 1968, 532 с.
- [6] Нариманов Г. С.: О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. Прикладная математика и механика, 1956, т. XX, в. 1, с. 21 – 38

- [7] Рабинович Б. И.: Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. Прикладная математика и механика, 1956, т. XX, в. 1, с. 39 – 50 .

**Anschrift der Verfasser:**

проф. д. т. н. Богомолов С. И.  
инженер Корсунский С. С.  
Харьковский политехнический институт им. Ленина  
кафедра „Динамика и прочность машин”  
СССР-310002 Харьков  
ул. Фрунзе 21

Prof. Dr. sc. techn. Udo Fischer  
Technische Hochschule „Otto von Guericke”  
Wissenschaftsbereich Festkörpermechanik  
DDR – 3010 Magdeburg  
PSF 124