

# Die Optimierung von Konstruktionen auf der Basis diskreter Modelle der FEM

Vladimir Grinev, Eduard Simson, Johannes Altenbach

## 1. Einführung

Bei der Optimierung mechanischer Konstruktionen und Konstruktionselemente gibt es zwei Vorgehensweisen. Bei der ersten Vorgehensweise betrachtet man stetige Modelle kontinuierlicher Systeme, für die stetige Optimalitätsbedingungen und Ableitungen der entsprechenden Funktionale formuliert werden. Die Diskretisierung erfolgt erst in der Etappe der numerischen Lösung der Optimierungsaufgabe [1].

Im zweiten Fall erfolgt die Diskretisierung bereits mit der Aufgabenformulierung, d. h. Optimalitätsbedingungen werden für diskrete Modelle der betrachteten Systeme formuliert.

Ohne auf theoretische Fragen des Vergleichs dieser beiden Vorgehensweisen einzugehen, sei hier nur bemerkt, daß für räumliche Konstruktionen und für Elemente mit komplizierter Form, wie sie für den Maschinenbau typisch sind, bereits die Formulierung eines der technischen Aufgabenstellung entsprechenden mathematischen Modells in der Form einer Randwertaufgabe für das System der Dgl'n schwierig ist. Dies gilt besonders für eine stetige Formulierung der Optimalitätsbedingungen. Auf der anderen Seite gibt es viele positive Erfahrungen bei der Anwendung diskreter Modelle in Matrixschreibweise, insbesondere von Finite-Elemente-Modellen bei der Berechnung komplizierter Konstruktionen.

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Aufgabenstellungen für die Optimierung mechanischer Systeme betrachtet, die durch entsprechende Finite-Elemente-Modelle darstellbar sind. Dabei werden unterschiedliche Optimalitätsbedingungen analysiert, numerische Methoden und Optimierungsalgorithmen diskutiert sowie numerische Ergebnisse angegeben. Die Universalität der FEM und die daraus folgende Universalität der mathematischen Methoden, der Algorithmen und der Programmpakete zur Optimierung von Konstruktionen auf der Basis der FEM ist ebenfalls ein wichtiges Argument für die Anwendung der hier gewählten Vorgehensweise.

## 2. Die Optimalitätsbedingungen

### 2.1. Statische Beanspruchungen

Zuerst wird der Fall statischer Belastungen betrachtet. Die Aufgabe wird in der für die FEM typischen Matrixschreibweise formuliert. So gilt z. B. für die Verschiebungsgrößenmethode die Matrizen-Gl. (1)

$$K(\vec{u}) \vec{y} = \vec{f}. \quad (1)$$

Hierin ist

$\vec{y}$  der Vektor der verallgemeinerten Knotenverschiebungen,  
 $\vec{f}$  der Belastungsvektor,  
 $K(\vec{u})$  die Steifigkeitsmatrix für das System,  
 $\vec{u}$  der Vektor der variierbaren konstruktiven Parameter des Systems, die folgender Beschränkung unterliegen:

$$u_i^{\min} \leq u_i \leq u_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Die Optimierungsaufgabe besteht in der Ermittlung einer solchen Lösungsmenge  $\vec{u}_{\text{opt}}$  der variierbaren Parameter  $\vec{u} \in U$  des konvexen Variationsgebietes  $U$ , die das Minimum des Qualitätsfunktionals  $I = I(\vec{u}, \vec{y})$  sichert. Dabei ist  $\vec{y}$  die Lösung der Gl. (1).

Um die Optimalitätsbedingungen zu formulieren, wird in die Betrachtung die zu Gl. (1) adjungierte Aufgabe eingeführt

$$K^T(\vec{u}) \vec{\psi} = \vec{g}.$$

Dabei sind

$$\vec{g} = \text{grad}_{\vec{y}} I = \left\{ \frac{\partial I}{\partial y_i}, i = 1, \dots, n \right\}$$

und  $K^T$  die zu  $K$  transponierte Matrix.

Wegen der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix gilt  $K^T = K$  und die konjugierte Aufgabe kann auch durch die Gl.

$$K(\vec{u}) \vec{\psi} = \text{grad}_{\vec{y}} I \quad (3)$$

dargestellt werden. Gl. (3) beschreibt das gleiche mechanische System, welches jedoch durch ein fiktives Kräftesystem  $\vec{g}$  belastet wird. Das System  $\vec{g}$  ist durch die Wahl des Qualitätsfunktionals definiert.

Führt man das diskrete Hamiltonsche Funktional

$$H = (K(\vec{u}) \vec{y}, \vec{\psi}) - I(\vec{u}, \vec{y})$$

ein, so kann man leicht zeigen, daß

$$\text{grad}_{\vec{u}} H = \left\{ -\frac{\partial H}{\partial u_i}, i = 1, \dots, n \right\}$$

ist. Hierbei wird nur nach dem explizit eingehenden  $u$  abgeleitet

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left( \frac{\partial I}{\partial \vec{y}}, \vec{y}_u \right) + \frac{\partial I}{\partial u} = (K \vec{\psi}, \vec{y}_u) + I_u$$

$$= -(\vec{\psi}, K_u \vec{y}) + I_u = \frac{\partial H}{\partial u}.$$

Dabei wurde die folgende Gl. (4) verwendet, die man durch Differentiation der Gl. (1) erhält

$$K \vec{y}_u + K_u \vec{y} = 0. \quad (4)$$

Wenn die Variation von  $\vec{u}$  nicht auf das abgeschlossene Gebiet  $U$  beschränkt wäre, so ist die notwendige Optimalitätsbedingung auf  $\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, i = 1, \dots, n$  zurückführbar.

Für den Fall, daß  $H$  eine konvexe Funktion von  $\vec{u}$  ist, kann die notwendige Optimalitätsbedingung im Variationsgebiet  $U$  als Maximum des diskretisierten Funktionals  $H$  für ein optimales  $\vec{u}_{opt}$  (diskretes Maximum-Prinzip), formuliert werden:

$$H(\vec{u}_{opt}, \vec{y}, \vec{\psi}) = \max_{\vec{u} \subset U} H(\vec{u}, \vec{y}, \vec{\psi}). \quad (5)$$

Es sind auch andere Fälle angebar, für die das diskrete Maximum-Prinzip gilt. Diese Frage ist ausführlich in [2] bis [4] behandelt.

Im allgemeinen Fall stellt das diskrete Maximum-Prinzip weder eine notwendige noch eine hinreichende Optimalitätsbedingung dar. Man kann zeigen, daß man alle Stationaritätspunkte von  $H$  betrachten muß. Entsprechend wird die Optimalitätsbedingung als Maximum-Bedingung in der Form

$$(\vec{p}_o, \vec{u}_{opt}) = \max_{\vec{u} \subset U} (\vec{p}_o, \vec{u}) \text{ mit } \vec{p}_o = \left\{ \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \right\} \Big|_{\vec{u} = \vec{u}_{opt}} \quad (6)$$

angegeben. Diese Bedingung ist der Kuhn-Tuckerschen Bedingung äquivalent

$$\mu_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

$$\mu_j V_j(u_{opt}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{u}} [H + (\vec{\mu}, \vec{V})] = 0,$$

$$\vec{V} = \{ V_i, i = 1, \dots, 2n \}.$$

Hier wird das Variationsgebiet (2) in der äquivalenten Form dargestellt

$$U: \quad V_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

$$V_{2i-1} = u_i - u^{\min},$$

$$V_{2i} = u^{\max} - u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wichtig für die erfolgreiche Lösung der Aufgabe ist die Auswahl des mathematischen Modells und die Einführung der zu variierenden Parameter. Im betrachteten Fall hängt dies von der Finite-Elemente-Diskretisierung ab. So vereinfacht sich die Untersuchung der Optimalitätsbedingungen wesentlich, wenn beispielsweise die Konstruktion ein Ensemble aus finiten Elementen konstanter Dicke darstellt. Jedes Element liefert seinen Beitrag zum Vektor der zu variierenden Parameter  $\vec{u} = \{ u_i, i = 1, \dots, n \} = \{ h_i, i = 1, \dots, n \}$ . Die Steifigkeitsmatrix des Systems zerfällt damit in  $n$  Glieder, die nur von  $u_i$  abhängen

$$K(\vec{u}) = \sum_{i=1}^n K_i(u_i).$$

Damit gilt auch

$$I = \sum_{i=1}^n I_i(u_i, \vec{y}) \quad (8)$$

und das Hamilton-Funktional wird eine additive Funktion für  $\vec{u}$

$$H = (K(\vec{u}) \vec{y}, \vec{\psi}) - I = \sum_{i=1}^n (K_i(u_i) \vec{y}, \vec{\psi}) - I_i(u_i, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n H_i. \quad (9)$$

Damit wird die Optimalitätsbedingung in der Form des diskreten Maximum-Prinzips (5) in ein unabhängiges System von  $n$  Maximum-Prinzipien  $H_i(u_i)$  für eine Variable  $u_i$  überführt:

$$\max_{\vec{u} \subset U} H \Rightarrow \max_{u^{\min} \leq u_i \leq u^{\max}}$$

$$\{ H_i = K_i(u_i) \vec{y}, \vec{\psi} - I_i(u_i, \vec{y}) \} \quad (10)$$

Es sei nochmals angemerkt, daß das Funktional (8) selbst infolge der komplizierten Abhängigkeit  $\vec{y}(\vec{u})$ , die aus der Aufgabe (1) folgt, keine additive Funktion für  $u_i, i = 1, \dots, n$  ist. Somit wird im Fall der Verwendung der Optimalitätsbedingung (10) die Aufgabe  $\max H_i$  für eine Variable  $u_i$  in  $n$  Aufgaben  $\max H_i$  für eine Variable  $u_i$  überführt. Es wird damit unter der Voraussetzung, daß das diskrete Maximum-Prinzip anwendbar ist, möglich, die bewährten Methoden für eindimensionale Aufgaben zu verwenden. Die Beziehung (9) wird natürlich auch bei anderen Optimalitätsbedingungen verwendet.

Ein weiterer Vorteil, der sich aus der alleinigen Verwendung von Elementen konstanter Dicke ergibt, ist die einfachere Struktur der Beziehungen  $K = K(u_i)$ . So ist für dünnwandige, auf Biegung beanspruchte Elemente  $K_i = u_i^3 \bar{K}_i$ , für auf Zug-Druck beanspruchte Elemente  $K_i = u_i \bar{K}_i$  und für eine Überlagerung von Zug-Druck und Biegung  $K_i = u_i^3 \bar{K}_i^{(1)} + u_i \bar{K}_i^{(2)}$ .

Es wäre jedoch nicht richtig, die Verwendung von Elementen konstanter Dicke immer als gerechtfertigt für Optimierungsaufgaben anzusehen. So ist beispielsweise bekannt, daß man bei der Verwendung dieses Elementtyps, genauer gesagt, für die daraus folgende Klasse von abschnittsweise-konstanten, variierbaren Funktionen, die Existenz optimaler Lösungen nicht beweisen kann [5]. Es entstehen Effekte, die mit einer nichtkorrekten Aufgabenstellung verbunden sind, und eine Regularisierung der Optimierungsaufgabe notwendig machen [6].

## 2.2. Eigenschwingungen

Die Aufgabe der Berechnung der Eigenschwingungen von Konstruktionen soll mit Hilfe der FEM gelöst werden. Dabei wird sie auf folgendes Matrizen-Eigenwert-Problem zurückgeführt

$$[K(\vec{u}) - \lambda M(\vec{u})] \vec{y} = 0. \quad \text{Hier sind} \quad (11)$$

$\vec{y}$  der Eigenvektor  
 $\lambda = \omega^2$  der Eigenwert, für den Gl. (12) gilt  
 $\det |K - \lambda M| = 0.$  (12)

K und M sind die Steifigkeits- und die Massenmatrix des Systems.

Das Qualitätskriterium, nach dem die Konstruktionsoptimierung erfolgen soll, stellt nicht nur Forderungen an die Eigenfrequenzen (vgl. [1], [7]), sondern auch an die Eigenformen. Beispielsweise führt die Optimierung mechanischer Systeme bei erzwungenen Schwingungen auf spezielle Forderungen an die Eigenformen und Eigenfrequenzen [2], was auch später gezeigt wird.

Die Optimierungsaufgabe soll wie folgt gegeben sein: Es ist eine solche Menge variierbarer Parameter  $\vec{u}_{opt}$  aus dem Variationsgebiet U zu ermitteln, die das Funktional I nach Gl. (13), welches vom Eigenvektor  $\vec{y}$  abhängt, minimieren

$$I = \sum_{i=1}^n I(u_i, \vec{y}). \quad (13)$$

Die adjungierte Aufgabe lautet unter Beachtung der Symmetrie der Matrizen K und M

$$[K(\vec{u}) - \lambda M(\vec{u})] \vec{\psi} = \vec{g} = \frac{\partial I}{\partial \vec{y}} \quad (14)$$

Die Matrizen Gl. verfügt über eine wesentliche Besonderheit: sie stellt ein inhomogenes System mit einer aufgrund der Gl. (12) entarteten Matrix der dynamischen Steifigkeiten dar. Damit die Gln. (11) und (14) gemeinsam lösbar sind, ist die Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \vec{y}}, \vec{y}\right) = 0 \quad (15)$$

notwendig.

Es ist nicht schwierig zu zeigen, daß die Bedingung (15) der mathematischen Forderung der Unabhängigkeit des Funktionals (13) von der Normierung der Aufgabe entspricht. Folglich wird sie für diese Funktionale im allgemeinen automatisch erfüllt. Wenn dies nicht der Fall ist, so wird die Aufgabenstellung (11) durch die Normierungsbedingung

$$N(\vec{u}, \vec{y}) = 1 = \text{konst} \quad (16)$$

ergänzt (z. B. entsprechend der kinetischen Energie des Systems  $(M\vec{y}, \vec{y}) = 1$ ). Nach der Einbeziehung dieser Bedingung mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

$$I_1 = I(\vec{u}, \vec{y}) + \mathcal{F} N(\vec{u}, \vec{y})$$

ist es möglich, den Störvektor  $\vec{g} = \frac{\partial I}{\partial \vec{y}}$  der Gl. (14) zu orthogonalisieren

$$\left(\frac{\partial I_1}{\partial \vec{y}}, \vec{y}\right) = 0, \mathcal{F} = - \left(\frac{\partial I}{\partial \vec{y}}, \vec{y}\right) / \left(\frac{\partial N}{\partial \vec{y}}, \vec{y}\right).$$

Die Gl. (14) beschreibt die gleiche Konstruktion, wie die Gl. (11), jedoch bei einer Belastung durch dynamische Kräfte, deren Verteilung durch das Qualitätsfunktional bestimmt wird und deren Erregerfrequenz gleich der Ei-

genfrequenz ist. Endliche Lösungen für den Fall des Einwirkens dieser fiktiven Resonanzkräfte sind nur dann möglich, wenn diese keine Arbeit mit der Resonanzschwingform leisten. Darin besteht der physikalische Sinn der Orthogonalitätsbedingung (15). Das Einführen der Normierungsbedingung entspricht der Einprägung eines Kräftesystems, welches die Arbeit der fiktiven Kräfte des Hauptfunktionals mit der Resonanzschwingform kompensiert.

Nach der Orthogonalisierung können die Lösung der inhomogenen konjugierten Matrizen Gl. (14) mit der entarteten Matrix und nachfolgend das Hamilton-Funktional in Form einer einparametrischen Schar dargestellt werden. Das gilt jedoch nur für solche Fälle, wo keine Mehrfach-eigenfrequenzen auftreten:

$$\vec{\psi} = \vec{\psi}_f + k \vec{y}, \quad H = k H_0 + H_f, \quad (17)$$

$$H_0 = ([K - \lambda H] \vec{y}, \vec{y}), \quad H_f = ([K - \lambda H] \vec{y}, \vec{\psi}_f)$$

mit  $\vec{\psi}_f$  als Eigenlösung der Gl. (14), die gegebenenfalls durch die Bedingung  $N[\vec{\psi}] = 1$  ergänzt wird. Damit hängen die Optimalitätsbedingung (in der Form (5) oder (6)), der Gradientenausdruck und folglich die optimale Lösung vom Parameter k ab.

Man kann zeigen, daß der Teil  $H_0$  von H, der nicht vom Qualitätsfunktional abhängt, für die Stationarität des Eigenwerts verantwortlich ist [8] und somit der indirekt eingeführten Einschränkung

$$\lambda = \frac{(k \vec{y}, \vec{y})}{(M \vec{y}, \vec{y})} = \lambda_0 = \text{konst} \quad (18)$$

entspricht.

Hierbei spielt k die Rolle eines Langrangeschen Multiplikators, der die Einschränkung (18) für das Rayleighsche Funktional berücksichtigt. Wenn man den Wert k ändert, ändert man damit den Wert  $\lambda_0$  in der indirekten Einschränkung für die Eigenfrequenz. Man kann folglich mit der Optimalitätsbedingung unter Beachtung von (17) die Aufgabe über ein bedingtes Extremum  $\min(\max) I$  bei  $\lambda = \lambda_0 = \text{konst}$  lösen bzw. über  $\min(\max) \lambda$  bei  $I = \text{konst}$ , was das gleiche darstellt. Dies gestattet die Steuerung der Eigenfrequenz  $\omega^2 = \lambda$  und des Funktionals I, was für Optimierungsaufgaben bei erzwungenen Schwingungen wichtig ist (vgl. Abschnitt 2.3 bis 2.6, 2.8). Der Grund für das indirekte Einführen der Einschränkung (18) ist die Verwendung der Standardform der adjungierten Aufgabe und der Beziehungen für  $\vec{\text{grad}} I$  und für

$$H. \text{ So basiert die Ableitung der Gleichung } \vec{\text{grad}} I = - \frac{\partial H}{\partial \vec{u}}$$

auf der Gl.  $z \vec{y}_u = -z_u \vec{y}$ , welche zu (4) analog ist und durch Differentiation der Aufgabe (1) erhalten wurde. Für die Eigenschwingungsberechnung nach Gl. (11) ist  $z = K - \lambda M$ . Nach der Differentiation erhält man

$$[K - \lambda M] \vec{y}_u = -[K_u - \lambda M_u] \vec{y} + \lambda_u M \vec{y}.$$

Entsprechend gilt

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{u}} = \left(\frac{\partial I}{\partial \vec{u}}\right) + \left(\frac{\partial I}{\partial \vec{y}}; \vec{y}_u\right) = \frac{\partial I}{\partial \vec{u}} + ([K - \lambda M] \vec{\psi}, \vec{y}_u)$$

$$= \frac{\partial I}{\partial \mathbf{u}} + (\vec{\psi}, [K - \lambda M] \vec{y}_u) = \frac{\partial I}{\partial \mathbf{u}} - ([K_u - \lambda M_u] \vec{y}, \vec{\psi}) + \lambda_u (M \vec{y}, \vec{\psi}).$$

In diesem Fall folgt durch Einsetzen der Lösung in Form von  $\vec{\psi} = k \vec{y} + \vec{\psi}_f$  unter Beachtung der aus dem Rayleighschen Funktional folgenden Gl.

$$\lambda_u = ([K_u - \lambda M_u] \vec{y}, \vec{y}) / (M \vec{y}, \vec{y})$$

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{u}} = \left( \frac{\partial I}{\partial \mathbf{u}} \right) - ([K_u - \lambda M_u] \vec{y}, \vec{\psi}_f) + \lambda_u (M \vec{y}, \vec{\psi}_f).$$

Damit hängt der Gradient des Funktionals nicht mehr von  $k$  ab und er entspricht nicht mehr dem bedingten Extremum für  $I$  bei der Einschränkung (18). Die Verwendung des Ausdrucks

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{u}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}$$

entspricht der indirekten Einführung der Bedingung  $\lambda_u = 0$ , d. h.  $\lambda = \text{konst.}$  Dies konnte bereits bei der Abhängigkeit des Hamilton-Funktional, des Gradienten und der Optimalitätsbedingungen vom Faktor  $k$  beim Rayleighschen Funktional beobachtet werden. Wenn

$$(M \vec{y}, \vec{\psi}) = 0 \quad (19)$$

ist, so kann man beim Suchen des unbedingten Extremums für  $I$  die Standardform von  $H$  und den Ausdruck

$$I = - \frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

verwenden.

Damit sichert die Bedingung (19) die Normierung der adjungierten Randaufgabe, die dem absoluten Minimum des Funktionals  $I$  entspricht. Dabei gilt

$$k = - (M \vec{y}, \vec{\psi}_f) / (M \vec{y}, \vec{y}).$$

### 2.3. Erzwungene Schwingungen (ohne Resonanz)

Im Falle erzwungener Schwingungen ohne Resonanz, d. h. wenn die Frequenzen  $\nu$  der äußeren Kräfte genügend weit vom Spektrum der Eigenfrequenz des Systems entfernt sind und man die Dämpfung vernachlässigen kann, nimmt die Aufgabenstellung folgende Form an

$$[K - \nu^2 M] \vec{y} = \vec{p}. \quad (20)$$

Wenn man berücksichtigt, daß hier die Matrix der dynamischen Steifigkeiten  $Z = K - \nu^2 M$  nicht entartet ist, so stimmen die Lösung der Aufgabe (20) und die Optimalitätsbedingung für das Extremum des Funktionals  $I = I(\vec{u}, \vec{y})$  mit den entsprechenden Gln. für die statische Belastung überein, wenn  $K$  gegen  $Z$  ausgetauscht wird.

### 2.4. Erzwungene Resonanzschwingungen (Systeme mit diskreten Frequenzen)

In die allgemeinen Matrizengln. für die Schwingungsaufgabe wird ein Dämpfungsglied eingeführt, welches die irreversible Energiedissipation beschreibt [2]

$$K \vec{v} + M \ddot{\vec{v}} + \overset{\leftarrow}{R} [\dot{\vec{v}}] = P^* \sin(\nu t).$$

Unter Beachtung, daß für ein System mit einem nicht sehr dichten Spektrum der Eigenfrequenzen näherungsweise angenommen werden kann, daß die Form der erzwungenen Schwingungen mit der Resonanzform  $\vec{v} = \vec{y} f(t)$  zusammenfällt, und unter Anwendung energetischer Varianten der asymptotischen Methoden im Rahmen der ersten Näherung erhält man die Gl. des dynamisch äquivalenten Ein-Massen-Modells:

$$c f + m \ddot{f} + \overset{\leftarrow}{R} [\dot{f}] = P^* \sin(\nu t)$$

mit der Lösung

$$f = a \sin(\omega t + \varphi),$$

wobei

$$a = \frac{P^*}{\sqrt{(c - m \nu^2)^2 + (\Delta W(a))^2}}$$

ist. Dabei bedeuten

$c, m$  – die integrale „Steifigkeit“ bzw. „Masse“ des Systems auf der Resonanzschwingform (potentielle und kinetische Energie)

$$c = (K \vec{y}, \vec{y}), \quad m = (M \vec{y}, \vec{y}), \quad \text{wobei } \frac{c}{m} = \omega^2 \text{ ist,}$$

$\Delta W(a) = \int 2 \delta_\tau dV$  – die Energie, die während eines Schwingzyklus von der Konstruktion abgegeben wird. Entsprechend der Hypothese von Davydenkov für die amplitudenabhängige Energieabgabe  $\delta_\tau = \alpha \sigma_i^{n-1}$  kann man schreiben

$$\Delta W = a^{n+1} \Delta \bar{W}(\vec{y}) \text{ mit } \Delta \bar{W}(\vec{y}) = \Delta W |_{a=1} =$$

$$\int_v \alpha \bar{\sigma}_i^{n+1} dV, \quad \bar{\sigma} = \sigma(\vec{y}) |_{a=1},$$

$P^* = (\vec{P}, \vec{y})$  – die Arbeit der äußeren Kräfte zur Anregung der Resonanzschwingform.

Damit gehen in die Ausdrücke für die Amplitude der Resonanzschwingungen die Funktionale  $c, m, \Delta W, P^*$  ein, die von der Resonanzschwingform abhängen. Die Gl. zeigt die Möglichkeiten zur Steuerung der Amplitude der erzwungenen Schwingungen durch gezielte Änderung der Eigenfrequenz  $\omega$ , der integralen Charakteristika  $\Delta \bar{W}$  der Energiedissipation in der Konstruktion und der Arbeit  $P^*$  der äußeren Kräfte mit der Resonanzeigenform. Dies gestattet die Lösung der Optimierungsaufgabe für Konstruktionen bei erzwungenen Resonanzschwingungen ( $m, n, I(\vec{v})$ ) auf die Optimierungsaufgabe bei Eigenschwingungen mit Funktionalen zurückzuführen, die von der Resonanzform abhängen ( $\omega, P^*, \Delta W$ ).

### 2.5. Erzwungene Schwingungen (allgemeiner Fall)

Viele reale Konstruktionen verfügen über ein sehr dichtes Frequenzspektrum. In diesem Fall ist bei der Lösung der Matrizengl. für die erzwungenen Schwingungen

$$K \vec{v} + M \ddot{\vec{v}} + 2n M \dot{\vec{v}} = P_s \sin \nu t + P_c \cos \nu t$$

der Verschiebungsvektor  $\vec{v}$  in eine Reihe nach den Eigenformen zu entwickeln

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \vec{y}_i f_i(t)$$

Nach skalarer Multiplikation mit  $\vec{y}_i$  und unter Beachtung der Orthogonalität  $(K \vec{y}_i, \vec{y}_i) = (M \vec{y}_i, \vec{y}_i) = 0$  und der Normierung  $(M \vec{y}_i, \vec{y}_i) = 1$  der Eigenformen erhält man

$$\omega_i^2 f_i + \ddot{f}_i + 2n \dot{f}_i = P_{s_i}^* \sin \nu t + P_{c_i}^* \cos \nu t$$

mit

$$\omega_i^2 = (K \vec{y}_i, \vec{y}_i) / (M \vec{y}_i, \vec{y}_i) = (K \vec{y}_i, \vec{y}_i)$$

$$P_{s_i}^* = (\vec{P}_s, \vec{y}_i), P_{c_i}^* = (\vec{P}_c, \vec{y}_i), P_i = \sqrt{P_{s_i}^2 + P_{c_i}^2}$$

$$f_i(t) = a_{s_i} \sin \nu t + a_{c_i} \cos \nu t$$

Dabei ist es nicht schwierig, folgende Beziehungen zu erhalten

$$a_i = \frac{P_i^*}{\sqrt{(\omega_i^2 - \nu^2)^2 + 4n^2}}$$

Die Verschiebungen der Konstruktion bei erzwungenen Schwingungen ergeben sich zu

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i^* \vec{y}_i \sin(\nu t + \varphi_i)}{\sqrt{(\omega_i^2 - \nu^2)^2 + 4n^2}}$$

und somit lassen sich alle Kriterien des Vibrations-Spannungs-Deformationszustandes bei der Optimierung ( $\min I(\vec{v})$ ) durch die Resonanzeigenschwingform und die von den Eigenformen  $P_i^*$ ,  $\omega_i$  abhängenden Funktionale ausdrücken. Offensichtlich verdankt man diese einfache Ableitung des Ergebnisses dem einfachen Dämpfungsmodell der linearen viskosen Reibung  $\overset{\leftarrow}{R}[\vec{v}] = 2n M \dot{\vec{v}}$ . Damit ist auch verbunden, daß im Gegensatz zur realen, amplitudenabhängigen Energiedissipation in den Ausdruck für  $\vec{v}$  die Funktionale  $\Delta W_i$  nicht eingehen.

## 2.6. Erzwungene Schwingungen nichtlinearer Systeme

Vielfach ist es zur wirklichkeitstreuen Abbildung realer Besonderheiten von Konstruktionen und von Arbeitsbedingungen notwendig, nichtlineare Modelle heranzuziehen. Die Nichtlinearitäten können mit der physikalischen Nichtlinearität des Materials, beispielsweise nichtvollständige Elastizität oder Energiedissipation im Material (vgl. Abschnitt 2.4.), mit geometrischer Nichtlinearität, z. B. großen Verschiebungen, mit konstruktiver Nichtlinearität usw. verbunden sein. Die Matrizengl. kann in diesem Fall folgendermaßen geschrieben werden

$$K \vec{v} + M \ddot{\vec{v}} + \left\{ \epsilon \overset{\leftarrow}{R}[\vec{v}] + N[\vec{v}] \right\} = P_s \sin \nu t + P_c \cos \nu t$$

Wenn man, was in den meisten Fällen der Realität entspricht, die Nichtlinearität als „klein“ annehmen kann ( $\epsilon$  ist dann ein kleiner Parameter), so führt die Anwendung asymptotischer Methoden für den kleinen Parameter, im Rahmen der ersten Näherung  $\vec{v} = a \sin(\nu t + \varphi)$   $\vec{y}$  auf folgende Resonanzkurve

$$\left[ \frac{\Delta W(a)}{a} \right]^2 + [(\omega - \nu)a - \frac{N(a)}{2\pi\omega m}]^2 = \frac{P^*}{m^2(\omega + \nu)^2}$$

Dabei beschreibt der Ausdruck in den eckigen Klammern die sogenannte Skelettkurve. Unter Beachtung von

$$\Delta W(a) = a^{n+1} \Delta \bar{W}(\vec{y}), N(a) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{N}_i(\vec{y}) \quad (\text{z. B.}$$

für geometrisch nichtlineare Aufgaben  $N(a) = \beta(\vec{y}) a^3$ ) kommt man zu dem Schluß, daß die Optimierung der Konstruktion ( $\min I(\vec{v})$ ) unter der Voraussetzung kleiner Schwingungen auf die optimale Steuerung der Funktionale  $\omega^2$ ,  $P^*$ ,  $\Delta \bar{W}$ ,  $\bar{W}$  führt, die jeweils von den Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen abhängen. Damit kann man die Optimalitätsbedingungen für die in den Abschnitten 2.4. bis 2.6. beschriebenen Fälle auf die des Abschnittes 2.2. zurückführen.

## 2.7. Optimierung unter Berücksichtigung von Fertigungsfehlern

Unzulänglichkeiten der Herstellungstechnologie der Konstruktion sowie die Folgen des Verschleißes beim Betrieb führen dazu, daß die konstruktiven Parameter Abweichungen von den vorgegebenen Werten aufweisen. Dadurch erhält man teilweise wesentliche Abweichungen der Charakteristika des Spannungs- und Deformationszustandes, was bei der Optimierung zu berücksichtigen ist.

Anstelle der Aufgabe  $\min I$  wird daher die folgende betrachtet

$$\min_{\vec{u} \in U} \left\{ \max_{\Delta \vec{u} \in \Delta U} I(\vec{u} + \Delta \vec{u}, \vec{y}) \right\}$$

$\Delta \vec{u}$  als Vektor der Abweichungen, der zum Gebiet  $\Delta U$  gehört,  $\Delta U$  als Gebiet der möglichen Abweichungen der Parameter, welches durch Toleranzen oder Verschleißgleichungen definiert ist (z. B.  $|\Delta u_i| \leq d_i$ ).

Wenn man beachtet, daß das Gebiet  $\Delta U$  sehr viel kleiner als das Variationsgebiet  $U$  ist, kann das Funktional  $I$  linearisiert werden

$$I(\vec{u} + \Delta \vec{u}) \approx I(\vec{u}) + \left( \frac{\partial H}{\partial \vec{u}}, \Delta \vec{u} \right)$$

Die Aufgabe kann somit vereinfacht werden

$$\max_{\Delta \vec{u} \in \Delta U} I(\vec{u} + \Delta \vec{u}) \approx I(\vec{u}, \vec{y}) + \sum_{i=1}^n d_i \left| \frac{\partial H}{\partial u_i} \right| \quad (21)$$

Um für  $\vec{u}$  die Bedingung für das Minimum des Funktionals (21) zu ermitteln, ist es dann notwendig, die Ausgangsaufgabe und die dazu adjungierte Aufgabe zu betrachten.

### 2.8. Optimierung nach den Zuverlässigkeitscharakteristika

Wenn bei der Betrachtung von Zufallsschwingungen die Zerlegung des Verschiebungsvektors entsprechend den Eigenformen verwendet wird, so können die Zeit bis zur Zerstörung oder andere Zuverlässigkeitscharakteristika als Funktionale dargestellt werden, die von den Eigenformen abhängen. Das bedeutet, daß die Optimierung von Konstruktionen nach den Zuverlässigkeitscharakteristika auf die im Abschnitt 2.2. behandelten Optimalitätsbedingungen führt.

## 3. Numerische Methoden

Die numerischen Methoden, die bei der Optimierung komplizierter Systeme verwendet wurden und werden, lassen sich in zwei Gruppen einteilen. Das sind die direkten Optimierungsmethoden (Gradientenmethoden und ihre Modifikationen, die Methode der schrittweisen Linearisierung) und die indirekten Methoden, bei denen die Optimierung auf die Lösung einer nichtlinearen Aufgabe führt, welche aus der Ausgangsaufgabe und der konjugierten Aufgabe besteht, die durch die Optimalitätsbedingungen (diskretes Maximum-Prinzip oder Bedingung von Kuhn-Tucker) verbunden sind. Es sei angemerkt, daß die überwiegende Anzahl der Lösungsmethoden für nichtlineare Aufgaben iterativen Charakter tragen. Damit führen die numerischen Algorithmen formal für beide Gruppen zum Aufbau von schrittweisen Näherungen.

### 3.1. Gradientenmethoden

Nach dem Ermitteln des Gradientenvektors

$$I = \frac{\partial I}{\partial \vec{u}} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{u}}$$

unter Beachtung der im Abschnitt 2 enthaltenen Beziehungen gibt es folgende Hauptfragen: die Auswahl der Schrittweite und das Verhalten in der Nähe des Randes. Der Wert der Schrittweite wurde unter Verwendung der Approximation der Funktionale in Richtung des Gradienten (einschließlich der Glieder zweiter oder dritter Ordnung) bestimmt. Dazu wird die Ausgangsaufgabe nach dem Parameter differenziert. Beispielsweise gilt für die Aufgabe (1)

$$\vec{u}^{(k+1)} = \vec{u}^{(k)} - t \vec{\nabla} I,$$

$$k \vec{y}_t = k_t \vec{y},$$

$$k \vec{y}_{tt} = -2 k_t \vec{y}_t - k_{tt} \vec{y},$$

$$\vec{y} \approx \vec{y}^{(k)} + t \vec{y}_t + \frac{t^2}{2} \vec{y}_{tt},$$

$$I \approx I^{(k)} + t I_t + \frac{t^2}{2} I_{tt}.$$

Das Verhalten am Rand wird aus Überlegungen zur Projektion des Gradienten und einer Approximation 2. Ordnung in Richtung der Projektion ermittelt.

### 3.2. Schrittweise Linearisierung

Der Algorithmus dieser Methode beinhaltet folgende Handlungsfolge für die Iteration:

- Formierung eines kleinen Gebietes um den Punkt  $\vec{u}^{(k)}$ . Dabei kann sich die Form des Gebietes in Abhängigkeit vom Verhältnis der Komponenten  $\frac{\partial H}{\partial u_i}$  ändern und die Ausdehnungen des Gebietes werden durch die Effektivität der Optimierung in der vorangegangenen Iteration und durch die Approximationen zweiter Ordnung definiert.
- die Linearisierung der Funktionale, die mit Hilfe der Beziehungen des zweiten Abschnittes vorgenommen wird,
- Lösung der Aufgabe der linearen Programmierung (Minimum des linearisierten Funktionals) im gebildeten kleinen Gebiet um den Punkt  $\vec{u}^{(k)}$ . Dabei werden spezielle Methoden der linearen Programmierung verwendet [9].

### 3.3. Methoden der schrittweisen Näherung für $\vec{u}$

Hierfür gilt folgender Algorithmus:

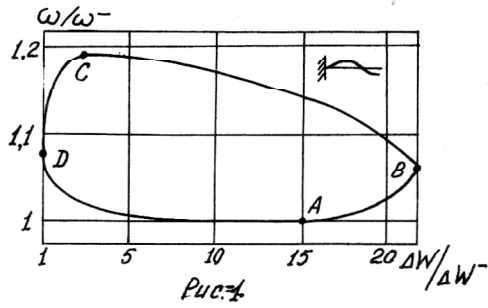
- Vorgeben der Anfangsnäherung, Lösung der Ausgangsaufgabe und der adjungierten Aufgabe,
- Formierung des Hamilton-Funktional,
- Untersuchung der Optimalitätsbedingungen,
- Erhalten der nächsten Näherung  $\vec{u}$  (beispielsweise aus den Bedingungen (5) und (6)).

Es sei darauf hingewiesen, daß bei zusätzlichen Einschränkungen für die Funktionale die indirekten Methoden zusätzliche Operationen zur Ermittlung der Faktoren enthalten, mit deren Hilfe diese zusätzlichen Bedingungen berücksichtigt werden können. Bei den direkten Methoden, besonders bei der Methode der schrittweisen Linearisierung, erfolgt die Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen (die ebenfalls bei jedem Schritt linearisiert werden) unmittelbar.

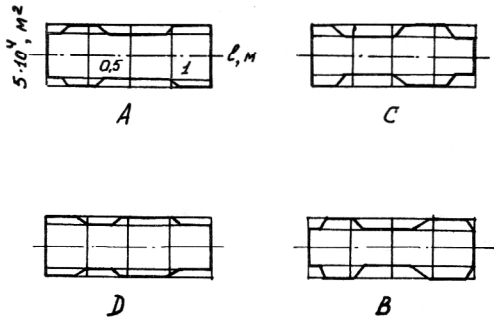
Alle Methoden und Algorithmen sind in Form von Programmpaketen für die Optimierung von Konstruktionen nach dynamischen und Festigkeitskriterien am PI Charkov realisiert.

## 4. Numerische Beispiele

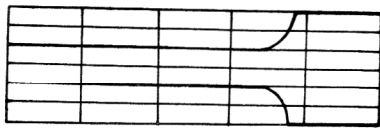
Es werden Biegeresonanzschwingungen eines Kragbalkens betrachtet, der durch eine Einzelkraft  $P \sin \omega t$  am Ende belastet ist. Dabei erfolgt die Normierung der Eigenformen mit der Bedingung  $y(1) = 1$ . Dann ist  $P^* = 1$  und die maximale Amplitude der Resonanzschwingungen  $a|\omega = \omega_r = a_r$  ist umgekehrt proportional zum Funktional  $\Delta W$  – des Energieverlustes im Balkenmaterial (vgl. Abschnitt 2.4.). Die Optimierungsaufgabe wurde für die Balkendicke  $\vec{u} = \{h_i, i = 1, \dots, n\}$  mit den Nebenbedingungen  $h_{\min} \leq h_i \leq h_{\max}$  nach dem Kriterium  $\max \Delta W$  (bzw.  $\min a_r$  – was gleichbedeutend ist) bei gleichzeitiger Steuerung der Eigenfrequenz



**Bild 1**  
Optimalitätskurve für die zweite Eigenform der Längsschwingungen eines Kragbalkens



**Bild 2**  
4 Optimale Konfigurationen für den Kragbalken



**Bild 3**  
Optimale Balkenform für die erste Form der Biegeschwingungen

min $\omega_1$ $\omega_1 = 162,12$				max $\omega_2$ $\omega_2 = 364,2$			
0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1
0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5
0,5	0,5	0,60	0,62	1	1	1	0,5
0,5	0,77	1	1	1	1	1	0,5
0,5	1	1	1	1	1	1	1
0,5	1	1	1	0,5	1	1	1
0,5	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5

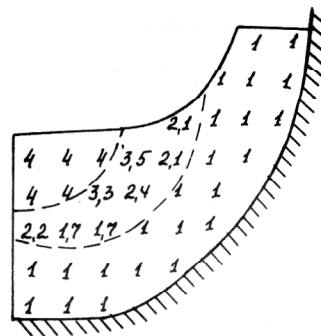
**Bild 4a**  
Werte der zweiten Iteration für die Torsionsschwingungen

**Bild 4b**  
Werte der zweiten Iteration für die Biegeschwingungen

des Balkens untersucht. Die Optimalitätsbedingung entspricht den Abschnitten 2.2. und 2.4.

Optimiert wird ein Balken von 1 m Länge. Einschränkungen für die Fläche bei der Variation der Balkenkonstruktion:  $7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \leq S(x) \leq 10^{-3} \text{ m}^2$ , Exponent in der Davydenkov-Abhängigkeit:  $n = 3$ . Es wurde die Resonanz mit der zweiten Eigenform für Längsschwingungen betrachtet. Auf Bild 1 ist die geschlossene Kurve in dimensionslosen Koordinaten  $\omega, \Delta W$  dargestellt. Diese ist die Lösung folgender Aufgaben:  $\min (\max) \Delta \bar{W}$  bei  $\omega^2 = \lambda = \text{konst}$  oder, was gleichbedeutend ist,  $\min (\max) \omega$  bei  $\Delta \bar{W} = \text{konst}$ . Jeder Punkt der Kurve entspricht seiner optimalen Konfiguration, vier von ihnen, die den absoluten Extrema  $\max \Delta \bar{W}$ ,  $\min \Delta \bar{W} = \Delta \bar{W}^-$ ,  $\max \omega$ ,  $\min \omega = \omega^-$  entsprechen, sind auf Bild 2 dargestellt. Dabei hat sich gezeigt, daß der Bereich der möglichen Änderungen der Energiedissipation aufgrund der Änderungen der Konfiguration des Balkens gleich  $\max \Delta \bar{W} / \min \Delta \bar{W} = 22$  ist. Dies entspricht der Möglichkeit zur Verringerung der maximalen Resonanzamplitude um das 2,8fache. Als Beispiel ist auf Bild 3 die optimale Balkenform, die  $\min \Delta W$  ( $\max a_r$ ) der ersten Form der Biegeschwingungen mit einer Variation der Dicke im Bereich  $10^{-2} \text{ m} \leq h(x) \leq 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  entspricht.

Auf Bild 4a, b sind die zweiten Iterationen der schrittweisen Näherungen in den Aufgaben der Minimierung  $\min \omega_1$  der Frequenz der Torsionsschwingungen und der Maximierung der zweiten Frequenz  $\max \omega_2$  der Biegeschwingungen für eine Kragplatte mit den Abmessungen  $1 \times 1 \times 10^{-1}$  (m) bei einer Variation der Dicke in den Grenzen  $0,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \leq h_i \leq 10^{-2} \text{ m}$ . Aufgrund der Symmetrie ist nur die Hälfte der Verteilungen gezeigt. In den Elementen sind die Werte eingetragen, die bei der zweiten Iteration erhalten wurden. Mit Punktlinien sind die Gebiete der charakteristischen Dickenänderungen gekennzeichnet. Die angeführten Konfigurationen sichern entsprechend  $\omega_1^{\text{Torsion}} = 162$  und  $\omega_2^{\text{Biege}} = 364,2$  im Vergleich zu  $\omega_1^{\text{Torsion}} = 212$  und  $\omega_2^{\text{Biege}} = 330$  vor der Optimierung der Platte ( $h_i = 10^{-2} \text{ m}$ ). Auf Bild 5 ist die zweite Iteration der



**Bild 5**  
Minimierung der ersten Eigenfrequenz der Schaufelschwingungen

Methode der schrittweisen Näherungen in den Aufgaben  $\min \omega_1$ , des Minimums der ersten Eigenfrequenz der Schaufelschwingungen einer Radialturbine bei der Variation der Werte für die Dicke im Bereich  $10^{-3} \text{ m} \leq h_1 \leq 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  dargestellt.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Гринев В. Б., Филиппов А. П.: Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам, Киев, Наукова думка, 1975, 292 с.
- [ 2 ] Богомолов С. И., Симсон Э. А.: Оптимизация механических систем в резонансных режимах, Харьков, Вища школа, 1983, 153 с.
- [ 3 ] Пропой А. И.: Элементы теории оптимальных дискретных процессов, Москва, Наука, 1973, 256 с.
- [ 4 ] Болтянский В. Г.: Оптимальное управление дискретными системами, Москва, Наука, 1973, 446 с.
- [ 5 ] Лурье К. А., Федоров А. В., Черкаев А. В.: О существовании решений некоторых задач оптимального проектирования стержней и пластин, Препринт ФТИ им. А. Ф.: Иоффе АН СССР, Ленинград, 1980, № 668.
- [ 6 ] Лурье К. А., Черкаев А. В.: О корректности постановки и о регуляризации задач оптимального проектирования пластин, Добавление к книге Ольхора „Оптимальное проектирование конструкций, Москва, Мир, 1981, 277 с.
- [ 7 ] Хог Э., Арора Я.: Прикладное оптимальное проектирование — Механические системы и конструкции, Москва, Мир, 1983, 478 с.
- [ 8 ] Богомолов С. И., Симсон Э. А.: Оптимизация механических систем по динамическим и прочностным критериям с использованием дискретных моделей, В кн.: Динамика и прочность машин, Харьков, Вища школа, 1982, вып. 36, с. 30 — 46.
- [ 9 ] Федоренко Р. П.: Приближенное решение задач оптимального управления, Москва, Наука, 1978, 488 с.

#### Anschrift der Verfasser:

др. техн. наук, проф. В. Б. Гринев  
к. т. н. Э. А. Симон  
Харьковский политехнический институт им. Ленина  
каф. „Динамика и прочность машин”

**310 002 Харьков**  
ул. фрунзе 21

Prof. Dr. sc. techn. J. Altenbach  
Technische Hochschule „Otto von Guericke” Magdeburg  
Sektion Maschinenbau  
WB Festkörpermechanik  
3010 Magdeburg  
PSF 124