

Approximationspolynome der Methode der finiten Elemente des Lagrangeschen Variationsprinzips

Miroslav Horák

In den letzten Jahrzehnten entstanden eine ganze Reihe sogenannter neuer Variationsprinzipie, wie z. B. das von Hellinger-Reißner, von Washizu, von Hu Hai Chang usw. Im Vergleich zu den älteren Prinzipien von Lagrange-Dirichlet oder Castigliano-Menebra sind sie bedeutend allgemeiner, und man kann annehmen, daß ihre Entstehung durch die schnelle Entwicklung der Methode der finiten Elemente bedingt war.

Die Entstehung immer neuer Variationsprinzipie ist theoretisch sehr erfreulich. Es muß aber zugelassen werden, daß diese neuen Prinzipie im Vergleich zu dem klassischen Variationsprinzip nach Lagrange kaum eine Verringerung des numerischen Rechenaufwandes gebracht haben.

Die Benutzung dieser neuen Prinzipie kann man in einer ganzen Reihe von Fällen als einen Kompromiß zwischen der Notwendigkeit ein konkretes Problem zu lösen und der scheinbaren Unmöglichkeit eine, das Lagrangesche Variationsprinzip erfüllende Approximationsfunktion (shape function) der Lösung zu finden, auffassen. Dieser Kompromiß führt öfters zu neuen Theorien, welche zwar für viele Fälle numerisch erprobt, aber deren Exaktheit vom theoretischen Gesichtspunkt aus sehr problematisch sein kann.

Aus diesem Grund ist diese Abhandlung der Konstruktion von solchen Approximationsfunktionen gewidmet, bei welchen für Aufgaben aus der Mechanik das Prinzip von Lagrange angewendet werden kann.

Beim Lagrangeschen Prinzip wird wie bisher ein kinematisch zulässiges Feld von Verschiebungsfunktionen (und ein von ihm laut geometrischer Bedingungen resultierendes Feld von Deformationsfunktionen) variiert. Ein Feld von Funktionen wird dann als kinematisch zulässig aufgefaßt, wenn es im Inneren des behandelten Bereiches die Kompatibilitätsgleichung und auf den Grenzen die vorgeschriebenen Formänderungsrandbedingungen erfüllt. Wenn die physikalischen und geometrischen Bedingungen als erfüllt aufgefaßt werden können, muß man eine Lösung erhalten, welche die statischen Gleichgewichtsbedingungen im Inneren sowie auch am Rand des behandelten Bereiches erfüllt, da das Lagrangesche Prinzip diesen Bedingungen übergeordnet ist.

Es ist selbstverständlich, daß bei der Benutzung ungültiger physikalischer Bedingungen keine richtige Lösung des gegebenen Problems gefunden werden kann, sondern nur eines Problems, dem die physikalischen Bedingungen entsprechen. Dasselbe gilt auch für ungültige geometrische Bedingungen. Auf die Notwendigkeit und die Möglichkeit der Ableitung gültiger geometrischer Bedingungen aus der energetischen Bilanz mit Hilfe des Lagrangeschen Prinzips, wird schon in den Arbeiten [1] und [2] hingewiesen. Wie solche gültige geometrischen Bedingun-

gen abgeleitet werden, wird noch später gezeigt werden. Bis dahin sei als

Grundsatz Nr. 1 akzeptiert:

Wenn die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden sollen, so müssen gültige, d. h. nicht gegen die energetische Bilanz verstoßende, geometrische Bedingungen benutzt werden.

Die Approximationsfunktionen müssen weiter im Inneren der Elemente die Kompatibilitätsbedingungen der Verzerrung erfüllen, d. h. daß im allgemeinen Fall verlangt wird, daß im Inneren der Elemente nicht nur die Komponenten der Verschiebungsfunktionen stetig sein müssen, sondern auch ihre Ableitungen, welche in den geometrischen Bedingungen auftreten. Hingegen folgt, aus dem einfachsten Fall der Berührungspunkte zweier benachbarter eindimensionaler Elemente, die Unzweckmäßigkeit der Stetigkeit der Verzerrungen. Im Falle der Übereinstimmung (d. h. der Stetigkeit) der physikalischen Bedingungen beider Elemente, bedeutet eine Stetigkeit der Verzerrungen eine Übereinstimmung und im umgekehrten Fall eine Ungleichheit der inneren Kräfte. Wenn in diesem Grenzpunkt Einzellasten einwirken, so ist diese Übereinstimmung der inneren Kräfte genau so unwahr, wie unwahr die Differenz der inneren Kräfte bei einem nichtbelasteten Grenzpunkt bei nichtstetigen physikalischen Bedingungen ist. Deshalb wird als

Grundsatz Nr. 2 angenommen:

Die Approximationsfunktionen der Komponenten der Verschiebungen müssen an den Grenzen der Elemente die Stetigkeit der Funktionswerte erfüllen.

Da bewiesen werden kann, daß von den linearen Kombinationen der ersten Ableitung dieser Funktionen die inneren Kräfte abhängen, muß die Stetigkeit (auch der ersten Ableitungen und auch nur in einem Punkt) als unerwünscht aufgefaßt werden. Sie kann den Gleichgewichtsbedingungen widersprechen.

Die Verschiebungsfunktionen und ihre ersten Ableitungen kommen in den geometrischen Bedingungen und, mittels der physikalischen Bedingungen, auch in den inneren Kräften vor. Für diese müssen völlig konkrete und von der Wahl der Approximation unabhängige Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden. Deshalb folgt als

Grundsatz Nr. 3:

Bei der gleichzeitigen Benutzung mehrerer Funktionen von Verschiebungskomponenten können diese gegenseitig abhängig sein.

Sind durch geometrische Bedingungen oder statische Gleichgewichtsbedingungen (für Null-Lasten) irgendwelche Abhängigkeiten vorgeschrieben, so werden diese bei der Konstruktion von Approximationsfunktionen

berücksichtigt. Ein Verstoßen gegen diesen Grundsatz kann wieder das Nichterfüllen der geltenden Gleichgewichtsbedingungen bedeuten.

Eine wichtige Bedingung für die Richtigkeit der gewählten Approximation sind verschwindende Spannungen (verschwindende Innenkräfte) im Falle, daß bei nichtbelasteten Elementen solche lineare Parameterkombinationen entstehen, welche einer möglichen Verschiebung des Elementes als starres Gebilde entsprechen. Mit dem hängt auch die lineare Abhängigkeit der Zeilen und Spalten in der Steifigkeitsmatrix zusammen und damit auch ihrer Singularität mit einem Defekt, der allen möglichen Verschiebungen entspricht. Dieser Umstand müßte eigentlich durch das Einhalten des 3. Grundsatzes schon erfüllt sein. Dennoch muß als

Grundsatz Nr. 4 kontrolliert werden, ob es in der Ableitung der Approximationsfunktion nicht möglich ist, bei den einzelnen Potenzen der unabhängigen Veränderlichen solche lineare Kombinationen auszuklammern, welche im Falle einer Verschiebung des Elementes als starres Gebilde verschwinden.

In den weiteren Abschnitten dieser Abhandlung wird nacheinander von den einfachsten, d. h. von eindimensionalen Elementen, zu den schwierigsten Fällen vorgegangen. Dabei werden in den späteren Abschnitten sich wiederholende Vorgänge nicht immer von neuem kommentiert.

a) Eindimensionale Elemente

Als Anfang sei eine sehr einfache Aufgabe, und zwar die ebene Biegung eines Stabes, gewählt. Dabei genügt es, sich nur mit zwei Komponenten der Innenkräfte zu beschäftigen: dem Biegemoment M und der Schubkraft T . Die Vorzeichenvereinbarung (entsprechend der Vorzeichenvereinbarung der Verschiebungskomponenten φ und v) ist aus Bild 1 zu ersehen.

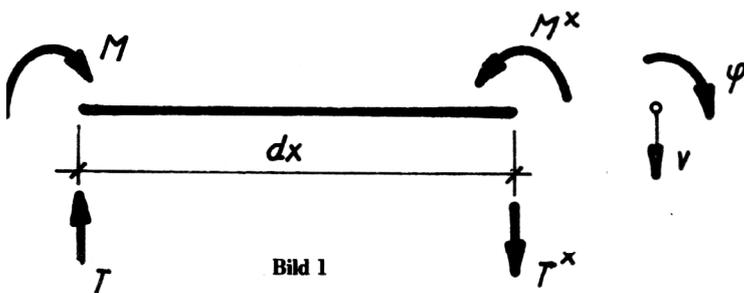


Bild 1

Für den abgebildeten Elementarteil des Stabes können zwei Gleichgewichtsbedingungen aufgeschrieben werden, aus welchen sich nach einfacher Umwandlung zwei simultane Differentialgleichungen ergeben.

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial M}{\partial x} + T + l &= 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial x} + p &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Wenn ρ und τ die Verzerrungen für die Biegung und den Schub bei der Biegung, L die Länge eines Stabelementes und Σ die Summe über alle benutzten Stäbe bedeuten, kann die Variation der gesamten Potentialenergie des untersuchten Systems in nachstehender Form aufgeschrieben werden:

$$\delta \pi = \Sigma \int_0^L (\delta \rho \cdot M + \delta \tau \cdot T - \delta \varphi \cdot l - \delta v \cdot p) dx$$

Wenn man bedenkt, daß mathematisch die negative Variation der mechanischen Arbeit aller äußeren und inneren Kräfte am Stabe $-\delta P$ der Variation der gesamten Potentialenergie $\delta \pi$ gleichgesetzt werden kann, so folgt:

$$-\delta P = \delta \pi
 \tag{2}$$

Um δP zu erhalten, werden die Gleichungen (1) mit den Variationen der entsprechenden Verschiebungen multipliziert. Nach ihrer Addition und der Integration über alle Stäbe des Systems, kann dieser Ausdruck in (2) eingesetzt werden, so daß sich ergibt:

$$\begin{aligned}
 \Sigma \int_0^L [-\delta \varphi (-\frac{\partial M}{\partial x} + T + l) - \delta v (\frac{\partial T}{\partial x} + p)] dx \\
 = \Sigma \int_0^L (\delta \rho \cdot M + \delta \tau \cdot T - \delta v \cdot p - \delta \varphi \cdot l) dx
 \end{aligned}$$

Nach teilweiser Integration einiger Produkte der linken Seite und weiteren Vereinfachungen wird:

$$\begin{aligned}
 \Sigma \int_0^L [-\delta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot M + \delta (\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi) \\
 \cdot T - \delta v \cdot p - \delta \varphi \cdot l] dx + \Sigma [\delta \varphi \cdot M - \delta v \cdot T]_0^L \\
 = \Sigma \int_0^L (\delta \rho \cdot M + \delta \tau \cdot T - \delta v \cdot p - \delta \varphi \cdot l) dx
 \end{aligned}$$

Damit die Gleichgewichtsbedingungen in den Berührungspunkten der Elemente erfüllt werden, muß das zweite Glied auf der linken Seite gleich Null sein. Nach Vergleichen der sich gegenseitig entsprechenden Glieder auf der linken und rechten Seite ergeben sich als gesuchte geometrische Bedingungen

$$\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}
 \tag{2a}$$

$$\tau = \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi
 \tag{2b}$$

Diese Bedingungen (besonders 2b) hängen nicht mit der Ableitung von Mindlin zusammen. Sie wurden ohne jegliche Hypothesen über das Verhalten der Querschnitte abgeleitet. Die Naviersche Hypothese wird für die gegebene Lösung bei den physikalischen Bedingungen benutzt. Das Trägheitsmoment erhält man nach der Voraussetzung einer linearen Verteilung der Spannungen. Bei einer anderen Verteilung (z. B. nach einer kubischen Parabel) bekäme man an Stelle des Trägheitsmomentes eine völlig andere Konstante. Hier werden die physikalischen Bedingungen wie folgt vorausgesetzt:

$$\begin{aligned}
 M &= EI \cdot \rho \\
 T &= GA \cdot \tau
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

In Fällen, in denen der Einfluß der Schubkräfte auf die Verformung des Stabes vernachlässigt werden soll, kann man physikalisch eine sehr hohe Steifigkeit GA voraussetzen. Mathematisch wird die Konvergenz vom Produkt GA ins Unendliche und des Wertes der Verzerrungen zu 0 vorausgesetzt. Das Produkt dieser beiden Größen ist dann unbestimmt und die Schubkraft kann Werte er-

langen, welche ihr nach den Gleichgewichtsbedingungen entsprechen. Nach Vernachlässigen des Einflusses der Schubkräfte wird also $\tau = 0$ und dadurch $\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi$ und

$$\rho = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \text{ was die üblichen unrichtig gebrauchten geometrischen Bedingungen sind, in Fällen, bei welchen der Schub nicht vernachlässigt werden soll.}$$

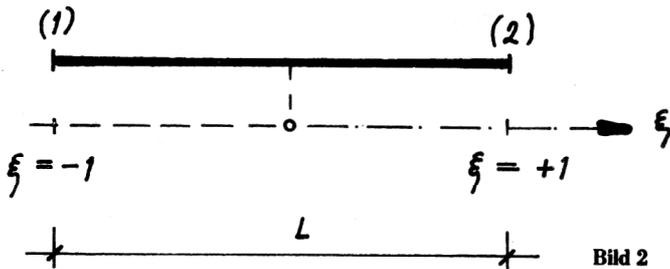
Aus den geometrischen Bedingungen (sowie auch aus den zwei statischen Gleichgewichtsbedingungen) folgt, daß in der Lösung zwei Verschiebungskomponenten vorkommen: die Verdrehung φ und die Verschiebung v . Wird bei der Voraussetzung einer verschwindenden Belastung mit Hilfe der geometrischen und physikalischen Bedingungen in die erste statische Gleichgewichtsbedingung eingesetzt, erhält man eine Beziehung zwischen beiden Funktionen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + GA \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varphi \right) = 0 \quad (4)$$

deren Nichterfüllung eine Bestreitung der Momentenbedingung des Gleichgewichtes bedeutet.

Für die Veränderliche ξ nach Bild 2 gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \Phi' \cdot \frac{2}{L}$$



Für einen Stab mit unveränderlichem Querschnitt ist dann möglich, die Gleichung (4) wie folgt aufzuschreiben

$$EI \frac{4}{L^2} \cdot \varphi'' - GA \varphi + GA \frac{2}{L} v' = 0 \quad (4a)$$

Im Sinne des Grundsatzes Nr. 2 sind als Parameter der Lösung nur $\varphi_{(k)}$ und $v_{(k)}$, d. h. die Werte der Verdrehung und der Verschiebung in den Knotenpunkten k , aufzufassen. Beide Funktionen der Verschiebungskomponenten setzen sich aus der so genannten Grundfunktion, welche die Randbedingungen erfüllt, und dem Korrektionssteil, welcher die Bedingung (4a) ohne irgendwie die Randbedingungen zu stören erfüllt, zusammen.

Für ein Element mit zwei Knotenpunkten (vgl. Bild 2) ist die Grundfunktion durch die Gleichung

$$\Phi_z = \Phi_{(1)} \frac{1}{2} (1 - \xi) + \Phi_{(2)} \frac{1}{2} (1 + \xi)$$

und der Korrektionssteil durch die Gleichung

$$\Phi_k = a_{\Phi} (1 - \xi^2) + b_{\Phi} \xi (1 - \xi^2) + c_{\Phi} \xi^2 (1 - \xi^2) + \dots$$

gegeben, wobei a_{Φ} , b_{Φ} , c_{Φ} noch unbestimmte Konstanten sind. Nach Einsetzen in die Gleichung (4a) ergibt sich

$$\begin{aligned} & -8 \frac{EI}{L^2} Q_{\varphi} - 24 \frac{EI}{L^2} \xi b_{\varphi} \\ & + 4 \frac{EI}{L^2} (2 - 12 \xi^2) c_{\varphi} - GA \frac{1}{2} [\varphi_{(1)} \\ & + \varphi_{(2)} + \xi (\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)})] \\ & - GA (1 - \xi^2) (a_{\varphi} + \xi b_{\varphi} + \xi^2 c_{\varphi}) \\ & + \frac{GA}{L} (v_{(2)} - v_{(1)}) + \frac{GA 2}{L} [-2 \xi a_v \\ & + (1 - 3 \xi^2) b_v + 2 \xi (1 - 2 \xi^2) c_v] = 0 \end{aligned}$$

und nach Vergleichen der Glieder mit gleichen Potenzen ξ wieder genau

$$b_{\varphi} = c_{\varphi} = c_v = 0$$

$$a_{\varphi} = \frac{G}{L} b_v$$

$$a_v = -\frac{L}{8} (\varphi_{(2)} - \varphi_{(1)})$$

$$b_v = \frac{1}{4(1+3\nu)} [v_{(2)} - v_{(1)} - \frac{L}{2} (\varphi_{(1)} + \varphi_{(2)})],$$

$$\text{wo } \nu = \frac{4EI}{GAL^2} \text{ ist.}$$

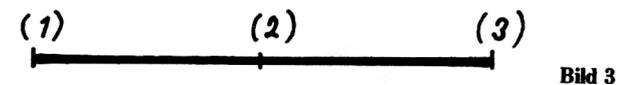
Die Verzerrungen ergeben sich dann in der Form:

$$\rho = \frac{1}{L} (\varphi_{(1)} - \varphi_{(2)}) + \frac{3\xi}{L^2 (1+3\nu)}$$

$$[v_{(2)} - v_{(1)} - \frac{L}{2} (\varphi_{(1)} + \varphi_{(2)})]$$

$$\tau = \frac{3\nu}{L(1+3\nu)} [v_{(2)} - v_{(1)} - \frac{L}{2} (\varphi_{(1)} + \varphi_{(2)})]$$

Ähnlich bei Elementen mit drei Knotenpunkten nach Bild 3



ergibt sich für

$$\Phi_z = \Phi_{(1)} \cdot \left(-\frac{1}{2}\xi\right) (1-\xi) + \Phi_{(2)} (1-\xi^2) + \Phi_{(3)} \cdot \frac{1}{2}\xi (1+\xi)$$

und für

$$\Phi_k = a_{\Phi} \xi (1-\xi^2) + b_{\Phi} \xi^2 (1-\xi^2) + c_{\Phi} \xi^3 (1-\xi^2) + \dots$$

nach Einsetzen in die Gleichung (4a) und nach einfachen Umformungen

$$c_{\varphi} = 0$$

$$b_{\varphi} = \frac{10}{L} c_v$$

$$a_{\varphi} = \frac{8}{L} b_v$$

$$c_v = \frac{-3L}{4(1+15\nu)} [\varphi_{(2)} - \frac{1}{L}(v_{(3)} - v_{(1)})]$$

$$+ (\frac{1}{6} - \nu) (\varphi_{(1)} - 2\varphi_{(2)} + \varphi_{(3)})]$$

$$b_v = \frac{L}{8(1+12\nu)} [\frac{4}{L}(v_{(1)} - 2v_{(2)} + v_{(3)}) + \varphi_{(1)} - \varphi_{(3)}]$$

$$a_v = \frac{L}{2(1+15\nu)} \left\{ (1+30\nu) [\varphi_{(2)} - \frac{1}{L}(v_{(3)} - v_{(1)})] + \nu (\frac{3}{2} - 30\nu) \cdot (\varphi_{(1)} - 2\varphi_{(2)} + \varphi_{(3)}) \right\}$$

In beiden oben angeführten Fällen wurden alle vier Grundsätze, die zum Ziel führen sollen, erfüllt. Es war möglich, auch genau die Gleichung (4a) zu erfüllen, und aus diesem Grund erhielt man eine Lösung, welche völlig identisch mit der genauen analytischen Lösung (ohne Benutzung der Methode der finiten Elemente) ist.

In Fällen, in denen es nicht möglich sein sollte, eine genaue Lösung der gesuchten Koeffizienten der Korrektionsfunktionen aus den Gleichungen (welche sich aus der zu lösenden Gleichung (4a) ergeben) zu finden, muß ähnlich vorgegangen werden. Allerdings im Sinne der Variationsmethoden so, daß die gesuchten Koeffizienten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet werden. Aber auch in diesem Fall ist es unbedingt notwendig, den vierten Grundsatz einzuhalten. Wenn man sich bei der Lösung eines anderen Problems (z. B. gleichzeitiger Drill und Biegung eines im Grundriß gebogenen Trägers) nicht um die Zusammenhänge der einzelnen Komponenten der Verschiebungsfunktionen kümmern wird, kann man auch nicht erwarten, daß man einen gültigen Zusammenhang zwischen den einzelnen Komponenten der Innenkräfte bekommen kann. Aus diesem Grunde ist es notwendig, die Möglichkeit, im Sinne der Literatur [3] und [6], ein so genanntes allgemeines einfaches Modell herzustellen, sehr skeptisch zu beurteilen.

b) Flächenelemente

Im weiteren wird ein allgemeines Schalenelement mit Einfluß von Scheibenkräften bei der Biegung behandelt. Aus den Ergebnissen eines solchen Elementes muß man nach Einsetzen einer nullwertigen Krümmung Ergebnisse für ebene Elemente, resp. für eine reine Biegung (Platteneffekt) oder Scheibenkräfte (Scheibeneffekt) erhalten.

Zuerst seien aber einige Gründe angeführt, für welche nicht die normal gebrauchten Approximationen für das Lagrangesche Prinzip akzeptiert werden sollen. Bei der Lösung von Faltwerken oder unglatten Schalen kann man nicht damit einverstanden sein, daß die Steifigkeit, die der Verdrehung um die Normale des Flächenelementes entspricht, als fiktiv aufgefaßt wird. Vom physikalischen Standpunkt her ist es nämlich klar, daß diese Steifigkeit relativ sehr groß sein kann. Es sei nun ein Weg gesucht, wie diese Verdrehung in die Approximation der Lösung eingeführt werden kann. Für den Scheibeneffekt müssen Approximationen, welche die ersten Ableitungen der Verschiebungsfunktionen gebrauchen, und für den Platteneffekt Approximationen, welche die zweiten Ableitungen der Durchbiegungsfunktion gebrauchen, abgewiesen werden. Sie widersprechen dem Grundsatz Nr. 2. Bei stetigen physikalischen Bedingungen ergeben sich nämlich numerisch an den Grenzen der Elemente stetige Innenkräfte (-momente) auch in den Fällen, in welchen z. B. aus Gründen einer schlechten Elementenaufteilung die Ergebnisse mit großen Fehlern behaftet sind. Dem Anwender eines solchen Rechenprogrammes ist dann die Möglichkeit genommen, die Größe solcher Fehler festzustellen.

Der Gebrauch von nichtkompatiblen Elementen, welche an der ganzen Grenze keine Stetigkeit der Funktionswerte aufweisen, kann keine Konvergenz zu den richtigen Lösungswerten garantieren. Physikalisch entspricht so

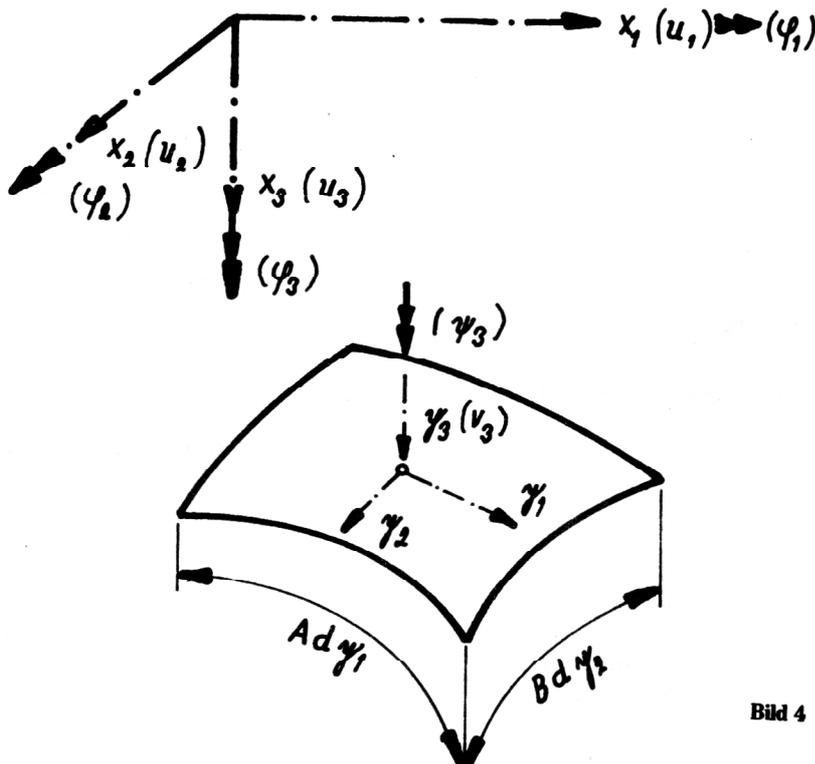


Bild 4

ein Modell bedeutend kleineren Steifigkeiten, als sie bei der Berechnung gebraucht werden.

Lösungen, bei welchen die so genannten Loof-schen Punkte gebraucht werden (vgl. z. B. [8]), erfüllen gleichfalls nicht exakt die Stetigkeitsbedingungen, und können auch wegen der großen Bandbreiten der so entstehenden Gleichungssysteme nicht als optimal betrachtet werden.

Lösungen, welche nach der Literatur [9] abgeleitet werden, sind zwar relativ theoretisch genügend wahrheitsgetreu, aber die Bestrebungen nach einer effektiven Berechnung führen bei manchen Parametern zu solchen Voreliminationen, daß die Stetigkeit der Funktionswerte der Verschiebung an den Grenzen benachbarter Elemente verletzt wird. Weiter verlangen diese Lösungen die Benutzung isoparametrischer Elemente. Die gebrauchte numerische Integration in vier Punkten kann aber nicht genügend verlässlich sein, da die dementsprechende Integration in acht Punkten eines räumlichen isoparametrischen Elementes vollkommen unbrauchbar ist. Die im weiteren angeführte Lösungsmethode soll alle oben erwähnten Nachteile beseitigen.

Das Differentialelement der behandelten Schale ist in Bild 4 zu ersehen. Die Geometrie des Elementes sei mit Hilfe eines globalen cartesischen rechtsdrehigen Koordinatensystems mit den Achsen x_i gegeben. Auf dieses System beziehen sich auch die globalen Komponenten der Deformationsfunktionen (Verschiebungen u_i , Verdrehungen φ_i). Kartesisch und rechtsorientiert sei auch das begleitende lokale System mit den Achsen y_i . Die Achse y_3 sei identisch mit der Flächennormale, die Achsen y_1 und y_2 liegen in der Tangentialebene des untersuchten Punktes der Schale (Fläche). Zum lokalen System seien weiteres die Komponenten der inneren Kräfte und Momente, sowie auch die lokalen Komponenten der Verschiebungsfunktionen (die Verschiebung v_i und die Verdrehung ψ_i) definiert. Die Definition und Vorzeichenvereinbarung ist für die verteilten Innenkräfte aus Bild 5 und für die verteilten Momente aus Bild 6 zu ersehen.

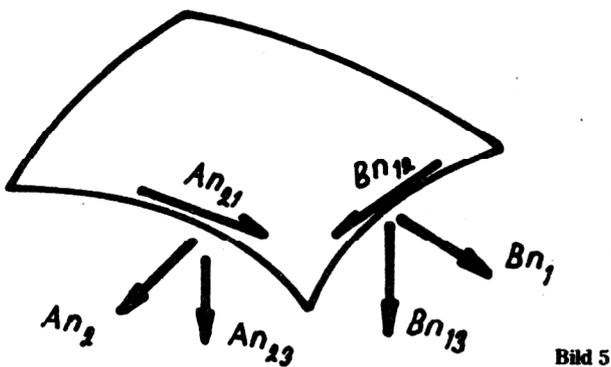


Bild 5

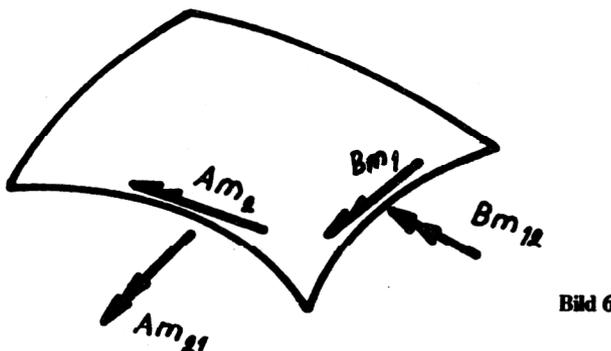


Bild 6

Nach Aufstellung und Abänderung der differentialen Gleichgewichtsbedingungen gilt:

$$\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(Bn_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(\Lambda n_{21})}{\partial y_2} - \frac{\partial B}{\partial y_1} n_2 + \frac{\partial A}{\partial y_2} n_{12} \right) + AB \left(\frac{1}{R_1} n_{13} + p_1 \right) = 0$$

$$\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(\Lambda n_2)}{\partial y_2} + \frac{\partial(Bn_{12})}{\partial y_1} - \frac{\partial A}{\partial y_2} n_1 + \frac{\partial B}{\partial y_1} n_{21} \right) + AB \left(\frac{1}{R_2} n_{23} + p_2 \right) = 0$$

$$\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(Bn_{13})}{\partial y_1} + \frac{\partial(\Lambda n_{23})}{\partial y_2} \right) + AB \left(-\frac{1}{R_1} n_1 - \frac{1}{R_2} n_2 + p_3 \right) = 0$$

$$\frac{1}{AB} \left(-\frac{\partial(\Lambda m_2)}{\partial y_2} - \frac{\partial(Bm_{12})}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial A}{\partial y_2} m_1 - \frac{\partial B}{\partial y_1} m_{21} + AB(n_{23} + l_1) = 0$$

$$\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(Bm_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(\Lambda m_{21})}{\partial y_2} - \frac{\partial B}{\partial y_1} m_2 + \frac{\partial A}{\partial y_2} m_2 + \frac{\partial A}{\partial y_2} m_{12} + AB(-n_{13} + l_2) \right) = 0$$

$$n_{12} - n_{21} + \frac{m_{21}}{R_1} + l_3 = 0$$

In diesen Gleichungen sind l_i die Komponenten der kontinuierlichen Momentenbelastung und p_i die Komponenten der kontinuierlichen Kraftbelastung, definiert zu den Achsen y_i .

Nach Einführen der Gruppenunbekannten

$$n_k = \frac{1}{2} (n_{12} + n_{21}), \quad k_n = \frac{1}{2} (n_{12} - n_{21}),$$

$$m_k = \frac{1}{2} (m_{12} + m_{21}), \quad k_m = \frac{1}{2} (m_{12} - m_{21})$$

und

$$n_{12} = n_k + k_n, \quad n_{21} = n_k - k_n,$$

$$m_{12} = m_k + k_m, \quad m_{21} = m_k - k_m$$

wird der Vektor der verteilten Innenkräfte

$$\{n\}^T = \{n_1, n_2, n_k, k_n, m_1, m_2, m_k, k_m, n_{13}, n_{23}\}$$

und der dementsprechende Vektor der verteilten Formänderungen der Lösung

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma, \Delta_\epsilon, \rho_1, \rho_2, \rho_k, \Delta_\rho, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}\}.$$

Wird in (2) eingesetzt, ergibt sich

$$\iint \frac{1}{AB} \left\{ -\delta v_1 \left(\frac{\partial(Bn_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(\Lambda n_k - \Lambda k_n)}{\partial y_2} - \frac{\partial B}{\partial y_1} n_2 + \frac{\partial A}{\partial y_2} (n_k + k_n) + \frac{AB}{R_1} n_{13} + AB p_1 \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\delta v_2 \left(\frac{\partial(A n_2)}{\partial y_2} + \frac{\partial(B n_k + B k_n)}{\partial y_1} - \frac{\partial A}{\partial y_2} n_1 \right. \\
& + \frac{\partial B}{\partial y_1} (n_k - k_n) + \frac{AB}{R_2} n_{23} + AB p_2 \left. \right) \\
& -\delta v_3 \left(\frac{\partial(B n_{13})}{\partial y_1} + \frac{\partial(A n_{23})}{\partial y_2} - \frac{AB}{R_1} n_1 - \frac{AB}{R_2} n_2 + p_3 \right) \\
& -\delta \psi_1 \left(-\frac{\partial(A m_2)}{\partial y_2} - \frac{\partial(B m_k + B k_m)}{\partial y_1} + \frac{\partial A}{\partial y_2} m_1 \right. \\
& - \frac{\partial B}{\partial y_1} (m_k - k_m) + AB n_{23} \\
& + AB l_1 \left. \right) - \delta \psi_2 \left(\frac{\partial(B m_1)}{\partial y_1} + \frac{\partial(A m_k - A k_m)}{\partial y_2} \right. \\
& - \frac{\partial B}{\partial y_1} m_2 + \frac{\partial A}{\partial y_2} (m_k + k_m) \\
& - AB n_{13} - AB l_2 \left. \right) - \delta \psi_3 (2 n_k \\
& + \frac{1}{R_1} (m_k + k_m) - \frac{1}{R_2} (m_k - k_m) + l_3) \cdot AB \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\Omega &= \iint \left\{ \delta \{ \epsilon \}^T \cdot \{ n \} - \delta \{ \psi \}^T \cdot \{ l \} \right. \\
& \left. - \delta \{ v \}^T \cdot \{ p \} \right\} d\Omega.
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise, wie im Teil a) des Beitrags, können nun die geometrischen Bedingungen abgeleitet werden:

$$\left. \begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{\partial v_1}{A \partial y_1} + \frac{\partial A}{AB \partial y_2} v_2 + \frac{1}{R_1} v_3 \\
\epsilon_2 &= \frac{\partial B}{AB \partial y_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{B \partial y_2} + \frac{1}{R_2} v_3 \\
\gamma &= \frac{\partial v_2}{A \partial y_1} + \frac{\partial v_1}{B \partial y_2} - \frac{\partial A v_1}{AB \partial y_2} - \frac{\partial B v_2}{AB \partial y_1}
\end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \epsilon &= -2 \psi_3 + \frac{\partial v_2}{A \partial y_1} - \frac{\partial v_1}{B \partial y_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y_2} v_1 \\
& + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial y_1} v_2
\end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{\partial \psi_2}{A \partial y_1} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y_2} \psi_1 \\
\rho_2 &= -\frac{\partial \psi_1}{B \partial y_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial y_1} \psi_2 \\
\rho_k &= -\frac{\partial \psi_1}{A \partial y_1} + \frac{\partial \psi_2}{B \partial y_2} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial y_1} \psi_1 \\
& - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y_2} \psi_2 - \frac{1}{R_1} \psi_3 + \frac{1}{R_2} \psi_3
\end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned}
\Delta \rho &= -\frac{\partial \psi_1}{A \partial y_1} - \frac{\partial \psi_2}{B \partial y_2} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial y_1} \psi_1 \\
& - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y_2} \psi_2 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \psi_3
\end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned}
\epsilon_{13} &= \frac{\partial v_3}{A \partial y_1} + \psi_2 - \frac{1}{R_1} v_1 \\
\epsilon_{23} &= \frac{\partial v_3}{B \partial y_2} - \psi_1 - \frac{1}{R_2} v_2
\end{aligned} \right\} (9)$$

Zwischen dem lokalen System und dem globalen System sowie auch zwischen den einzelnen Komponenten der Verschiebungen gelten folgende Transformationsgleichungen:

$$y = [T] \cdot x - y_0 \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned}
v &= [T] \cdot u \\
\psi &= [T] \cdot \varphi
\end{aligned} \right\} (11)$$

in welchen alle benutzten Vektoren je drei Komponenten haben (mit den Indices 1, 2, 3). Für eine konkrete Lösung seien nun die Beziehungen in ein Koordinatensystem mit den Achsen ξ und η transformiert, in welchem (vgl. Bild 7) das behandelte Element ein Quadrat ist.

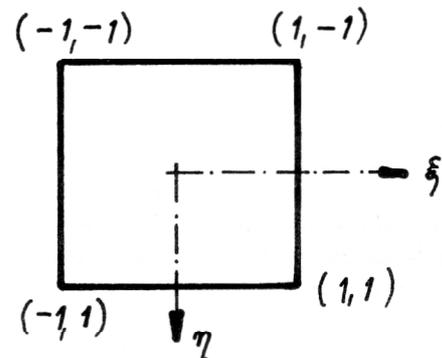


Bild 7

Gebraucht man nun als Bezeichnung der Ableitungen und für den Vektor der Richtungsparameter

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \Phi', \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \Phi''$$

$$\{g\}^T = \{x_2' x_3' - x_2 x_3', x_3' x_1' - x_3 x_1', x_1' x_2' - x_1 x_2'\}$$

so ist der Jacobian der Transformation $J = \sqrt{\{g\}^T \cdot \{g\}}$ und der Zeilenvektor

$$\{t_{3i}\}^T = \frac{1}{I} \{g\}^T$$

bildet die dritte Zeile der orthogonalen Transformationsmatrix (T).

Für eine so definierte Geometrie ist es möglich zu schreiben:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \\ \frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \Phi' \\ \Phi'' \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{I} \left[\begin{array}{c} \{t_{2i}\}^T \\ -\{t_{1i}\}^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \{x\} \\ -\{x'\} \end{array} \right] \quad (12.a)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial y_2} \end{cases} = - \begin{cases} \{t_{3i}\}^T \\ \{t_{2i}\}^T \end{cases} \left(\{t_{1i}\} \cdot a + \{t_{1i}\} \cdot b \right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial y_1} \end{cases} = - \begin{cases} \{t_{3i}\}^T \\ \{t_{1i}\}^T \end{cases} \left(\{t_{2i}\} \cdot c + \{t_{2i}\} \cdot d \right)$$

Werden weitere bekannte Beziehungen aus der Differentialgeometrie gebraucht, so ist es möglich, die Verzerrungen direkt mit Hilfe der globalen Komponenten der Verschiebungsfunktionen aufzuschreiben.

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \{t_{1i}\}^T (a \{u'\} + b \{u\}) \\ \epsilon_2 &= \{t_{2i}\}^T (c \{u'\} + d \{u\}) \\ \gamma &= \{t_{2i}\}^T (a \{u'\} + b \{u\}) \\ &\quad + \{t_{1i}\}^T (c \{u'\} + d \{u\}) \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \{t_{2i}\}^T (a \{\varphi'\} + b \{\varphi\}) \\ \rho_2 &= -\{t_{1i}\}^T (c \{\varphi'\} + d \{\varphi\}) \\ \rho_k &= -\{t_{1i}\}^T (a \{\varphi'\} + b \{\varphi\}) \\ &\quad + \{t_{2i}\}^T (c \{\varphi'\} + d \{\varphi\}) \end{aligned} \quad (7a)$$

Mit Hilfe der Beziehungen aus der Differentialgeometrie wird die Bedingung $\Delta\rho = 0$ identisch erfüllt. Es bleibt lediglich nur noch die Bedingung $\Delta\epsilon = 0$ zu erfüllen. Wenn weiter die Energie der Querkräfte vernachlässigt werden soll, so gelten die Beziehungen $\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = D$. Damit sind die Komponenten der Verschiebungsfunktionen durch drei Bedingungen gebunden. In Matrixform aufgeschrieben gilt die Gleichung:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \{\psi\} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{AB\partial y_2} & \frac{-\partial B}{AB\partial y_1} & 0 \end{bmatrix} \{v\}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial v}{A \partial y_1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial v}{B \partial y_2} = \{0\}$$

Wenn aus den Transformationsgleichungen für die globalen Deformationen eingesetzt wird, ergibt sich nach einer Multiplikation von links mit der Transformationsmatrix $[T]^T$

$$([1] + \{t_{3i}\} \cdot \{t_{3i}\}^T) \{ \varphi \}$$

$$+ [T]^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} [T] \frac{\partial \{u\}}{A \partial y_1}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} [T] \frac{\partial \{u\}}{B \partial y_2}$$

$$+ [T]^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{AB\partial y_2} & \frac{-\partial B}{AB\partial y_1} & 0 \end{bmatrix} [T]$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial [T]}{A \partial y_1}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial [T]}{B \partial y_2} \cdot \{u\} = \{0\}.$$

Nach einfachen Abänderungen kann bewiesen werden, daß der Inhalt der letzten Klammern verschwindet. Mit Hilfe der Transformationsgleichung (12) erhält man als Ergebnis die Gleichung

$$([1] + \{t_{3i}\} \cdot \{t_{3i}\}^T) \cdot \{ \varphi \}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & , & at_{13} + ct_{23}, & -at_{12} - ct_{22} \\ -at_{13} - ct_{23}, & 0 & , & at_{11} + ct_{21} \\ at_{12} + ct_{22}, & -at_{11} - ct_{21}, & & 0 \end{bmatrix} \{ u' \}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & , & bt_{13} + dt_{23}, & -bt_{12} - dt_{22} \\ -bt_{13} - dt_{23}, & 0 & , & bt_{11} + dt_{21} \\ bt_{12} + dt_{22}, & -bt_{11} - dt_{21}, & & 0 \end{bmatrix} \{ u' \} = \{0\}$$

$$(13)$$

Im globalen System seien nun die Matrizen definiert

$$[x'] = \begin{bmatrix} 0 & -x'_3 & x'_2 \\ x'_3 & 0 & -x'_1 \\ -x'_2 & x'_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [x] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\Delta x] = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta x_3 & \Delta x_2 \\ \Delta x_3 & 0 & -\Delta x_1 \\ -\Delta x_2 & \Delta x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\Sigma x] = \begin{bmatrix} 0 & -\Sigma x_3 & \Sigma x_2 \\ \Sigma x_3 & 0 & -\Sigma x_1 \\ -\Sigma x_2 & \Sigma x_1 & 0 \end{bmatrix},$$

wobei die Bedeutung der Koeffizienten Δx_i und Σx_i aus dem Weiteren zu ersehen ist. Nach einer Multiplikation der Beziehung (13) von links mit dem Ausdruck $b \{t_{1i}\}^T + d \{t_{2i}\}^T$ und dann mit dem Ausdruck $a \{t_{1i}\}^T + c \{t_{2i}\}^T$ folgt

$$\{t_{3i}\}^T ([x'] \{ \varphi \} + \{ u' \}) = 0 \quad (14a)$$

$$\{t_{3i}\}^T ([x] \{ \varphi \} + \{ u \}) = 0 \quad (14b)$$

Diese Gleichungen werden nur dann erfüllt, wenn die Vektoren, welche dem Inhalt der runden Klammern entsprechen, Nullvektoren sind.

Die Gleichung (13) kann mit Hilfe von (12 a) und (12) noch abgeändert werden auf

$$\begin{aligned}
 & (2J^2 [1] - \{x'\}^T \cdot \{x'\} \{x'\} \{x'\}^T \\
 & + \{x'\}^T \{x'\} (\{x'\} \cdot \{x'\}^T \\
 & + \{x'\} \cdot \{x'\}^T) - \{x'\}^T \cdot \{x'\} \cdot \{x'\} \{x'\}^T) \{\varphi\} \\
 & + (\{x'\}^T \{x'\} \cdot [x'] - \{x'\}^T \cdot \{x'\} [x'] \cdot \{u'\} \\
 & + (\{x'\}^T \cdot \{x'\} [x'] - \{x'\}^T \cdot \{x'\} [x']) \cdot \{u'\} = \{0\}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Dieser scheinbar sehr komplizierte Ausdruck hat für ein ebenes Flächenelement (z. B. $x_3 = x_3' = 0$) eine sehr einfache Form

$$\begin{aligned}
 I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \{\varphi\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_1' \\ 0 & 0 & x_2' \\ -x_1' - x_2' & 0 & 0 \end{bmatrix} \{u'\} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_1' \\ 0 & 0 & -x_2' \\ x_1' & x_2' & 0 \end{bmatrix} \cdot \{u'\} = \{0\}
 \end{aligned}$$

Nun, wo alle notwendigen Grundlagen abgeleitet worden sind, kann die Konstruktion der Approximationsfunktionen durchgeführt werden. Parameter der Lösung seien ausschließlich Funktionswerte der Verschiebungsfunktionen in den Knotenpunkten k , d. h. die Verschiebungen $u_{i(k)}$ und Verdrehungen $\varphi_{i(k)}$ bezogen auf die globalen Achsen x_i .

Jede Approximation der sechs gebrauchten Funktionen für die Komponenten der Verschiebung setzt sich aus der Grundfunktion und dem Korrekturteil zusammen. Die Grundfunktion ist ein gewöhnlich gebrauchtes einfachstes Polynom, welches sich nur auf die Funktionswerte der approximierten Funktion in den Knotenpunkten stützt. Diese Polynome müssen die Stetigkeitsbedingung der Funktionswerte auf den Kanten erfüllen. Korrekturfunktionen existieren getrennt für die Kanten und für die Innenteile der Elemente. Mit ihrer Hilfe soll ein bestmögliches Übereinstimmen der Zusatzbedingungen (15), welche die gegenseitige Abhängigkeit der gebrauchten Funktionen für die Verschiebungskomponenten ausdrücken, erreicht werden.

Die Kantenkorrekturfunktionen haben verschwindende Funktionswerte immer nur auf einer der Kanten. Für jede Kante werden gewöhnlich immer zwei gewählt, eine mit einem ungeraden und eine mit einem geraden Verlauf an der Grenze. Diese Funktionen werden mit Koeffizienten multipliziert, welche solche lineare Kombinationen der Parameter sind, die einer Möglichkeit der Verschiebung des Elementes ohne Entstehung von Spannungen entsprechen. Nebenbei enthalten diese Koeffizienten nur Parameter und Koordinaten der Knotenpunkte dieser einzigen Kante, womit die Stetigkeit der Funktionswerte an den Kanten garantiert wird.

Die Koeffizienten der Kantenkorrekturfunktionen für die Verschiebung werden an der Kante $\eta = \pm 1$ aus der

Gleichung (14a) und an der Kante $\xi = \pm 1$ aus der Gleichung (14b) bestimmt. Bei den Kantenkorrekturfunktionen für die Verdrehung wird vorausgesetzt, daß ihre Gesamtkomponente senkrecht zur dementsprechenden Kante steht. Ohne dieser Voraussetzung sind die Gleichungssysteme (14) zur Berechnung der Multiplikationskoeffizienten linear abhängig.

Werden die Grundfunktionen mit dem Index z und die Kantenkorrekturfunktionen mit dem Index h bezeichnet, gilt für die Berechnung der Koeffizienten der Kantenkorrekturfunktion für die Verdrehung, z. B. für $\eta = \pm 1$

$$\begin{bmatrix} [x'] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\varphi_z\} + \begin{bmatrix} [x'] \\ x' & T \end{bmatrix} \{\varphi_h\} = \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ 0 \end{Bmatrix}$$

wo die vierte Gleichung die verschwindende Komponente der Kantenkorrekturfunktion für die Verdrehung in Richtung der Tangente zur Kante bedeutet.

Wird diese Gleichung von links mit der transponierten Matrix von $\{\varphi_h\}$ multipliziert, ergibt sich für die Berechnung der Koeffizienten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \{x'\}^T \cdot \{x'\} \cdot \{\varphi_h\} &= (\{x'\} \cdot \{x'\}^T - \{x'\}^T \{x'\}) \cdot [1] \\
 \{\varphi_z\} + [x'] \cdot \{u'\} &
 \end{aligned} \tag{16a}$$

oder

$$\begin{aligned}
 \{x'\}^T \cdot \{x'\} \cdot \{\varphi_h\} &= (\{x'\} \{x'\}^T - \{x'\}^T \cdot \{x'\}) [1] \\
 \{\varphi_z\} + [x'] \cdot \{u'\} &
 \end{aligned} \tag{16b}$$

Sollte es nicht möglich sein, die Koeffizienten der Korrekturfunktionen genau zu berechnen, werden sie aus den dementsprechenden Gleichungen mit Hilfe des Minimums der quadratischen Abweichung berechnet.

Zum Beispiel haben die Kantenkorrekturfunktionen für ein Vierknotenelement nach Bild 8 für die Kante $\bar{12}$ die Form

$$\frac{1}{2} (1 - \eta) (1 - \xi^2) (a_j + b_j \xi).$$

Wird für die geometrischen Verhältnisse die Gültigkeit des Ausdrucks

$$x_i' = \frac{1}{2} (x_{i(2)} - x_{i(1)}) = \frac{1}{2} \Delta x_i,$$

vorausgesetzt, ergeben sich, nach Gebrauch der Beziehung (14a) für die Knotenpunkte 1 und 2, aus den entstandenen zwei Gleichungssystemen die Vektoren der Koeffizienten der Kantenkorrekturfunktionen für die Verschiebung in der Form

$$\begin{aligned}
 \{a_{12u}\} &= \frac{1}{8} [\Delta x] \cdot (\{\varphi_{(2)}\} - \{\varphi_{(1)}\}) \\
 \{b_{12u}\} &= \frac{1}{8} [\Delta x] \cdot (\{\varphi_{(1)}\} + \{\varphi_{(2)}\}) \\
 &+ \frac{1}{4} (\{u_{(2)}\} - \{u_{(1)}\})
 \end{aligned}$$

Wenn l_{12} die Länge der Verbindungslinie zwischen den Knotenpunkten 1 und 2 ist, hat die Kantenkorrekturfunktion für die Verdrehung die Form

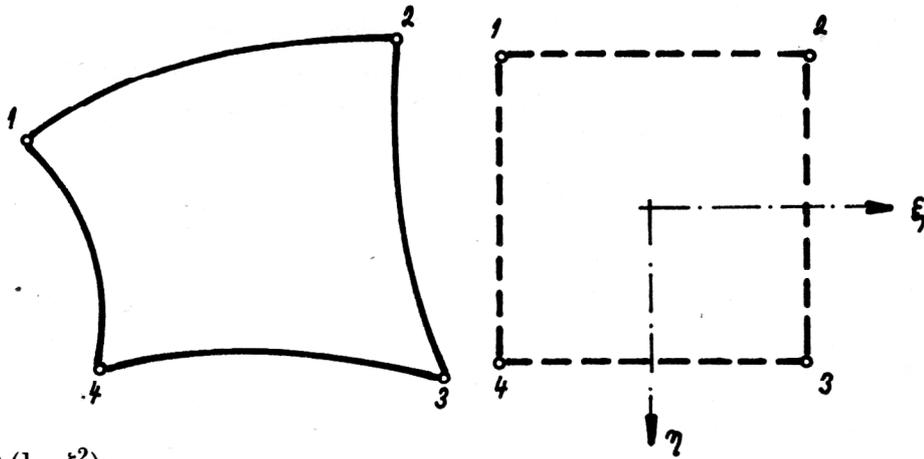


Bild 8

$$a_j \cdot \frac{1}{2} (1 - \eta) (1 - \xi^2)$$

und für die Koeffizienten dieser Funktion kann der Ausdruck

$$\begin{aligned} \{ a_{12} \varphi \} &= \frac{3}{2 l_{12}^2} [\Delta x] (\{ u_2 \} - \{ u_1 \}) \\ &+ \frac{3}{4 l_{12}^2} (\{ \Delta x \} \{ \Delta x \}^T - [1] l_{12}^2) (\{ \varphi_1 \} + \{ \varphi_2 \}) \end{aligned}$$

abgeleitet werden.

Für ein isoparametrisches Achtknotenelement nach Bild 9

gilt z. B. für die Kante $\bar{13}$

$$\begin{aligned} x_i' &= \frac{1}{2} (x_{i(3)} - x_{i(1)}) + \\ &+ \xi (x_{i(1)} - 2x_{i(2)} + x_{i(3)}) = \frac{1}{2} \Delta x_i + \xi \Sigma x_i \end{aligned}$$

und die zugehörigen Kantenkorrektionsfunktionen dieser Kante haben die Form

$$\frac{1}{2} (1 - \eta) (1 - \xi^2) (a_j \xi + b_j \xi^2 + c_j \xi^3)$$

Nach Gebrauch der Beziehung (14a) für die Knotenpunkte 1, 2, 3 ergeben sich aus den entstandenen drei Gleichungssystemen die Vektoren der Kantenkorrektionsfunktionen für die Verschiebung in der Form

$$\{ a_{13} u \} = -\frac{1}{2} (\{ u_3 \} - \{ u_1 \} + [\Delta x] \{ \varphi_2 \})$$

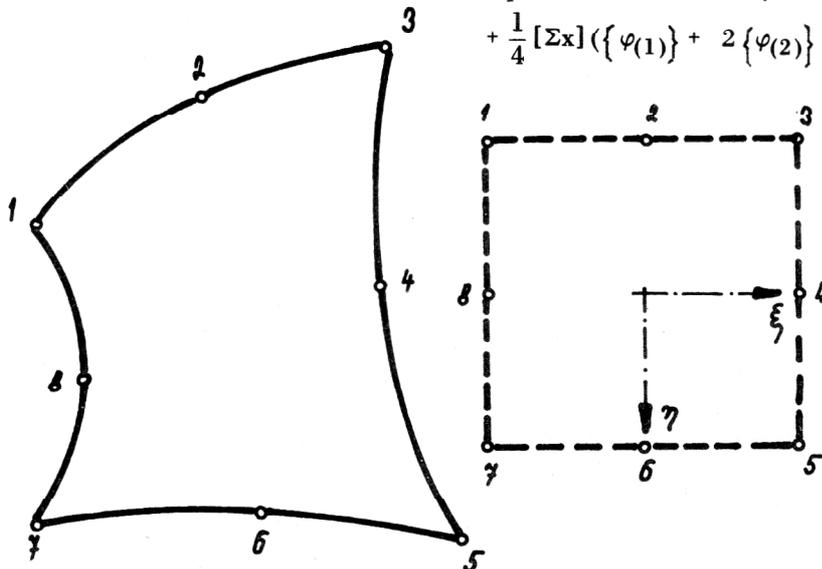


Bild 9

$$\begin{aligned} \{ b_{13} u \} &= \frac{1}{2} (\{ u_1 \} - 2\{ u_2 \} + \{ u_3 \}) \\ &+ \frac{1}{8} [\Delta x] \cdot (\{ \varphi_3 \} - \{ \varphi_1 \}) \\ &+ \frac{1}{4} [\Sigma x] \cdot (\{ \varphi_1 \} + \{ \varphi_3 \}) \\ \{ c_{13} u \} &= \frac{3}{4} (\{ u_3 \} - \{ u_1 \}) \\ &+ \frac{1}{8} [\Delta x] (\{ \varphi_1 \} + 4\{ \varphi_2 \} \\ &+ \{ \varphi_3 \}) + \frac{1}{4} [\Sigma x] \cdot (\{ \varphi_3 \} - \{ \varphi_1 \}) . \end{aligned}$$

Soll im Programm nur eine ungerade und eine gerade Funktion benutzt werden, kann

$$a\xi(1 - \xi^2) + c\xi^3(1 - \xi^2) \doteq \tilde{a}\xi(1 - \xi^2)$$

geschrieben werden und aus dem Minimum der quadratischen Abweichung ergibt sich

$$\tilde{a} = a + \frac{1}{3} c .$$

Die Ableitung der Koeffizienten $a_{13} \varphi$ und $b_{13} \varphi$ aus den Gleichungen (16) ist für diesen Fall etwas schwieriger und es muß die Methode des Minimums der quadratischen Abweichung gebraucht werden. Die Ergebnisse sind komplizierter und es kommen in ihnen zwei lineare Kombinationen der Parameter vor:

$$\begin{aligned} &(\frac{1}{4} [\Delta x] (\{ \varphi_3 \} - \{ \varphi_1 \}) + \{ u_1 \} - 2\{ u_2 \} + \{ u_3 \}) \\ &+ \frac{1}{4} [\Sigma x] (\{ \varphi_1 \} + 2\{ \varphi_2 \} + \{ \varphi_3 \}) , \end{aligned}$$

$$\left\{ \{u_3\} - \{u_1\} \right\} + \frac{1}{6} [\Delta x]$$

$$\left(\{ \varphi_1 \} + 4 \{ \varphi_2 \} + \{ \varphi_3 \} \right) + \frac{1}{3} [\Sigma x] \left(\{ \varphi_3 \} - \{ \varphi_1 \} \right)$$

Diese Kombinationen entsprechen wieder der Möglichkeit der Verschiebung des Elementes als starres Gebilde ohne Entstehung jeglicher Spannungen.

Hiermit wurde die Konstruktion der Kantenkorrektionsfunktionen erklärt. Aus dem vorgeführten Verfahren ist leicht zu ersehen, daß man auf gleiche Weise auch Korrektionsfunktionen für Elemente mit einer größeren Anzahl von Knotenpunkten an den Kanten oder für dreieckige Elemente erhalten kann.

Die Innenkorrektionsfunktionen dürfen nicht die Stetigkeit der Funktionswerte an den Grenzen der Elemente beeinflussen. Sie werden für die Funktionen der Komponenten der Verdrehung und der Verschiebung eine verschiedene Form und Bedeutung haben.

Als erstes werden die Innenkorrektionsfunktionen der Verschiebung konstruiert. Sie müssen auf dem ganzen Rand des Elementes einen verschwindenden Funktionswert haben und auch die ersten Ableitungen, mit Ausnahme der einzigen Kante, auf welcher die Ableitung in senkrechter Richtung einen ungeraden und geraden Verlauf haben soll, müssen gleich Null sein. Die Koeffizienten dieser Funktionen werden immer so bestimmt (gewöhnlich aus dem Minimum der quadratischen Abweichung), daß sie auf dieser Kante die Grundbedingungen der Zusammenhänge der Funktionen, d. h. die Beziehungen (15), so gut wie möglich erfüllen.

Die Innenkorrektionsfunktionen der Verschiebungen, z. B. für die Kante $\eta = -1$ eines Vierecks, sind wieder

$$\frac{1}{4} (1 - \eta) (1 - \eta^2) (1 - \xi^2) (k_{12} u_i + m_{12} u_i \xi)$$

Nach der Bestimmung der Koeffizienten k_{12} und m_{12} für alle Kanten werden die Innenkorrektionsfunktionen für die Verdrehung bestimmt. Für sie wird wieder auf dem ganzen Rand des Elementes ein Verschwinden des Funktionswertes verlangt. Vom Gesichtspunkt beider Veränderlichen werden sie als ungerade und gerade Funktionen gewählt und ihre Koeffizienten werden so bestimmt, daß sie im Inneren des ganzen Elementes so gut wie möglich die Beziehung (15) erfüllen.

Zum Beispiel für ein viereckiges Element können die Funktionen diese Form haben:

$$(1 - \xi^2) (1 - \eta^2) (k_{\varphi_i} + m_{\varphi_i} \xi + n_{\varphi_i} \eta + p_{\varphi_i} \xi \eta).$$

Auf diese Weise sind nun alle Korrekturen bestimmt und die Approximationsfunktionen wie für die Verschiebung, so auch für die Verdrehung sind komplett, und sie erfüllen auch alle am Anfang dieses Beitrages angeführten vier Grundsätze.

Solche Approximationsfunktionen wurden im Programmiersystem für die automatische, strukturelle Analyse von Tragwerken ASTRA, welches im Kombinat VITKOVICE in Ostrava, CSSR ausgearbeitet wurde, benutzt und die Ergebnisse wie der statischen, sowie auch der dynamischen Berechnungen weisen eine sehr gute Konvergenz auf.

c) Räumliche Elemente

Die Bestrebung biegesteife eindimensionale Elemente und Flächenelemente mit räumlichen Elementen zu kombinieren, verlangt die Benutzung von Parametern, bei welchen auch die Verdrehung beim räumlichen Element berücksichtigt werden muß. Nach dem bisher beschriebenen Verfahren kann auch dieser Fall verhältnismäßig leicht gelöst werden.

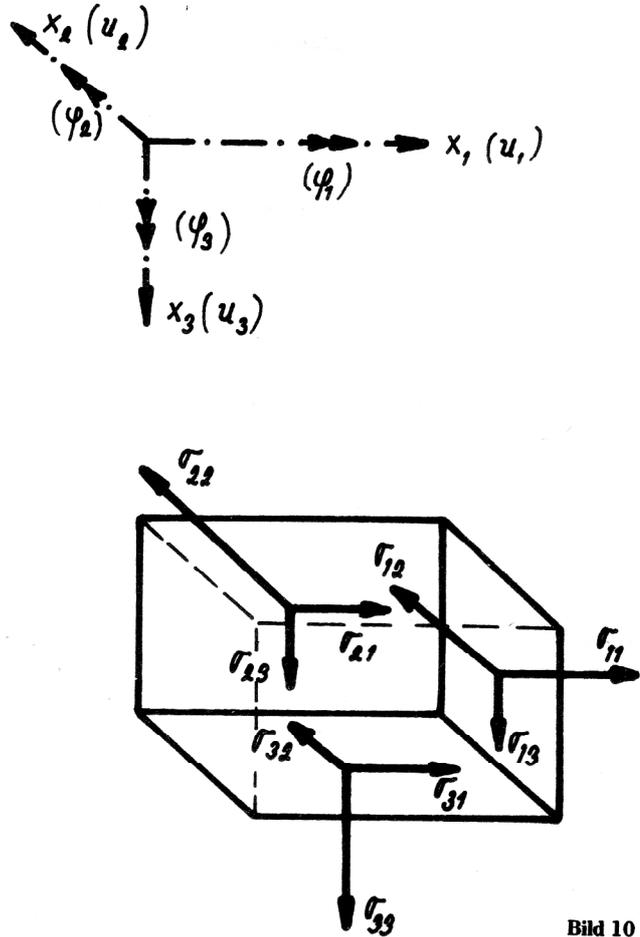


Bild 10

Für die globalen Spannungskomponenten (definiert zu den Achsen x_i) können nach Bild 10 und einfachen Abänderungen die Gleichgewichtsdifferentialbedingungen in nachstehender Form erhalten werden.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{23} - \sigma_{32} + l_1 &= 0 \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} + l_2 &= 0 \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} + l_3 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + p_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + p_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + p_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (17)$$

Nach Einsetzen der Gruppenveränderlichen

$$\tau_{12} = \frac{1}{2} (\sigma_{12} + \sigma_{21})$$

$$\tau_{23} = \frac{1}{2} (\sigma_{23} + \sigma_{32})$$

$$\tau_{31} = \frac{1}{2} (\sigma_{31} + \sigma_{13})$$

des Spannungsvektors

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, k_1, k_2, k_3\}$$

und des zugehörigen Verzerrungsvektors

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$$

in die Gleichung (2) erhält man die Bedingung

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left\{ -\partial\varphi_1 (2k_1 + l_1) - \delta\varphi_2 (2k_2 + l_2) \right. \\ & - \delta\varphi_3 (2k_3 + l_3) - \delta u_1 \left[\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tau_{12} - k_3) \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tau_{31} + k_2) + p_1 \left. \right] - \delta u_2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\tau_{12} + k_3) + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tau_{23} - k_1) + p_2 \left. \right] - \delta u_3 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\tau_{31} - k_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tau_{23} + k_1) \right. \\ & + \left. \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + p_3 \right] \left. \right\} d\Omega = \iiint_{\Omega} \left\{ \delta\{\epsilon\}^T \cdot \{\sigma\} - \delta\{u\}^T \cdot \{p\} \right. \\ & \left. - \delta\{\varphi\}^T \cdot \{l\} \right\} d\Omega \end{aligned}$$

und von dieser die Verzerrungen in der Form

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \epsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \epsilon_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \gamma_{31} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \Delta_1 &= -2\varphi_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \Delta_2 &= -2\varphi_2 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \Delta_3 &= -2\varphi_3 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Wieder wird $\Delta = 0$ gesetzt und man erhält die gesuchten Beziehungen zwischen den Komponenten der Verschiebungsfunktionen

$$\begin{aligned} 2\varphi & + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \frac{\partial\{u\}}{\partial x_1} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{\partial\{u\}}{\partial x_2} \\ & + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{\partial\{u\}}{\partial x_3} = \{0\} \end{aligned} \quad (19)$$

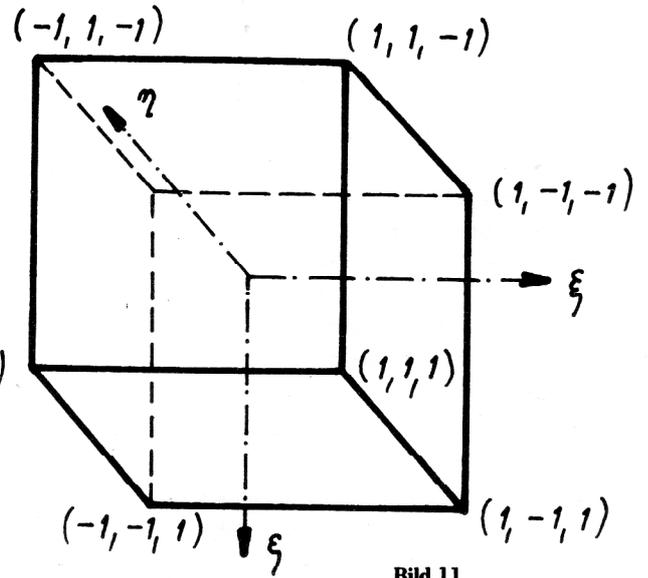


Bild 11

Zu den bisher benutzten Bezeichnungen sei noch $\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \Phi^x$ eingeführt.

Weiter existiert die Ableitung der Transformationsgleichung zwischen den Koordinatenachsen x_i und den Achsen ξ, η, ζ , welche nach Bild 11 für den Berechnungskubus definiert sind, in der Form

$$\begin{Bmatrix} \Phi' \\ \Phi \cdot \\ \Phi^x \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1 \cdot & x_2 \cdot & x_3 \cdot \\ x_1^x & x_2^x & x_3^x \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \quad (20),$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \frac{1}{I} [T] \cdot \begin{Bmatrix} \Phi' \\ \Phi \cdot \\ \Phi^x \end{Bmatrix} \quad (20.a)$$

wobei J der Jacobian der Transformation ist und

$$[T] = \begin{vmatrix} x_2 \cdot x_3^x - x_2^x x_3 \cdot, x_3 \cdot x_2^x - x_3^x x_2 \cdot, x_2 \cdot x_3 \cdot - x_2^x x_3 \cdot \\ x_3 \cdot x_1^x - x_3^x x_1 \cdot, x_1 \cdot x_3^x - x_1^x x_3 \cdot, x_3 \cdot x_1 \cdot - x_3^x x_1 \cdot \\ x_1 \cdot x_2^x - x_1^x x_2 \cdot, x_2 \cdot x_1^x - x_2^x x_1 \cdot, x_1 \cdot x_2 \cdot - x_1^x x_2 \cdot \end{vmatrix} = [t_{ij}] \quad (20.b)$$

Mit Hilfe dieser Transformationsgleichungen kann die gewünschte Funktionsgleichung (14) in die Form (21) umgeschrieben werden

$$2I\{\varphi\} + \begin{vmatrix} 0 & t_{31} - t_{21} \\ -t_{31} & 0 & t_{11} \\ t_{21} - t_{11} & 0 & \end{vmatrix} \{u\} + \begin{vmatrix} 0 & t_{32} - t_{22} \\ -t_{32} & 0 & t_{12} \\ t_{22} - t_{12} & 0 & \end{vmatrix} \{u\}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & t_{33} - t_{23} \\ -t_{33} & 0 & t_{13} \\ +t_{23} & -t_{13} & 0 \end{vmatrix} \{u^x\} = \{0\} \quad (21)$$

Die Approximationsfunktionen für die Verdrehung und Verschiebung setzen sich auch in diesem Fall aus Grund- und Korrektionsfunktionen, und die Korrektionsfunktionen wieder aus Kanten- und Innenkorrektionsfunktionen zusammen. Parameter der Lösung sind auch hier nur die Funktionswerte aller sechs Verschiebungskomponenten in den Knotenpunkten.

Die Grundfunktionen werden wieder aus einfachsten für das untersuchte Element geltenden Polynomen zusammengesetzt und beinhalten Parameter, deren physikalischer Sinn Funktionswerte der approximierten Funktion in den Knotenpunkten sind.

Die Kantenkorrektionsfunktionen haben eine ähnliche Form wie die Kantenkorrektionsfunktionen bei Flächenelementen.

Deshalb, z. B. für die Kante $\eta = \zeta = -1$ des Hexaeders im Bild 12, haben sie für Elemente mit zwei Knotenpunkten auf der Kante die Form

$$\frac{1}{4} (1 - \eta) (1 - \zeta) (1 - \xi^2) (a + b \xi),$$

und für Elemente mit drei Knotenpunkten auf der Kante die Form

$$\frac{1}{4} (1 - \eta) (1 - \zeta) (1 - \xi^2) (a \xi + b \xi^2).$$

Die Koeffizienten a, b haben genau die selbe Form, wie die ihnen entsprechenden Koeffizienten der Flächenelemente. Dadurch wird die Stetigkeit an den Grenzen der räumlichen Elemente, der Flächenelemente und der Linienelemente gewährleistet.

Die Innenkorrektionsfunktionen für die Verdrehung und Verschiebung haben wieder eine andere Form und auch andere Bedeutung.

Die Korrektionsfunktionen für die Verschiebung werden auf der ganzen Grenze des Elementes einen verschwindenden Funktionswert haben. Einen Nullwert auf allen Oberflächen, mit Ausnahme immer einer einzigen Oberfläche, werden auch die ersten Ableitungen der Funktionen haben. Für die Menge aller inneren Punkte dieser Oberfläche (mit nichtverschwindenden ersten Ableitungen), muß die Ableitung der entsprechenden Korrektionsfunktionen in senkrechter Richtung zur Oberfläche verschieden von Null sein. Vom Gesichtspunkt der für diese Oberfläche gültigen Veränderlichen, müssen die diesbezüglichen Funktionssätze einen ungeraden und geraden Verlauf haben, und deshalb müssen es vier Funktionen sein.

Zum Beispiel für die Oberfläche $\xi = -1$ des Hexaeders sind es die Funktionen

$$\frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)^2 (1 - \zeta^2)^2 (d + e\eta + f\zeta + g\eta\zeta).$$

Die Koeffizienten d bis g aller drei Funktionen für die Verschiebung werden gleichzeitig aus der Bedingung des Nullwertes der Ableitung der Korrektion in Richtung der Normalen zur Oberfläche berechnet. Wir die Korrektion mit Hilfe des Indizes k bezeichnet, ergeben sich für die Oberfläche $\xi = \pm 1$ die Koeffizienten aus den Gleichungen:

$$2I \begin{vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & t_{31} - t_{21} \\ -t_{31} & 0 & t_{11} \\ t_{21} - t_{11} & 0 & 0 \\ t_{11} & t_{21} & t_{31} \end{vmatrix} \{u'_k\} + \begin{vmatrix} 0 & t_{31} - t_{21} \\ -t_{31} & 0 & t_{11} \\ t_{21} - t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \{u\} + \begin{vmatrix} 0 & t_{32} - t_{22} \\ -t_{32} & 0 & t_{12} \\ t_{22} - t_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \{u\} + \begin{vmatrix} 0 & t_{33} - t_{23} \\ -t_{33} & 0 & t_{13} \\ t_{23} - t_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \{u^x\} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \{t_{i1}\}^T \cdot \{t_{i1}\} \cdot \{u'_k\} &= 2I \cdot \begin{vmatrix} 0 & t_{31} - t_{21} \\ -t_{31} & 0 & t_{11} \\ t_{21} - t_{11} & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \{\varphi\} \\ &+ (\{t_{i1}\} \cdot \{t_{i1}\}^T - \{t_{i1}\}^T \{t_{i1}\} \cdot [1]) \cdot \{u\} \\ &+ (\{t_{i2}\} \cdot \{t_{i1}\}^T - \{t_{i1}\}^T \{t_{i2}\} \cdot [1]) \cdot \{u\} \\ &+ (\{t_{i3}\} \cdot \{t_{i1}\}^T - \{t_{i1}\}^T \{t_{i3}\} \cdot [1]) \cdot \{u^x\}; \quad (22.a) \end{aligned}$$

Auf der Oberfläche $\eta = \pm 1$ ergeben sich die Koeffizienten aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} \{t_{i2}\}^T \cdot \{t_{i2}\} \cdot \{u'_k\} &= 2J \begin{vmatrix} 0 & t_{32} - t_{22} \\ -t_{32} & 0 & t_{12} \\ t_{22} - t_{12} & 0 & 0 \end{vmatrix} \{\varphi\} \\ &+ (\{t_{i1}\} \{t_{i2}\}^T - \{t_{i2}\}^T \{t_{i1}\} \cdot [1]) \cdot \{u\} \\ &+ (\{t_{i2}\} \{t_{i2}\}^T - \{t_{i2}\}^T \{t_{i2}\} \cdot [1]) \cdot \{u\} \\ &+ (\{t_{i3}\} \{t_{i2}\}^T - \{t_{i2}\}^T \{t_{i3}\} \cdot [1]) \cdot \{u^x\}; \quad (22.b) \end{aligned}$$

und für die Oberfläche $\zeta = \pm 1$ aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \{t_{i3}\}^T \cdot \{t_{i3}\} \cdot \{u'_k\} &= 2J \begin{vmatrix} 0 & t_{33} - t_{23} \\ -t_{33} & 0 & t_{13} \\ t_{32} - t_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \{\varphi\} \\ &+ (\{t_{i1}\} \cdot \{t_{i3}\}^T - \{t_{i3}\}^T \cdot \{t_{i1}\} [1]) \{u\} \\ &+ (\{t_{i2}\} \cdot \{t_{i3}\}^T - \{t_{i3}\}^T \cdot \{t_{i2}\} [1]) \{u\} \\ &+ (\{t_{i3}\} \cdot \{t_{i3}\}^T - \{t_{i3}\}^T \cdot \{t_{i3}\} [1]) \{u^x\}; \quad (22.c) \end{aligned}$$

Die Innenkorrektionsfunktionen für die Verdrehung sind im Prinzip nicht einmal notwendig zu bestimmen, da sie nicht im Funktional der Lösung vorkommen und nicht an der Integration der Steifigkeitsmatrix teilnehmen. Nur der Vollständigkeit halber sei angeführt, daß ihre Funktionswerte auf der ganzen Grenze des Elementes gleich Null sind. Sie haben die Form

$$\sqrt{1 - \xi^2} (1 - \eta^2) (1 - \zeta^2) (k + \xi m + \eta n + \zeta \sigma + \xi \eta p + \xi \zeta r + \eta \zeta s + \xi \eta \zeta t).$$

Die Koeffizienten k bis t werden aus der Bedingung der Gültigkeit der Gleichung (21) im Inneren des untersuchten Elementes berechnet.

Damit ist die Konstruktion der Approximationsfunktionen für räumliche Elemente beendet.

d) Abschluß

Im Beitrag wurde eine Anleitung zur systematischen Konstruktion von Approximationsfunktionen für die Berechnung von Tragwerken, deren Berechnungsmodelle durch eine Kombination von Linien-, Flächen- und Raumelementen ersetzt werden können, vorgelegt. Die Lösungen nach dieser Methode sichern die Stetigkeit der Funktionen der Verschiebungskomponenten auf den Linien und Kanten der Flächen und Raumelemente.

Bei den Ableitungen wurden die neusten Richtungen gebraucht, d. h. zur Approximation wurden nur Parameter benutzt, deren physikalischer Sinn Funktionswerte der untersuchten Verschiebungsfunktionen in den Knotenpunkten der Elemente sind.

Manchem Leser wird vielleicht die Konstruktion und der Gebrauch dieser Funktionen zu anspruchsvoll und vom Rechenzeitverbrauch her zu wenig effektiv vorkommen. Dazu ist aber möglich hinzuzufügen, daß die vorgeführte Lösung durchaus vereinfacht werden kann. Zum Beispiel weisen Berechnungen, bei welchen die Kantenkorrektionsfunktionen vollkommen ausgelassen wurden und das untersuchte Tragwerk zweckmäßig und in genügend kleine Elemente aufgeteilt (diskretisiert) wurde, noch immer bessere Ergebnisse auf, als bei bisher benutzten Methoden. Dabei geht aber die Kompatibilität zu den Lösungen der Linienelemente verloren. Selbstverständlich existiert auch die Möglichkeit weiterer Vereinfachungen, z. B. können an Stelle ungerader und gerader Funktionen nur gerade Funktionen gebraucht werden usw. Es ist aber notwendig zu betonen, daß jede Vereinfachung eine Verminderung der Genauigkeit der Ergebnisse nach sich zieht, und daß eine dadurch hervorgerufene Verdichtung der Elementenaufteilung (um bessere Ergebnisse zu erzielen) wieder die Rechenzeit vergrößert. Das ist die andere Seite des Problems bei der Benutzung von Rechnern.

Die beschriebene vollständige Methode gibt bessere Ergebnisse als andere Methoden auch bei einer verhältnismäßig nicht ganz dichten Elementenaufteilung. Sie wird nur in ganz notwendigen Fällen (z. B. bei der Berechnung von Platten, Faltwerken, Schalen usw.) benutzt.

Bei der Berechnung von reinen Scheiben oder rotations-symmetrischen Tragwerken werden nur die Grundfunktionen gebraucht.

Die Größe der Ungenauigkeiten der Ergebnisse, welche durch die unzureichende Elementenaufteilung entstehen können, kann bei der vorgeführten Methode aus den Unstetigkeiten der Innenkräfte oder Spannungen an den Grenzen der Elemente festgestellt werden. Aus diesem Grund werden bei der graphischen Ausgabe der Ergebnisse (z. B. Isostaten usw.) auf ein Zeichengerät in dem oben schon erwähnten Programmiersystem ASTRA die Kurven der einzelnen Größen in jedem Element isoliert und ohne Bestrebung nach einer Stetigkeit an den Grenzen benachbarter Elemente gezeichnet. Dadurch werden die Ungenauigkeiten der Ergebnisse absichtlich graphisch betont, und der Anwender kann entscheiden, ob nicht eine Wiederholung der Berechnung mit einer dichteren Elementenaufteilung notwendig ist.

LITERATUR

- [1] Búfler: Variationsgleichungen und finite Elemente (Bayerische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte 1975, 155 – 187).
- [2] Búfler: Generalized variational principles with relaxed continuity requirements for certain nonlinear problems (Computer methods in applied mechanics and engineering 19, 235 – 255).
- [3] Hughes, Taylor, Kanok-nukulchai: A simple finite element for bending (Int. J. Num. Meth. Engn., 11, 1529 – 1543 (1977)).
- [4] Hinton, Razzaque, Zienkiewicz, Davies: A simple finite element solution for plates of homogeneous, sandwich and cellular construction (Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, March 1975).
- [5] Irons, Sohrab-Ahmad: Techniques of Finite Elements (Ellis Horwood Series, 1980).
- [6] Kanok-nukulchai: A simple and efficient finite element for general shell analysis (Int. J. Num. Meth. Engn., 14, 179 – 200).
- [7] Hinton, Bicame: A comparison of Lagrangian and serendipity Mindlin plate element for free vibration analysis (Comp. and Struct., Vol. 10, 483 – 493).
- [8] Loof: The economical computation of stiffness of large structural elements (Int. Symp., University of Newcastle, 1966).
- [9] Irons, Razzaque: A further modification to Ahmad's shell element (Int. J. Num. Meth. Engng. 4, 588 – 589 (1972)).

Anschrift des Verfassers:

Doc. Ing. Miroslav Horák CSc.
61300 Brno, CSSR
Provaznikova 53