

Eine Theorie zur nichtlinearen Verformung anisotroper Körper und ihre Anwendung auf die Berechnung des Kriechverhaltens dünner Schalen

Aleksander Soločevskij, Valeri Konkin, Oleg Moračkovskij, Siegfried Koczyk

1. Die nichtlineare Verformung anisotroper Körper mit unterschiedlichen Eigenschaften bei Zug und Druck

1.1. Einführung

Bei experimentellen Untersuchungen zur Verformung verschiedener Legierungen, polymerer und kompositer Materialien kann man feststellen, daß ihr Festigkeitsverhalten anisotrop und stark unterschiedlich bei Zug und Druck ist. Darunter versteht man u. a. die Abhängigkeit der Materialeigenschaften von der Belastungsart, die beispielsweise in der Form verschiedener Deformationscharakteristiken des Materials bei Zug und Druck auftritt. Die Anisotropie ist durch die verschiedenen Materialeigenschaften in Abhängigkeit von der Meßrichtung definiert. Diese Besonderheiten der Materialien treten bei momentaner Belastung (Elastizität, Plastizität) und im Verlauf der Zeit (Viskosität) auf.

Für Graphit B-2-1 haben die Proben, die aus industriell gefertigtem Ausgangsmaterial orthogonal zur Preßachse herausgeschnitten wurden, einen fast um das 6fache größeren Elastizitätsmodul bei Zug als bei Druck [1]. Die elastischen Eigenschaften der Proben, die parallel zur Preßachse entnommen wurden, unterscheiden sich nur unwesentlich bei Zug und Druck und haben ungefähr die Werte, wie im Falle der Druckbelastungen bei Proben, die orthogonal zur Preßachse liegen.

Glasfaserverstärkte Plaste des Typs CBAM 5 : 1 mit Epoxidphenol-Verbindungsmaterial besitzt praktisch für Zug und Druck in Richtung der Fasern gleiche Elastizitätsmoduli [2]. Wesentliche Unterschiede treten für den Fall auf, daß die Proben unter einem bestimmten Winkel zur Armierungshauptachse herausgeschnitten werden. Beispielsweise ist bei Zug der Elastizitätsmodul quer zur Faserrichtung um 40 % geringer als bei Druck.

Räumlich armierte Komposite, wie z. B. Kohlestoff-Plaste, haben bei Druck einen um ca. 30 % niedrigeren Elastizitätsmodul in Richtung der Kette als in der Faserrichtung der Schüsse [3]. Der Wert bei Druck in Kettenrichtung ist mehr als zweimal so groß wie bei Zug. In Tabelle 1 sind die Elastizitätsmoduli für Zug und Druck in Kettenrichtung und Richtung der Faserschüsse für Kohlenstofftextolit angegeben, welches auf der Grundlage von Phenolformaldehydharz hergestellt wurde [4]. Analoge Werte sind für Kohlenstoffmetallplaste in Tabelle 2 angeführt.

Das Verhaltensbild der betrachteten Materialien wird noch komplizierter, wenn man nichtelastische Verformungen untersucht [1], [3], [5] bis [12]. So unterscheiden sich die Dehnungswerte beim Kriechen von Proben

Tabelle 1

| Temperatur, K | Elastizitätsmodul, GPa | | | |
|---------------|------------------------|---------|--------|---------|
| | Zug | | Druck | |
| | Ketten | Schüsse | Ketten | Schüsse |
| 293 | 19,93 | 6,33 | 15,60 | 13,53 |
| 373 | 15,47 | 6,54 | 13,93 | 11,38 |
| 473 | 15,40 | 6,57 | 12,76 | 10,98 |
| 573 | 12,69 | 3,60 | 9,91 | 3,01 |

Tabelle 2

| Temperatur, K | Elastizitätsmodul, GPa | | | |
|---------------|------------------------|---------|--------|---------|
| | Zug | | Druck | |
| | Ketten | Schüsse | Ketten | Schüsse |
| 293 | 20,28 | 10,61 | 15,75 | 15,75 |
| 373 | 19,38 | 9,75 | 15,45 | 14,86 |
| 473 | 18,06 | 9,50 | 4,56 | 13,87 |
| 573 | 15,61 | 4,60 | 8,02 | 4,06 |
| 673 | 17,12 | 3,92 | 9,41 | 4,26 |

aus Titanlegierung, die längs bzw. quer zur Faserrichtung herausgeschnitten wurden, unter Zimmertemperaturbedingungen bei gleichen Spannungen und Zeitabschnitten um das 8fache [8]. Dabei ist die Deformation, die für Proben in Längsrichtung ermittelt wurde, bei Zug 20 mal so groß wie bei Druck.

Nachfolgend werden die theoretischen Grundlagen der Beschreibung der Elastizität, der Plastizität und der Viskosität anisotroper Körper mit unterschiedlichen Eigenschaften bei Zug und Druck dargestellt.

1.2. Elastische Körper

Bei der Formulierung der konstitutiven Gleichungen für anisotrope Körper, die unterschiedliche Festigkeit bei Zug und Druck haben, wird von der Hypothese der Existenz eines elastischen Potentials in der Form

$$f = \frac{1}{2} \sigma_e^2 \quad (1)$$

ausgegangen. Dabei ist σ_e eine invariante Größe, die die Äquivalenz des einachsigen mit dem mehrachsigen Spannungszustand herstellt und daher äquivalente Spannung genannt wird ($\sigma_e \geq 0$). Die Auswahl der äquivalenten Spannung ist nicht eindeutig. Für die betrachteten Kontinua wählt man σ_e als Summe einer linearen Funktion $\sigma = b_{ij} \sigma_{ij}$ und einer quadratischen Funktion $\sigma_e^2 = a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$ des Spannungstensors σ_{ij} und bestimmter Anisotropietensoren b_{ij} , a_{ijkl} [13], wobei

$$\sigma_e = \sigma + \sigma_0 \quad (2)$$

ist. Die Komponenten des Tensors der elastischen Deformationen

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

werden aus den folgenden Beziehungen bestimmt

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{\partial f}{\partial \sigma_o} \frac{\partial \sigma_o}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_o} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \sigma_e, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} = b_{ij},$$

$$\frac{\partial \sigma_o}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{a_{ijkl} \sigma_{kl}}{\sigma_o}$$

Damit folgt

$$\epsilon_{ij}^e = \sigma_e \left(\frac{a_{ijkl} \sigma_{kl}}{\sigma_o} + b_{ij} \right). \quad (4)$$

Aus der Symmetrie der Tensoren $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, folgt die Symmetrie der Tensoren a_{ijkl} , b_{ij} , d. h.

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij}. \quad (5)$$

Damit verringert sich in der konstitutiven linearen Tensorgl. (4) die Anzahl der unabhängigen Konstanten a_{ijkl} auf 21 und die der Konstanten b_{ij} auf 6. Aufgrund der Invarianz der Ausdrücke für σ und σ_o behält der Ausdruck (4) sein Aussehen beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem bei. Die Tensoren b_{ij} und a_{ijkl} werden nach den für Tensoren 2. und 4. Stufe üblichen Regeln transformiert:

$$b'_{ij} = \alpha_{mi} \alpha_{nj} b_{mn}, \quad a'_{ijkl} = \alpha_{mi} \alpha_{nj} \alpha_{pk} \alpha_{ql} a_{mnpq}. \quad (6)$$

Hier sind α_{ij} die Richtungskosinuse zwischen den ursprünglichen Achsen x_i und den neuen Achsen x'_i .

Für klassische anisotrope Kontinua ist $b'_{ij} = 0$ und die Gl. (4) geht in die bekannte, dem Hookeschen Gesetz entsprechende Beziehung über:

$$\epsilon_{ij}^e = a_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (7)$$

Wenn man einen orthotropen Körper in einem Koordinatensystem betrachtet, dessen Achsen mit den Hauptanisotropierichtungen zusammenfallen, so kann man die physikalischen Beziehungen (4) wie folgt schreiben

$$\epsilon_{11}^e = \sigma_e \left(\frac{a_{1111} \sigma_{11} + a_{1122} \sigma_{22} + a_{1133} \sigma_{33}}{\sigma_o} + b_{11} \right), \quad (8)$$

$$\epsilon_{12}^e = 2 \sigma_e \frac{a_{1212} \sigma_{12}}{\sigma_o} \quad (1, 2, 3),$$

$$\begin{aligned} \sigma_o^2 = & a_{1111} \sigma_{11}^2 + 2 a_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + 2 a_{1133} \sigma_{11} \sigma_{33} + \\ & + 2 a_{2233} \sigma_{22} \sigma_{33} + a_{2222} \sigma_{22}^2 + a_{3333} \sigma_{33}^2 + \\ & + 4 a_{1212} \sigma_{12}^2 + 4 a_{1313} \sigma_{13}^2 + 4 a_{2323} \sigma_{23}^2. \end{aligned}$$

$$\sigma = b_{11} \sigma_{11} + b_{22} \sigma_{22} + b_{33} \sigma_{33}.$$

(1, 2, 3) bedeutet, daß die in den Klammern enthaltenen Indizes zyklisch vertauscht werden können.

Für isotrope Körper mit unterschiedlichem Zug-Druck-Verhalten gelten folgende Gleichungen

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = B^*, \quad a_{1111} = a_{2222} = a_{3333} = A^*,$$

$$a_{1212} = a_{1313} = a_{2323}, \quad a_{1122} = a_{1133} = a_{2233} = C^*, \quad (9)$$

$$a_{1111} = 2 a_{1212} + a_{1122}.$$

Damit erhält man aus (8)

$$\epsilon_{ij}^e = \sigma_e \left[\frac{(A^* - 2 C^*) J_1 \delta_{ij} + 2 C^* \sigma_{ij}}{\sigma_o} + B^* \delta_{ij} \right]. \quad (10)$$

δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol,

$$J_1 = \sigma_{ij} \delta_{ij},$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - J_1^2),$$

$$\sigma = B^* J_1, \quad \sigma_o^2 = A^* J_1^2 + 4 C^* J_2.$$

Somit lassen sich die physikalischen Gln. mit Hilfe der ersten und zweiten Invarianten des Spannungstensors und 3 Parametern A^* , B^* , C^* darstellen. Die mit (4) gegebenen Beziehungen verfügen also über genügende Allgemeingültigkeit.

Im weiteren sollen theoretische Ergebnisse, die aus Gl. (8) folgen, mit experimentellen Daten verglichen werden. Für die glasfaserverstärkte Plaste CBAM 5 : 1 wurden experimentell Orthotropie und verschiedene Eigenschaften bei Zug und Druck nachgewiesen [2]. Beispielsweise betragen die Elastizitätsmoduli in den Anisotropiehauptrichtungen 1,2 (N/mm^2): $E_1^+ = 52\,200$, $E_2^+ = 19\,900$, $E_1^- = 54\,500$, $E_2^- = 32\,500$. Der Index „+“ steht für Zug, „-“ für Druck. Damit kann man in den Koordinatenachsen, die mit den Hauptachsen zusammenfallen, die in Gl. (8) eingehenden Konstanten nach folgenden Formeln bestimmen:

$$a_{1111} = \frac{1}{2} [(E_1^+)^{-1/2} + (E_1^-)^{-1/2}]^2,$$

$$b_{11} = \frac{1}{2} [(E_1^+)^{-1/2} - (E_1^-)^{-1/2}], \quad (1, 2), \quad (11)$$

d. h.

$$a_{1111} = 1,875 \cdot 10^{-5} \text{ mm}^2/N, \quad a_{2222} = 3,992 \cdot 10^{-5},$$

$$b_{11} = 4,67 \cdot 10^{-5} (N/mm^2)^{-1/2}, \quad b_{22} = 2,438 \cdot 10^{-3}.$$

In [2] sind ebenfalls die experimentell ermittelten Elastizitätsmoduli bei Zug und Druck für ebene Proben, die eine um $\frac{\pi}{4}$ zu den Achsen 1,2 gedrehte Orientierung haben (N/mm^2): $E_{45}^+ = 15\,100$, $E_{45}^- = 17\,200$. Wenn man als Ausgangsdaten außer E_1^+ , E_2^+ , E_1^- , E_2^- noch E_{45}^+ verwendet, kann man theoretisch den Elastizitätsmodul E_{45}^- ermitteln. Für die um $\frac{\pi}{4}$ zu den Achsen 1,2 gedrehten Koordinatenachsen gilt

$$\sqrt{a'_{1111}} + b'_{11} = (E_{45}^+)^{-1/2},$$

$$\sqrt{a'_{1111}} - b'_{11} = (E_{45}^-)^{-1/2}. \quad (12)$$

Dabei sind mit Strich die Parameterwerte im neuen Koordinatensystem bezeichnet. In Übereinstimmung mit (6) ist $b'_{11} = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22})$, damit ergibt sich $a'_{1111} = [(E_{45}^+)^{-1/2} - b'_{11}]^2$ und außerdem $E_{45}^- = (\sqrt{a'_{1111}} - b'_{11})^{-2}$. Entsprechende Rechnungen führten auf $E_{45}^- = 18\ 660\ \text{N/mm}^2$. Damit gibt es für dieses Beispiel eine befriedigende Übereinstimmung (Experiment: $E_{45}^- = 17\ 200\ \text{N/mm}^2$).

Es wird ein anisotroper Körper aus Material mit verschiedenen Eigenschaften bei Zug und Druck betrachtet. Dabei sind auf einem Teil der Oberfläche Verschiebungen, auf dem Rest der Oberfläche Flächenbelastungen gegeben. Als Belastung sind weiter Volumenkräfte gegeben. Es ist bekannt [14], daß die hinreichende (jedoch nicht notwendige) Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung der elastischen Randwertaufgabe für dieser Körper in der Erfüllung folgender Ungleichung besteht: $\delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^e \geq 0$. Welche Einschränkungen folgen damit für die Parameter in der Gl. (4) aus dieser Bedingung? Es gilt

$$\delta \epsilon_{ij}^e = \delta \sigma_e \left(\frac{1}{\sigma_o} a_{ijkl} \sigma_{kl} + b_{ij} \right) + \sigma_e (a_{ijkl} \delta \sigma_{kl} \sigma_o - a_{ijkl} \sigma_{kl} \delta \sigma_o) \frac{1}{\sigma_o^2} \quad (13)$$

Weiterhin kann man folgende Faltung vornehmen

$$\delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^e = \delta \sigma_e \left(\frac{1}{\sigma_o} a_{ijkl} \sigma_{kl} \delta \sigma_{ij} + b_{ij} \delta \sigma_{ij} \right) + \sigma_e (a_{ijkl} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{kl} \sigma_o - a_{ijkl} \sigma_{kl} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_o) \frac{1}{\sigma_o^2} \quad (14)$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$\delta \sigma_e = \delta \sigma_o + \delta \sigma, \quad \delta \sigma = b_{ij} \delta \sigma_{ij}, \quad (15)$$

$$\sigma_o \delta \sigma_o = a_{ijkl} \sigma_{kl} \delta \sigma_{ij}$$

geht die Gl. (14) in folgende über

$$\delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^e = (\delta \sigma_e)^2 + \frac{\sigma_e}{\sigma_o} [a_{ijkl} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{kl} - (\delta \sigma_o)^2] \quad (16)$$

Wenn man die Forderung nach der positiven Definitheit der quadratischen Form

$$\sigma_o^2 = a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

berücksichtigt, erhält man die Ungleichung

$$a_{ijkl} s_{ij} s_{kl} > 0, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} \delta \sigma_o - \delta \sigma_{ij} \sigma_o, \quad (17)$$

woraus

$$a_{ijkl} \delta \sigma_{ij} \delta \sigma_{kl} > (\delta \sigma_o)^2 \quad (18)$$

folgt.

Unter Verwendung der Ungleichung (18) sowie $(\delta \sigma_e)^2 \geq 0$, $\sigma_o > 0$ und der in allen physikalischen Aufgaben auftretenden natürlichen Forderung nach der Nichtnegativität der äquivalenten Spannung $\sigma_e \geq 0$ kann man aus der Gl. (16) die Schlußfolgerung

$$\delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^e \geq 0$$

ziehen. Es sei angemerkt, daß in vielen praktischen Aufgaben für verschiedene Materialien und verschiedene Fälle des zweiachsigen Spannungszustandes die Ungleichung $\sigma_e \geq 0$ erfüllt ist. Daher kann man annehmen, daß ungeachtet der Tatsache, daß diese Ungleichung eine gewisse Einschränkung für die Parameter in den vorgeschlagenen Beziehungen bedeutet, die Forderung der Eindeutigkeit der Lösung der Randwertaufgabe auf der Grundlage der nichtlinearen Beziehungen (4) keine „harte“ Einschränkung für die konstitutiven Gleichungen und die darin eingehenden Parameter darstellt.

1.3. Elastisch-plastische Körper

Man kann postulieren, daß die Komponenten des Deformationstensors aus einem elastischen (ϵ_{ij}^e) und einen plastischen (ϵ_{ij}^p) Anteil bestehen:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (19)$$

Die Komponenten des Tensors der elastischen Deformationen werden mit Hilfe der Gl. (4) definiert. Zur Beschreibung der plastischen Deformation anisotroper Kontinua, die verschiedenes Materialverhalten bei Zug und Druck aufweisen, wird die Hypothese von der Existenz eines Potentials F verwendet. Dieses läßt sich durch die Gl. der Hyperfläche

$$F = \tau_e^2 + \varphi^2(q) = 0 \quad (20)$$

definieren. Dabei sind τ_e eine bestimmte äquivalente Spannung ($\tau_e \geq 0$), $\varphi(q)$ eine Funktion des Verfestigungsmaßes q , $\dot{q} = \dot{\epsilon}_o^p$ (der Punkt bedeutet Differentiation nach dem Belastungsparameter t , $\dot{\epsilon}_o^p$ die äquivalente Geschwindigkeit der plastischen Deformation ($\dot{\epsilon}_o^p \geq 0$)). Das Produkt aus $\dot{\epsilon}_o^p$ mit der äquivalenten Spannung ist gleich der spezifischen Leistung der dissipierten Energie

$$L = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_o^p \tau_e \quad (21)$$

Die existierende Plastizitätstheorien unterscheiden sich durch die Auswahl der äquivalenten Spannung. Dazu wird folgender Ausdruck vorgeschlagen

$$\tau_e = \tau + \tau_o \quad (22)$$

Dies ist analog zu den bereits formulierten linearen τ und quadratischen τ_o^2 der gemeinsamen invarianten Formen des Spannungstensors und der Anisotropietensoren c_{ij} , d_{ijkl}

$$\tau = c_{ij} \sigma_{ij}, \quad \tau_o^2 = d_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

Weiterhin gilt das assoziierte Fließgesetz

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (23)$$

mit λ als skalaren Faktor.

Entsprechend den Gln. (20), (22), (23) gilt

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = 2 \lambda \tau_e \left(\frac{d_{ijkl} \sigma_{kl}}{\tau_o} + c_{ij} \right) \quad (24)$$

Bei Belastung ist der skalare Faktor $\lambda > 0$, bei elastischer Deformation, Entlastung und neutraler Belastung $\lambda = 0$. Um den Faktor λ in den Beziehungen (24) für den Fall der Belastung zu bestimmen, wird die Faltung $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$ gebildet und unter Verwendung der Gl. (21) erhält man $2 \lambda \tau_e = \dot{\epsilon}_o^p$. Damit folgen aus (24) nachstehende konstitutive Gln. für die plastische Verformung anisotroper Kontinua mit unterschiedlichen Eigenschaften bei Zug und Druck

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_o^p \left(\frac{d_{ijkl} \sigma_{kl}}{\tau_o} + c_{ij} \right). \quad (25)$$

Wenn keine unterschiedlichen Eigenschaften auftreten, so wird $\tau = 0$ und man erhält aus (25) die bekannten Gleichungen der Fließtheorie bei anisotroper Verfestigung.

Es wird der Fall einfacher Belastung betrachtet, wenn die Komponenten des Spannungstensors proportional zum Parameter $t \in [0, 1]$ zunehmen: $\sigma_{ij} = t \sigma_{ij}^*$. Dabei ist σ_{ij}^* der Spannungswert am Ende der Belastung. Folglich erhält man aus (25)

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_o^p \left(\frac{d_{ijkl} \sigma_{kl}^*}{\tau_o^*} + c_{ij} \right), \quad (26)$$

woraus nach Integration (das Zeichen „*“ ist weggelassen)

$$\epsilon_{ij}^p = \int \dot{\epsilon}_o^p dt \left(\frac{d_{ijkl} \sigma_{kl}}{\tau_o} + c_{ij} \right) \quad (27)$$

folgt. Weiterhin ergibt sich aus (20) $\tau_e = \varphi(q)$. Offensichtlich ist die umgekehrte Beziehung $q = \int \dot{\epsilon}_o^p dt = \vartheta(\tau_e)$. Abschließend erhält man dann für die Deformationsvariante der Plastizitätstheorie die physikalischen Gln. in der Form

$$\epsilon_{ij}^p = \vartheta(\tau_e) \left(\frac{d_{ijkl} \sigma_{kl}}{\tau_o} + c_{ij} \right). \quad (28)$$

Es ist möglich, die Funktion $\vartheta(\tau_e)$ in einfachster Form anzugeben: so z. B. als Potenzfunktion τ_e^n , als hyperbolische Sinusfunktion $\sinh(\tau_e/p)$, als Exponentialfunktion $\exp(\tau_e/q)$. Dabei sind n, p, q Konstanten.

Die Tensoren d_{ijkl}, c_{ij} besitzen Besonderheiten, die analog denen der Parameter a_{ijkl}, b_{ij} für elastische Kontinua sind. Für sie sind beispielsweise die Gln. (5), (6), (9) gültig.

Bei orthotropen Kontinua, wenn die Koordinatenachsen mit den Hauptrichtungen der Anisotropie zusammenfallen, gehen die Gln. (28) in

$$\epsilon_{11}^p = \vartheta(\tau_e) \left(\frac{d_{1111} \sigma_{11} + d_{1122} \sigma_{22} + d_{1133} \sigma_{33}}{\tau_o} + c_{11} \right), \quad (29)$$

$$\epsilon_{12}^p = 2 \vartheta(\tau_e) \frac{d_{1212}}{\tau_o} \sigma_{12} \quad (1, 2, 3)$$

über.

Zur Begründung der konstitutiven Gln., die zur Beschreibung der betrachteten elastisch-plastischen Kontinua angegeben wurden, sei hier der Vergleich experimenteller

Tabelle 3

| $ \sigma_{11} $ MPa | σ_{22} MPa | $\epsilon_1 \cdot 10^3$ | $\epsilon_2 \cdot 10^3$ | $\epsilon_{11} \cdot 10^3$ | $\epsilon_{22} \cdot 10^3$ | $\epsilon_{11}^e \cdot 10^3$ | $\epsilon_{22}^e \cdot 10^3$ | $\epsilon_{11}^p \cdot 10^3$ | $\epsilon_{22}^p \cdot 10^3$ |
|------------------------|----------------------|-------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 2,76 | 32,34 | 0,8 | 3,4 | 1,1 | 3,8 | 1,1 | 2,8 | 0,0 | 1,0 |
| 15,51 | 23,52 | 2,80 | 3,04 | 3,10 | 2,92 | 2,43 | 2,30 | 0,67 | 0,62 |
| 16,82 | 26,57 | 3,1 | 3,4 | 3,4 | 3,3 | 2,6 | 2,5 | 0,8 | 0,8 |
| 23,73 | 23,52 | 4,65 | 3,43 | 4,90 | 3,29 | 3,44 | 2,46 | 1,46 | 0,83 |
| 24,22 | 23,52 | 4,85 | 3,43 | 5,02 | 3,31 | 3,50 | 2,47 | 1,52 | 0,84 |

und rechnerischer Werte bei zusammengesetzter Beanspruchung von Graphit ATJ-S angeführt [7]. Die dünnwandigen röhrenförmigen Proben wurden durch Innendruck bei gleichzeitiger Einwirkung einer Druckbelastung in Längsrichtung beansprucht. Damit entstanden in den Proben axiale Druckspannungen σ_{11} und positive Ringspannungen σ_{22} , die der gemessenen axialen Dehnung ϵ_1 und der Ringdehnung ϵ_2 entsprechen (Tabelle 3). Außerdem zeigten einachsige Zug- und Druckversuche für Proben, die in Richtung der Anisotropieachsen 1,2 des Materials herausgeschnitten wurden, die Anisotropie und die unterschiedlichen Zug- und Druckeigenschaften des Graphits [5], [6]. Die Versuchsergebnisse sind auf den Bildern 1 bis 4 dargestellt. Die Deformationsdiagramme lassen sich durch die Beziehungen

$$\epsilon_1 = \epsilon_{11}^e + \epsilon_{11}^p \quad (1, 2), \quad (30)$$

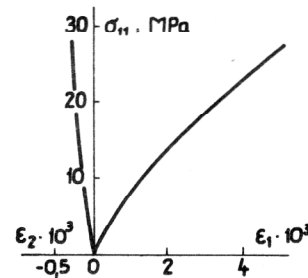


Bild 1
Dehnungsdiagramm für Graphit in Richtung der Hauptanisotropieachse 1

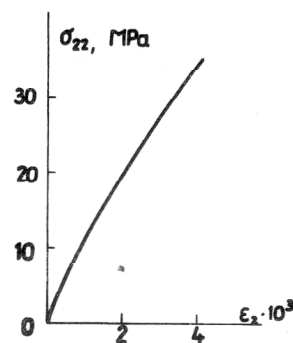


Bild 2
Dehnungsdiagramm für Graphit in Richtung der Hauptanisotropieachse 2

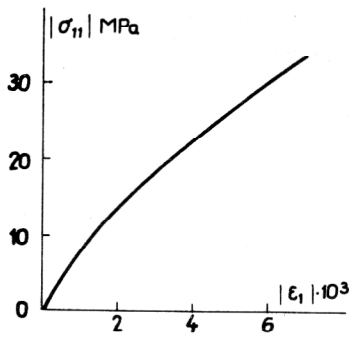


Bild 3
Druckdiagramm für Graphit in Richtung der Hauptanisotropieachse 1

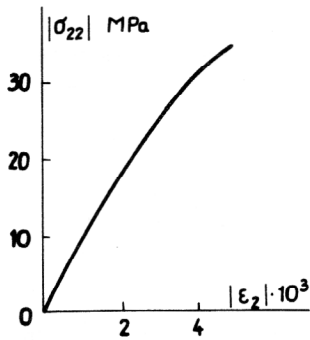


Bild 4
Druckdiagramm für Graphit in Richtung der Hauptanisotropieachse 2

bei Zug in Richtung 1

$$\epsilon_{11}^e = \sigma_{11} / E_1^+, \quad \epsilon_{22}^e = -\nu_{21}^+ + \epsilon_{11}^e, \quad (31)$$

$$\epsilon_{11}^p = D_1^+ \sigma_{11}^n, \quad \epsilon_{22}^p = -\mu_{21} + \epsilon_{11}^p,$$

bei Zug in Richtung 2

$$\epsilon_{22}^e = \sigma_{22} / E_2^+, \quad \epsilon_{22}^p = D_2^+ \sigma_{22}^n, \quad (32)$$

bei Druck in Richtungen 1,2

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^e &= -|\sigma_{11}| / E_1^-, \quad \epsilon_{11}^p = -D_1^- |\sigma_{11}|^n, \\ \epsilon_{22}^e &= -|\sigma_{22}| / E_2^-, \quad \epsilon_{22}^p = -D_2^- |\sigma_{22}|^n. \end{aligned} \quad (33)$$

beschreiben. Hierbei sind

$$E_1^+ = 9,45 \text{ GPa}, \quad E_2^+ = 11,86, \quad \nu_{21}^+ = 0,16,$$

$$E_1^- = 7,95, \quad E_2^- = 10,48, \quad n = 2,47,$$

$$D_1^+ = 21,37 \text{ GPa}^{-n}, \quad D_2^+ = 5,10, \quad \mu_{21}^+ = 0,$$

$$D_1^- = 11,74, \quad D_2^- = 6,18.$$

Die vorgeschlagenen konstitutiven Gln. (8), (19), (29) lauten für den Fall des hier betrachteten zweiachsigen Spannungszustands

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_{11}^e + \epsilon_{11}^p, \quad \epsilon_{11}^e = (\sigma + \sigma_0) \\ &\left(\frac{a_{1111} \sigma_{11} + a_{1122} \sigma_{22}}{\sigma_0} + b_{11} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\epsilon_{11}^p = (\tau + \tau_0)^n \left(\frac{d_{1111} \sigma_{11} + d_{1122} \sigma_{22}}{\tau_0} + c_{11} \right) \quad (1, 2),$$

$$\sigma_0^2 = a_{1111} \sigma_{11}^2 + 2 a_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + a_{2222} \sigma_{22}^2,$$

$$\tau_0^2 = d_{1111} \sigma_{11}^2 + 2 d_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + d_{2222} \sigma_{22}^2,$$

$$\sigma = b_{11} \sigma_{11} + b_{22} \sigma_{22}, \quad \tau = c_{11} \sigma_{11} + c_{22} \sigma_{22}.$$

Die Anisotropieparameter in diesen Gln. kann man unter Verwendung der oben angegebenen Grundexperimente auf der Grundlage der Gln. (11) und der Gln.

$$d_{1111} = \frac{1}{4} [(D_1^+)^{1/(n+1)} + (D_1^-)^{1/(n+1)}]^2,$$

$$c_{11} = \frac{1}{2} [(D_1^+)^{1/(n+1)} - (D_1^-)^{1/(n+1)}] \quad (1, 2),$$

$$a_{1122} = -\sqrt{a_{1111}} [b_{22} + (E_1^+)^{-1/2} \nu_{21}^+],$$

$$d_{1122} = -\sqrt{d_{1111}} [c_{22} + (D_1^+)^{1/(n+1)} \mu_{21}^+]$$

ermitteln, oder letztendlich

$$\begin{aligned} a_{1111} &= 11,56 \cdot 10^{-2} \text{ GPa}^{-1}, & a_{2222} &= 89,78 \cdot 10^{-3}, \\ a_{1122} &= -20,85 \cdot 10^{-3}, & b_{11} &= -14,68 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-1/2}, \\ b_{22} &= -92,64 \cdot 10^{-4}, & d_{1111} &= 49,51 \cdot 10^{-1} \text{ GPa}^{-2m}, \\ d_{2222} &= 27,06 \cdot 10^{-1}, & d_{1122} &= 10,08 \cdot 10^{-2}, \\ c_{11} &= 19,16 \cdot 10^{-2} \text{ GPa}^{-m}, & c_{22} &= -45,29 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-m}, \\ m &= \frac{n}{n+1}, \quad n = 2,47. \end{aligned}$$

In Tabelle 3 sind die unter Verwendung der Gln. (35) berechneten Deformationen für die hier angegebenen Spannungen aufgezeigt. Es ist eine befriedigende Übereinstimmung von Theorie und Experiment zu erkennen.

1.4. Kriechen anisotroper Körper

Es wird postuliert, daß sich im allgemeinen Fall die Komponenten des Deformationstensors aus drei Anteilen zusammensetzen, d. h.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^c, \quad (36)$$

Hier sind ϵ_{ij}^c die Komponente der Kriechdeformation. Die Werte für ϵ_{ij}^e und ϵ_{ij}^p werden aus den entsprechenden Gln. (4) und (25) ermittelt. Bei der Bestimmung der Komponenten ϵ_{ij}^c kann von der Hypothese der Existenz

eines Kriechpotentials Φ ausgegangen werden. Dieses wird durch die Gleichung

$$\Phi = \Sigma_e^2 - \xi^2 (\dot{\epsilon}_o^c) = 0 \quad (37)$$

beschrieben. Dabei sind Σ_e eine äquivalente Spannung ($\Sigma_e \geq 0$), der Punkt bedeutet Differentiation nach der Zeit t , $\xi (\dot{\epsilon}_o^c)$ ist eine Funktion der äquivalenten Kriechdeformationsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_o^c \geq 0$, $\dot{\epsilon}_o^c \Sigma_e = W = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^c$. Die äquivalente Spannung wird auf der Grundlage der linearen Funktion Σ und der quadratischen Funktion Σ_o^2 als invariante Form des Spannungstensors und der Anisotropietensoren h_{ij} , g_{ijkl} gebildet:

$$\Sigma_e = \Sigma + \Sigma_o, \quad (38)$$

$$\Sigma = h_{ij} \sigma_{ij}, \quad \Sigma_o^2 = g_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}.$$

Weiterhin wird das zu (37) assoziierte Fließgesetz verwendet

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (39)$$

und man erhält unter Beachtung der Gln. (37), (38) die Gln.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = 2 \eta \Sigma_e \left(\frac{g_{ijkl} \sigma_{kl}}{\Sigma_o} + h_{ij} \right). \quad (40)$$

Dabei ist η ein skalarer Faktor, der aus der Faltung $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^c$ gebildet wird

$$2 \eta \Sigma_e = \dot{\epsilon}_o^c. \quad (41)$$

Die Funktion $\dot{\epsilon}_o^c$ kann aus den Gln. (37) bestimmt werden: $\Sigma_e = \xi (\dot{\epsilon}_o^c)$. Die umgekehrte Beziehung $\dot{\epsilon}_o^c = \chi (\Sigma_e)$ bestimmt im eindimensionalen Fall die Kriechkurven. Folgende Formen sind dabei möglich: die Potenzfunktion Σ_e^n , die hyperbolische Sinusfunktion $\sinh (\Sigma_e/p)$, die Exponentialfunktion $\exp (\Sigma_e/q)$. Hierbei sind n , p , q Konstanten. Damit gelten folgende konstitutive Gln. für das Kriechen anisotroper Kontinua mit ungleichen Materialeigenschaften bei Zug und Druck

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \chi (\Sigma_e) \left(\frac{g_{ijkl} \sigma_{kl}}{\Sigma_o} + h_{ij} \right). \quad (42)$$

Die Tensoren g_{ijkl} , h_{ij} weisen die gleichen Besonderheiten wie die Tensoren a_{ijkl} , b_{ij} im Falle elastischer Kontinua auf.

Bei der Beschreibung des Kriechens orthotroper Kontinua in den mit den Anisotropiehauptachsen zusammenfallenden Koordinatenachsen folgen aus (42) die Gln.

$$\dot{\epsilon}_{11}^c = \chi (\Sigma_e) \left(\frac{g_{1111} \sigma_{11} + g_{1122} \sigma_{22} + g_{1133} \sigma_{33}}{\Sigma_o} + h_{11} \right) \quad (43)$$

$$\dot{\epsilon}_{12}^c = 2 \chi (\Sigma_e) \frac{g_{1212} \sigma_{12}}{\Sigma_o}.$$

Die rechnerischen, nach den Gln. (43) ermittelten Ergebnisse werden mit experimentellen Ergebnissen verglichen, die mit der Aluminiumlegierung D-16T bei einer Temperatur von $T = 523 \text{ K}$ [9] erhalten wurden. Es ist nachgewiesen worden, daß das Material beim Kriechen eine Anfangsanisotropie und verschiedene Eigenschaften bei Zug und Druck besitzt. Die Kriechkurven für den einachsigen Spannungszustand in den Hauptrichtungen 1,2 lassen sich mit folgenden Gln. beschreiben:

$$\dot{\epsilon}_{11}^c = K_1^+ \sigma_{11}^n, \quad (44)$$

$$\dot{\epsilon}_{22}^c = -\nu_2^+ \dot{\epsilon}_{11}^c \quad (1, 2)$$

bei Zug und

$$\dot{\epsilon}_{11}^c = -K_1^- |\sigma_{11}|^n, \quad (45)$$

$$\dot{\epsilon}_{22}^c = -\nu_2^- \dot{\epsilon}_{11}^c \quad (1, 2)$$

bei Druck. Die Werte der Konstanten wurden ermittelt zu

$$n = 6,5, \quad K_1^+ = 4,32 \cdot 10^{-11-7n} \text{ Pa}^{-n} \text{ h}^{-1},$$

$$K_1^- = 2,24 \cdot 10^{-11-7n}, \quad K_2^+ = 9,40 \cdot 10^{-11-7n},$$

$$\nu_2^- = 0,53, \quad \nu_2^+ = 0,33.$$

In [9] sind auch Ergebnisse experimenteller Untersuchungen zum Kriechen beim zweiachsigen Spannungszustand angegeben. Die Belastung entspricht Innendruck beim gleichzeitigen Einwirken einer axialen Zug- oder Druckbelastung. In der Tabelle 4 sind die experimentell ermittelten Werte in Form der Geschwindigkeiten der

Tabelle 4

| $\sigma_{11} \cdot 10^{-1}$ MPa | $\sigma_{22} \cdot 10^{-1}$ MPa | $\dot{\epsilon}_1^c \cdot 10^3$ h ⁻¹ | $\dot{\epsilon}_2^c \cdot 10^3$ h ⁻¹ | $\dot{\epsilon}_{11}^c \cdot 10^3$ h ⁻¹ | $\dot{\epsilon}_{22}^c \cdot 10^3$ h ⁻¹ |
|------------------------------------|------------------------------------|--|--|---|---|
| -10,98 | 5,49 | -1,60 | 1,60 | -0,93 | 0,91 |
| -8,06 | 8,06 | -0,92 | 1,38 | -0,82 | 1,05 |
| 7 | 14 | 0 | 1,65 | 0,08 | 1,44 |
| -3,76 | 11,28 | -0,79 | 1,59 | -0,76 | 1,49 |
| 12,4 | 12,4 | 0,59 | 1,18 | 0,71 | 1,04 |

axialen Deformationen $\dot{\epsilon}_1^c$ und der radialen $\dot{\epsilon}_2^c$ für ein stationäres Kriechstadium bei entsprechenden Spannungswerten angeführt. Hier werden ebenfalls die theoretischen Werte der Deformationsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_{11}^c$ und $\dot{\epsilon}_{22}^c$ dargestellt. Sie wurden auf der Grundlage der Gln. (43) hier erhalten

$$\dot{\epsilon}_{11}^c = (\Sigma + \Sigma_o)^n \left(\frac{g_{1111} \sigma_{11} + g_{1122} \sigma_{22}}{\Sigma_o} + h_{11} \right) \quad (1, 2),$$

$$\Sigma_o^2 = g_{1111} \sigma_{11}^2 + 2 g_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + g_{2222} \sigma_{22}^2, \quad (46)$$

$$\Sigma = h_{11} \sigma_{11} + h_{22} \sigma_{22}.$$

Die Anisotropieparameter in den Gln. (46) werden aus folgenden Gln. ermittelt

$$g_{1111} = \frac{1}{4} [(K_1^+)^{1/(n+1)} + (K_1^-)^{1/(n+1)}]^2,$$

$$h_{11} = \frac{1}{2} [(K_1^+)^{1/(n+1)} - (K_1^-)^{1/(n+1)}], \quad (47)$$

$$g_{2222} = \frac{[(K_1^-)^{1/(n+1)} \nu_2^- - (K_2^+)^{1/(n+1)}]^2 g_{1111}}{[b_{11} + (K_2^+)^{1/(n+1)} \nu_1^+ - \sqrt{g_{1111}}]^2},$$

$$h_{22} = (K_2^+)^{1/(n+1)} - \sqrt{g_{2222}},$$

$$g_{1122} = -\sqrt{a_{2222}} [h_{11} + (K_2^+)^{1/(n+1)} \nu_1^+].$$

Aus Tabelle 4 ist eine befriedigende Übereinstimmung der theoretischen und experimentellen Deformationsgeschwindigkeiten beim Kriechen zu erkennen. Die in dieser Arbeit vorgeschlagenen physikalischen Gln. sind widerspruchsfrei, relativ einfach und den experimentellen Daten adäquat. Sie wurden in [15], [16] bei der Untersuchung nichtlinearer Deformationen anisotroper Körper mit ungleichen Materialeigenschaften bei Zug und Druck angewendet.

2. Das Kriechverhalten anisotroper Schalen

Schalen treten in der Technik häufig als Konstruktionselemente auf. Bei wichtigen Maschinen und Bauteilen kann es nötig sein, bei der Berechnung des Spannungs- und Deformationszustandes auch komplizierte Effekte zu berücksichtigen, so auch, die den Verformungsprozeß beim Kriechen begleiten.

2.1. Grundgleichungen

Die Schale der Dicke h wird in den krummlinigen Koordinaten α, β, z mit den Krümmungen $k_\alpha, k_\beta, k_{\alpha\beta}$ betrachtet. Die Koordinatenachsen α, β, z (α, β liegen in der Schalenmittelfläche und die Achse z liegt in Richtung der Normalen zur Mittelfläche) fallen mit den Hauptsymmetrieachsen der physikalischen Eigenschaften des Materials zusammen. Die Deformationen $\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta, \epsilon_{\alpha\beta}$ lassen sich für den beliebigen Punkt der Schale durch die Verschiebungen u, v, w der Schalenmittelfläche wie folgt ausdrücken

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_1 + z \kappa_1, \quad \epsilon_1 = u_{,1} A^{-1} + A_2 (AB)^{-1} v - k_\alpha w + 0,5 (A^{-1} w_{,1} + k_\alpha u)^2, \quad (\alpha, \beta), (1, 2), (u, v), (A, B),$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{12} + 2 z \kappa_{12}, \quad \epsilon_{12} = AB^{-1} (u A^{-1})_{,2} + BA^{-1} (v B^{-1})_{,1} + 2 k_{\alpha\beta} w + (w_{,1} A^{-1} + k_\alpha u) (w_{,2} B^{-1} + k_\beta v),$$

$$\kappa_\alpha = -A^{-1} (u k_\alpha + w_{,1} A^{-1})_{,1} - (AB)^{-1} (v k_\beta + B^{-1} w_{,2}) A_{,2} \quad (\alpha, \beta), (1, 2), (u, v), (A, B),$$

$$\kappa_{12} = -[BA^{-1} (v B^{-1} k_\beta + B^{-2} w_{,2})_{,2} + AB^{-1} (u A^{-1} k_\alpha + A^{-2} w_{,1})_{,2}].$$

Dabei sind A, B die Koeffizienten der ersten quadratischen Form, die Indizes nach dem Komma bedeuten Ableitungen nach den Koordinaten (1 nach α , 2 nach β).

Die in den Klammern aufgezählten Paare $(\alpha, \beta), (1, 2), (u, v), (A, B)$ weisen darauf hin, daß man durch Austausch der Elemente dieser Paare die fehlenden Gln. erhalten kann.

Im allgemeinen Fall addieren sich in jedem Punkt der Schale die Deformationen aus den thermomechanischen und irreversiblen Kriechdeformationen. Es sei t ein Parameter, an dessen Änderung man den Deformationsprozeß untersuchen kann. Nachfolgend werden alle Gln. in den Geschwindigkeiten (Zuwüchsen) dieser Variablen bezüglich dieses Parameters formuliert. Die Geschwindigkeiten werden durch einen Punkt über der entsprechenden Variablen gekennzeichnet

$$\dot{a} = da/dt.$$

Die Kräfte und Momente sind mit den Deformationskomponenten in der Schalenmittelfläche wie folgt verbunden

$$\dot{N}_\alpha = B_1 \dot{\epsilon}_1 + B_{12} \dot{\epsilon}_2 + C_1 \dot{\kappa}_2 + C_{12} \dot{\kappa}_2 - I_\alpha,$$

$$\dot{M}_\alpha = C_1 \dot{\epsilon}_1 + C_{12} \dot{\epsilon}_2 + D_1 \dot{\kappa}_1 + D_{12} \dot{\kappa}_2 - J_\alpha, \quad (\alpha, \beta), (1, 2)$$

$$\dot{N}_{\alpha\beta} = B_3 \dot{\gamma}_{12} + C_3 \dot{\kappa}_{12} - I_{\alpha\beta},$$

$$\dot{M}_{\alpha\beta} = 0,5 C_3 \dot{\gamma}_{12} + D_3 \dot{\kappa}_{12} - J_{\alpha\beta}.$$

Die Koeffizienten $B_1, B_2, B_{12}, \dots, D_{12}$ fallen mit den bekannten Werten für Schalen bei elastischer Verformung zusammen. Die Beziehungen unterscheiden sich nur durch zusätzliche Glieder

$$(I_\alpha, J_\alpha) = B_1 \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{p}_\alpha + \nu_1 \dot{p}_\beta) (1, z) dz$$

$$+ B_1 \int_{-h/2}^{h/2} (\alpha_\alpha + \nu_1 \alpha_\beta) \dot{\theta} (1, z) dz \quad (\alpha, \beta), (1, 2)$$

$$(I_{\alpha\beta}, J_{\alpha\beta}) = G_{\alpha\beta} \int_{-h/2}^{h/2} \dot{p}_{\alpha\beta} (1, z) dz$$

Dabei sind $\dot{p}_\alpha, \dot{p}_\beta, \dot{p}_{\alpha\beta}$ die Geschwindigkeiten der Kriechdeformationen, $\dot{\theta}$ die Änderungsgeschwindigkeit der Temperatur, $\alpha_\alpha, \alpha_\beta$ die linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten. Die Geschwindigkeiten der Kriechdeformationen für das beim Kriechen anisotropen Materials lassen sich nach (43) ermitteln. Dabei erhält man

$$\dot{p}_\alpha = \chi(\Sigma) \left(\frac{g_\alpha \sigma_\alpha + g_{\alpha\beta} \sigma_\beta}{\Sigma_0} + h_\alpha \right) \quad (\alpha, \beta)$$

$$\dot{p}_{\alpha\beta} = 2 \chi(\Sigma) \frac{g}{\Sigma_0} \sigma_{\alpha\beta}$$

$$\text{mit } \Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1, \quad \Sigma_1 = h_\alpha \sigma_\alpha + h_\beta \sigma_\beta,$$

$$\Sigma_0^2 = 0,5 [a_{11} (\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + a_{33} \sigma_\beta^2 + a_{22} \sigma_\alpha^2 + 2 a_{44} \sigma_{\alpha\beta}^2],$$

$$g_\alpha = a_{11} + a_{22}, \quad g_{\alpha\beta}$$

$$= -a_{11}, \quad g_\beta = a_{33} + a_{11}, \quad g = a_{44}.$$

Die Funktion $\chi(\Sigma)$ wird aus den Kriechkurven des Materials bestimmt. Die Methodik der Ermittlung der Konstanten, die in die Gln. eingehen, wurde im ersten Teil der Arbeit erörtert.

Die differentiellen Gleichgewichtsbeziehungen, die für die relativen Änderungsgeschwindigkeiten der Kräfte und Momente formuliert wurden, lauten

$$L_\mu + \dot{q}_\mu = 0, \quad (\mu = \alpha, \beta, z)$$

mit den Bezeichnungen

$$L_\alpha = A^{-1} \dot{N}_{\alpha,\alpha} + A^{-1} B^{-1} B_{,\alpha} (\dot{N}_\alpha - \dot{N}_\beta) + B^{-1} \dot{s}_{,\beta} + k_\alpha (\dot{Q}_\alpha + B^{-1} \dot{M}_{\alpha\beta,\beta}), \quad (\alpha, \beta), (A, B),$$

$$L_z = A^{-1} \dot{Q}_{\alpha,\alpha} + A^{-1} B^{-1} B_{,\alpha} \dot{Q}_\alpha + B^{-1} \dot{Q}_{\beta,\beta} - k_\alpha \dot{N}_\alpha - k_\beta \dot{N}_\beta,$$

$$\dot{Q}_\alpha = A^{-1} \dot{M}_{\alpha,\alpha} + A^{-1} B^{-1} B_{,\alpha} (\dot{M}_\alpha - \dot{M}_\beta) + B^{-1} \dot{H}_{,\beta} - \dot{N}_\alpha \dot{\theta}_\alpha - N_\alpha \dot{\theta}_\alpha - \dot{s} \dot{\theta}_\beta,$$

$$\dot{Q}_\beta = A^{-1} \dot{H}_{,\alpha} + 2 A^{-1} B^{-1} B_{,\alpha} \dot{H} + B^{-1} \dot{M}_{\beta,\beta} - \dot{N}_\beta \dot{\theta}_\beta - N_\beta \dot{\theta}_\beta - \dot{s} \dot{\theta}_\alpha - s \dot{\theta}_\alpha.$$

Die Gln. wurden unter der Voraussetzung formuliert, daß die Ausgangsmetrik der Schale sich mit der Zeit praktisch nicht ändert (die Deformationen sind klein), jedoch können die Verschiebungen w vergleichbar mit der Schalendicke sein. Damit ist die Anfangs-Randwert-Aufgabe über das Kriechen anisotroper Schalen geometrisch und physikalisch nichtlinear. Im Anfang entspricht die Lösung dem elastischen Zustand der Schale.

2.2. Das zu lösende Gleichungssystem

Das vollständige Gleichungssystem wird in drei Gleichungen für die Verschiebungsgeschwindigkeiten überführt. Unter Auslassung dieser Umformungen sei hier nur das Ergebnis in Form einer Operatorenagl. angeführt

$$L_{i1}(\dot{u}) + L_{i2}(\dot{v}) + L_{i3}(\dot{w}) = \Gamma_i + p_i + \dot{q}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Dabei sind

- L_{ij} die linearen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten,
- Γ_i die linearen Differentialoperatoren mit variablen Koeffizienten, die den geometrisch nichtlinearen Gliedern im vollständigen Gleichungssystem entsprechen, und die
- p_i werden aus den Deformationsgeschwindigkeiten beim Kriechen bestimmt.

Die Ausdrücke für L_{ij} , p_i , Γ_i wurden hier aufgrund ihrer Größe nicht aufgeschrieben. Bei Vorgabe der entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen läßt sich das Gleichungssystem über α , β und t integrieren. Mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen wird das Gleichungssystem in folgende Form überführt

$$[a] \dot{x} + N(x, \dot{x}) + \dot{q} = 0$$

mit x als Vektor der unbekanntenen Knotenverschiebungswerte, q als Vektor, der den Belastungswerten in

den Netzpunkten entspricht. Zur Integration über die Zeit kann man folgende Methoden benutzen: die Eulermethode erster Ordnung, die Prediktor-Korrektor-Methode und die Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung. Bei den zwei letztgenannten Verfahren wird der Integrationsschritt automatisch gewählt (entsprechend einer vorgegebenen Fehlertoleranz). Die Geschwindigkeiten der Unbekannten x werden mit Überrelaxationsverfahren iterativ bestimmt

$$\dot{x}_i^{k+1} = \dot{x}_i^k - c/a_{ii} [N_i(\dot{x}_i^k, x_i^k) + \dot{q}_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \dot{x}_j^{k+1} + \sum_{j=1}^m a_{ij} \dot{x}_j^k], \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

N_i wird dabei im vorhergehenden Schritt bestimmt, der Relaxationsparameter c wird mit Hilfe eines numerischen Experiments aus der Bedingung der bestmöglichen Konvergenz des Iterationsprozesses ermittelt. Zur Berechnung p_i ist es notwendig, die Kriechdeformationsgeschwindigkeiten über die Schalendicke zu integrieren. Zur Berechnung dieser Integrale werden die Simpson'schen Formeln bei einer Teilung der Schalendicke in 4 Intervalle verwendet. Dies sichert eine genügende Genauigkeit bei den numerischen Berechnungen.

Der beschriebene Algorithmus wurde auf einer EDVA BESM-6 bei Anwendung der Programmiersprache ALGOL-DDR realisiert.

2.3. Berechnungsbeispiele

Es wird das Kriechen einer am Rand starr eingespannten Zylinderschale, welche mit konstanten Innendruck der Intensität $q_3 = 5 \cdot 10^{-3}$ MPa ($q_1 = q_2 = 0$) belastet ist, betrachtet. Die geometrischen Abmaße sind 1×1 m, die Dicke $h = 5 \cdot 10^{-3}$ m, $k_\beta = 1 \text{ m}^{-1}$. Als physikalische Konstanten treten $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$, $\chi(\Sigma) = A \Sigma^n$, $A = 10^{-10} (\text{m}^2/\text{MN})^4 \text{ h}^{-1}$, $n = 4$, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{44} = 3$ auf. Die Berechnungen wurden bei einem gleichmäßigen Netz mit einer Einteilung von 10×10 durchgeführt, der Relaxationsparameter betrug $c = 1,9$. Auf Bild 5 sind die Isolinien für die Spannungs-

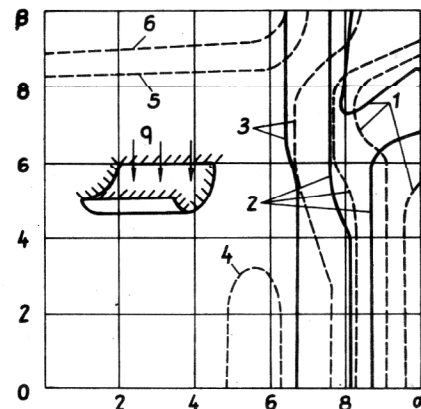


Bild 5
Die Linien gleichen Spannungsintensitätsniveaus an der Außenfläche der Schale

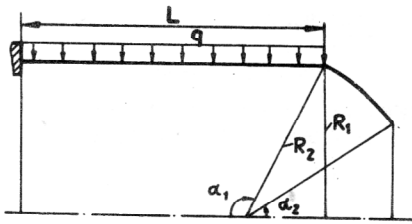


Bild 6
Berechnungsschema für die Behälterkonstruktion

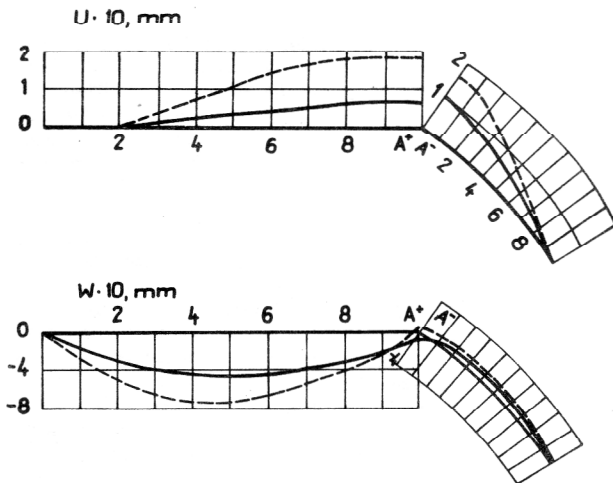


Bild 7
Verteilung der Spannungsvektorkomponenten entlang der Schalenmantelfläche

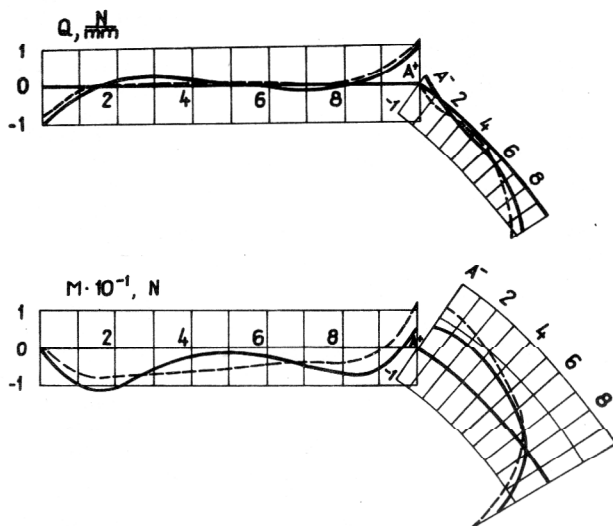


Bild 8
Verteilung der Kräfte und Momente entlang der Schalenmantelfläche

intensitäten Σ_0 auf einem Viertel der Schalenfläche bei $z = -0,5 h$ gezeigt. Die Isolinien der Spannungsintensitäten haben folgendes Niveau (Bild 5): 1 – 14,5 MPa,

2 – 15,6 MPa, 3 – 16,7 MPa, 4 – 17,8 MPa, 5 – 18,9 MPa, 6 – 20,1 MPa. Die Strichlinien entsprechen dem elastischen Anfangszustand der Schale, die Volllinien – den Kriechverformungen nach 10 Stunden.

Das Fehlen der Isolinien 4, 5, 6 bei $t = 10 h$ zeigt anschaulich die Spannungsrelaxation beim Kriechen.

Weiterhin wird das Kriechen einer Konstruktion, die aus einem zylindrischen Körper mit sphärischen Boden (Bild 6) besteht. Konstanter äußerer Druck der Intensität $q_3 = -6 \text{ MPa}$ ($q_1 = q_2 = 0$) wirkt auf den zylindrischen Teil, der sphärische Teil ist belastungsfrei. Die Dicke jeder Schale beträgt 10^{-3} m , die restlichen Abmaße entsprechen Bild 6: $R_1 = 0,2 \text{ m}$, $L = 0,2 \text{ m}$, $R_2 = 0,232 \text{ m}$, $\alpha_1 = 120^\circ$, $\alpha_2 = 150^\circ$. Das Schalenmaterial AKC – 1T hat bei $T = 473 \text{ K}$ folgende Materialparameter:

$$a_{11} = a_{22} = 6,15 \cdot 10^{-4}, a_{12} = -4,99 \cdot 10^{-4}$$

$$(\text{kg/mm}^2)^{-2n/(n+1)} h^{-2/(n+1)},$$

$$h_{11} = h_{22} = 9,54 \cdot 10^{-4} (\text{kg/mm}^2)^{-n/(n+1)} h^{-1/(n+1)}.$$

Auf Bild 7 und 8 sind die Berechnungsergebnisse dargestellt: u, w – Verschiebungen der Schalenmittelfläche in Längs- und Querrichtung, Q, M – Querkräfte und Momente, die in den Normabschnitten der Schale wirken. Das Einteilungsnetz ist auf den Bildern gezeigt. Die Volllinien entsprechen dem elastischen Ausgangszustand, die Strichlinien den Kriechverformungen nach 200 h.

Schlussfolgerungen: In der Arbeit werden neue Modelle für das Verformungsverhalten anisotroper Körper und Berechnungsmodelle für dünne anisotrope Schalen, die Kriechverhalten aufweisen, gezeigt. Die Berechnungen beweisen die Notwendigkeit der Berücksichtigung von Effekten, die das nichtlineare Deformieren begleiten.

LITERATUR

- [1] Свойства конструкционных материалов на основе углерода / под ред. В. П. Соседова.-М.: Металлургия, 1975. – 335 с.
- [2] Саркисян Н. К.: Анизотропия статической и циклической деформативности стеклопластиков типа СВМ. – Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1971, 24, № 3, с. 61 – 72.
- [3] Жигун, И. Г., Поляков В. А.: Свойства пространственно-армированных пластиков. – Рига: Зинатке, 1978. – 215 с.
- [4] Эскин Э. А., Федчук В. К., Венгжен В. В.: Анизотропия физикомеханических характеристик асбесто- и угле-текстолитов в диапазоне температур 293 ... 873 К.-Пробл. прочности, 1982, № 7, с. 109 – 113.
- [5] Джонс, Нельсон: Сопоставление теории с экспериментом для моделей материала при нелинейной деформации графита. – Ракетная техника и космонавтика, 1976, 14, № 10, с. 101 – 113.
- [6] Jones, R. M., Nelson, D. A. R.: Further characteristics of a nonlinear material model for ATJ-S graphite – J. Composite Materials, 1975, Vol. 9, Nr. 7, p. 251 – 265.
- [7] Джонс: Анализ нелинейного разномодульного ортотропного материала с помощью несимметричной матрицы податливостей. Ракетная техника и космонавтика, 1977, 15, № 10, с. 75 – 84.

- [8] Никитенко, А. Ф., Соснин, О. В., Торшенов, Н. Г., Шокало, И. К.: О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. — Журн. прикл. механики и техн. физики, 1971, № 2, с. 118 — 122.
- [9] Никитенко, А. Ф., Цвелолуб, И. Ю.: О ползучести анизотропных материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. Динамика сплошн. среды, 1979, вып. 43, с. 69 — 78.
- [10] Ломакин, Е. В. Разномодульность композитных материалов. — Механика композитных материалов, 1981, № 1, с. 23 — 29.
- [11] Lewin, G., Lehmann, B.: Ergebnisse über das Spannungs-Verformungsverhalten von PVC, dargestellt an einem zylindrischen Bauelement. Wiss. Z. Techn. Hochsch. Magdeburg, 21 (1977), II. 4, S. 415 — 422.
- [12] Bergander, H.: Nichtlinear-viskoelastisches Deformationsverhalten im ebenen Spannungszustand. Technische Mechanik 2 (1981) 2, S. 24 — 35.
- [13] Золочевский, А. А.: О соотношениях теории упругости анизотропных разномодульных материалов. — Динамика и прочность машин, 1981, вып. 34, с. 3 — 8.
- [14] Работнов, Ю. Н.: Механика деформируемого твердого тела.-М.: Наука, 1979, 744 с.
- [15] Бурлаков, А. В., Львов, Г. И., Морачковский, О. К.: Ползучесть тонких оболочек.-Харьков: Вища школа, 1977. — 124 с.
- [16] Золочевский, А. А., Морачковский, О. К.: О разносопротивляемости и анизотропии при ползучести. — Динамика и прочность машин, 1984, вып. 39, с. 3 — 9.

Anschrift der Verfasser:

к. т. н. А. А. Золочевский
инженер В. Н. Конкин
доц. к. т. н. О. К. Морачковский

Харьковский политехнический институт им. Ленина
кафедра „Динамика и прочность машин”

СССР-310002 Харьков
ул. Фрунзе 21

Doz. Dr. sc. techn. S. Koczyk
Technische Hochschule „Otto von Guericke”
Sektion Maschinenbau
WB Festkörpermechanik

3010 Magdeburg
PSF 124