

# Die Lösung der Umkehraufgabe für Industrieroboter mit kinematischer Redundanz

Pham Anh Tuan, Klaus Zimmermann

## 1. Einleitung

Der Einsatz und die Entwicklung von Industrierobotern (IR) beeinflusst gegenwärtig im entscheidendem Maße die Automatisierung der Produktion. Bei der Erforschung neuer Roboterkonfigurationen wird neben bisher bekannten IR-Typen (DSS-, DDD-Struktur u. a.) auch die Anwendung von redundanten Strukturen untersucht. Sie verfügen über den mechanischen Freiheitsgrad größer 6 und sind für eine Vielzahl von Anwendungsfällen besonders gut geeignet. (z. B. für Arbeiten in Räumen mit Hindernissen) [3], [8].

Zur Realisierung einer schnellen Bewegung durch den Roboter muß eine Koordinatentransformation zwischen kartesischen Koordinaten und Roboterkoordinaten (verallgemeinerte Koordinaten) durch einen Prozessor in etwa 20 bis 40 msec ausgeführt werden. In diesem Zusammenhang lassen sich 2 Grundaufgaben formulieren:

### a) Die direkte Aufgabe

Der Zusammenhang zwischen Roboterkoordinaten und Lageparametern hat die Form ([2])

$$x^s = f^s(q) \quad (s = 1, 2, \dots, 6) \quad (1.1)$$

$q = (q^1, q^2, \dots, q^n)$  – Roboterkoordinaten

$n$  – Freiheitsgrad des Roboters

$x^s, s = 1, 2, 3$  z. B. Zylinder- oder sphärische Koordinaten

$s = 4, 5, 6$  z. B. EULER – oder CARDAN Winkel

Mit Hilfe der Jacobi-Matrix  $\left(\frac{\partial f^s}{\partial q^a}\right)$  erhält man einen linearen Zusammenhang zwischen den Änderungen der Roboterkoordinaten und den Parametern  $x^s$ .

$$\Delta x^s = \frac{\partial f^s(q)}{\partial q^a} \cdot \Delta q^a \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta x = J(q) \cdot \Delta q \quad (1.2) \quad (1.2)$$

mit  $\Delta x = (\Delta x^1, \Delta x^2, \dots, \Delta x^6)^T, \Delta q = (\Delta q^1, \Delta q^2, \dots, \Delta q^n)^T$

$$J(q) = \left( \frac{\partial f^s}{\partial q^a} \right) \quad \begin{matrix} s = \overline{1,6} \\ a = \overline{1,n} \end{matrix}$$

Nach Gleichung (1.2) läßt sich jedem  $\Delta q$  genau ein  $\Delta x$  zuordnen („direkte Aufgabe“).

### b) Die Umkehraufgabe

Wenn zu jedem gegebenen  $\Delta x$  ein Vektor  $\Delta q$  derart bestimmt werden soll, daß die Gleichung (1.2) erfüllt wird, so spricht man von der Umkehraufgabe der Kinematik. Mit Hilfe der inversen Jacobi-Matrix  $J^{-1}$  läßt sich die Lösung der Umkehraufgabe in der Form

$$\Delta q = J^{-1}(q) \cdot \Delta x \quad (1.3)$$

darstellen. Für Roboterkonfigurationen sind aber die Bedingungen für die Existenz der Matrix  $J^{-1}$  i. a. nicht erfüllt [9]. Zum Beispiel ist die Jacobi-Matrix für redundante Strukturen nicht quadratisch ( $\dim q \neq \dim x$ ). Für derartige Fälle sollen in dieser Arbeit Lösungsmöglichkeiten der Umkehraufgabe gezeigt werden.

## 2. Die Lösung der Umkehraufgabe

### 2.1. Die Anwendung der generalisierten inversen Matrix

Die Matrix  $G$  heißt generalisierte inverse Matrix zur Matrix  $J$  ( $m \times n$ ), wenn die Gleichung

$$J G J = J \quad (2.1)$$

gilt [4]. Die Lösung der Umkehraufgabe läßt sich unter Verwendung der generalisierten Inversen  $G$  in der Form

$$\Delta q = G \cdot \Delta x \quad (2.2)$$

schreiben. Annahme: Es existiere eine Zerlegung der Matrix  $J = [J_1 \mid J_2]$ , wobei  $J_1$  eine quadratische, nichtsinguläre Matrix ist. Für diesen Fall berechnet sich die generalisierte Inverse  $G_1$  nach der Formel:

$G_1 = [J_1^{-1} \mid 0]^T$ . Bildet man alle möglichen Zerlegungen von  $J$  entsprechend der genannten Forderung, so lassen sich die Vektoren

$$\Delta q_k = G_k \cdot \Delta x$$

berechnen.

Mit jeweils  $n-m+1$  linear unabhängigen Vektoren  $\Delta q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-m+1$ ) erhält man die Lösung der Umkehraufgabe in der Form ([4], [10]):

$$\Delta q = \sum_{k=1}^{n-m+1} \lambda_k \cdot \Delta q_k, \quad \text{mit} \quad \sum_{k=1}^{n-m+1} \lambda_k = 1 \quad (2.3)$$

### Beispiel:

DDD-Roboterstruktur in der  $(x, y)$  Ebene (Bild 1)  
Die Zwangsbedingungen (1.1) lauten

$$x_c = L_1 \cos q^1 - L_2 \cos(q^1 + q^2) + L_3 \cos(q^1 + q^2 + q^3)$$

$$y_c = L_1 \sin q^1 - L_2 \sin(q^1 + q^2) + L_3 \sin(q^1 + q^2 + q^3)$$

$$J_{q^3} = \begin{pmatrix} -0,12639 & 0,21443 \\ 0,64689 & 0,28105 \end{pmatrix} \quad J_{q^3}^{-1} = \begin{pmatrix} -1,61306 & 1,23069 \\ 3,71276 & 0,7254 \end{pmatrix}$$

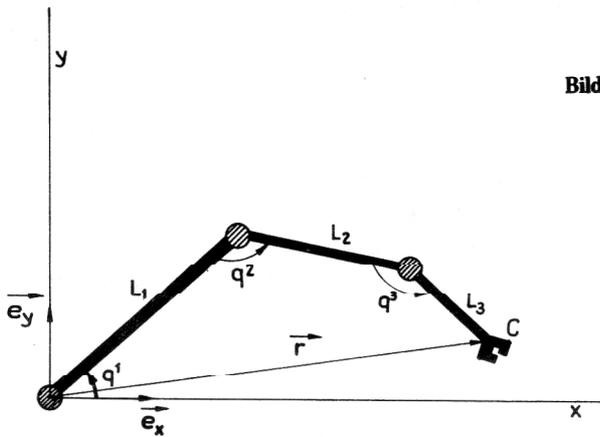


Bild 1

Die Jacobi-Matrix hat die Form:

$$J = \begin{pmatrix} [-L_1 \sin q^1 + L_2 \sin Q1 - L_3 \sin Q2] & L_2 \sin Q1 - L_3 \sin Q2 & -L_2 \sin Q2 \\ [L_1 \cos q^1 - L_2 \cos Q1 + L_3 \cos Q2] & -L_2 \cos Q1 + L_3 \cos Q2 & L_3 \cos Q2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

mit:  $q^1 + q^2 = Q1$  und  $q^1 + q^2 + q^3 = Q2$

Es sei gegeben:

$$L_1 = 0,5 \text{ m} \quad q_1^1(t_i) = 0,75 \text{ rad}$$

$$L_2 = 0,3 \text{ m} \quad q_1^2(t_i) = 2 \text{ rad}$$

$$L_3 = 0,1 \text{ m} \quad q_1^3(t_i) = 2 \text{ rad}$$

$$\Delta x = 0,005 \text{ m}$$

$$\Delta y = 0,005 \text{ m}$$

gesucht:

$$\Delta q^1(t_{i+1}), \Delta q^2(t_{i+1}), \Delta q^3(t_{i+1})$$

Jacobi-Matrix:

$$J = \begin{pmatrix} -0,12639 & 0,21443 & 0,09993 \\ 0,64689 & 0,28105 & 0,00376 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

1. Schritt

Die Berechnung von  $J_{q^1}^{-1}$ ,  $J_{q^2}^{-1}$ ,  $J_{q^3}^{-1}$

$$J_{q^1}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,21443 & 0,09993 \\ 0,28105 & 0,00376 \end{pmatrix} \quad J_{q^2}^{-1} = \begin{pmatrix} -0,13783 & 3,66325 \\ 10,30277 & -7,86061 \end{pmatrix}$$

$$J_{q^3}^{-1} = \begin{pmatrix} -0,12639 & 0,09993 \\ 0,64689 & 0,00576 \end{pmatrix} \quad J_{q^2}^{-1} = \begin{pmatrix} -0,05774 & 1,53458 \\ 9,93398 & 1,94091 \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

$$G_{q^1}, G_{q^2}, G_{q^3}$$

$$G_{q^1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,13783 & 3,66325 \\ 10,30277 & -7,86061 \end{pmatrix} \quad G_{q^2} = \begin{pmatrix} -0,05774 & 1,53458 \\ 0 & 0 \\ 9,93398 & 1,94091 \end{pmatrix}$$

$$G_{q^3} = \begin{pmatrix} -1,61306 & 1,23069 \\ 3,71276 & 0,7254 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Schritt:  $\Delta q_k$

$$\Delta q_1 = \begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_1^2 \\ q_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,017627 \\ 0,012211 \end{pmatrix} \quad \Delta q_2 = \begin{pmatrix} q_2^1 \\ q_2^2 \\ q_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,007384 \\ 0 \\ 0,059374 \end{pmatrix}$$

$$\Delta q_3 = \begin{pmatrix} q_3^1 \\ q_3^2 \\ q_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,001912 \\ 0,022191 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für  $k = 1, 2$  und  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$  erhält man nach (2.3)

$$a = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,003692 \\ 0,008813 \\ 0,035792 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

2.2. Die Anwendung der Pseudoinversen Matrix

Mit der Pseudoinversen Matrix  $J^+$  hat die Lösung der Umkehrfrage die Form [6], [8]

$$\Delta q = J^+ \cdot \Delta x + (I - J^+ J) y \quad (2.7)$$

$I$  – Einheitsmatrix,  $J^+$  – Pseudoinv. Matrix zu  $J$ ,  
 $y$  – beliebiger Vektor, ( $\dim y = \dim \Delta q$ )

Für die Berechnung von  $\Delta q$  nach (2.7) muß  $J^+$  bekannt sein. Auf Grund des in der Formel willkürlich zu wählenden Vektors  $y$  kann  $\Delta q$  nicht eindeutig berechnet werden. Um eine bestimmte (ausgezeichnete) Lösung zu finden, werden alle gefundenen Lösungsvektoren  $\Delta q$  auf die Erfüllung eines Kriteriums hin untersucht.

2.2.1. Die Methoden von Konstantinov [8]

In [8] wird gezeigt, daß mögliche Lösungen der Umkehrfrage die Beschränkungen

$$\Delta q_{\min} \leq \Delta q \leq \Delta q_{\max}$$

$$\Delta q_{\min} := q_{\min} - q(t_i), \Delta q_{\max} = q_{\max} - q(t_i),$$

$q(t_i)$  – Momentanwert

erfüllen müssen.  $q_{\min}$  und  $q_{\max}$  sind Werte, die von der Roboterstruktur abhängen (Minimum und Maximum der Roboterkoordinaten). Nach Konstantinov soll die ausgezeichnete Lösung  $\Delta q$  das Kriterium

$$\| \Delta \tilde{q} - Q \Delta q \| \rightarrow \text{Min} \quad (2.8)$$

$$\Delta \tilde{q} := \frac{\Delta q_{\max} + \Delta q_{\min}}{2}, Q := \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

erfüllen. Die Matrix  $Q$  heißt Wichtungsmatrix und gestattet die Roboterkoordinaten hinsichtlich ihrer Änderungen unterschiedlich zu bewerten. In [5] wird gezeigt, daß diese nach (2.8) bestimmte ausgezeichnete Lösung  $\Delta q$  die kleinstmögliche Norm

$$\| \Delta q \|^2 = \sum_{i=1}^m (\Delta q^i)^2$$

besitzt. Die Anwendung des Kriteriums (2.8) sichert die Erfüllung der Positionieraufgabe mit minimalem Energieaufwand. Aus (2.7) und (2.8) folgt

$$\begin{aligned} \min_{\Delta q} \| \Delta \tilde{q} - Q \Delta q \| &= \min_y \| \Delta \tilde{q} - Q [J^+ \Delta x + (I - J^+ J) y] \| \\ &= \min_y \| \Delta \tilde{q} - Q \cdot J^+ \Delta x - Q(I - J^+ J) y \| \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Substitution: } \Delta \tilde{q} - Q \cdot J^+ \Delta x &= \Delta \bar{q} \\ Q(I - J^+ J) &= \bar{Q} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\min_{\Delta q} \| \Delta \tilde{q} - Q \Delta q \| = \min_y \| \Delta \bar{q} - \bar{Q} y \| \quad (2.10)$$

Das Funktional (2.10) wird minimiert durch den Wert [5]

$$y_0 = \bar{Q}^+ \cdot \Delta \bar{q} + (I - \bar{Q}^+ \bar{Q}) v \quad (2.11)$$

$v$  – beliebiger Vektor

Aus (2.7) (2.11) erhält man

$$\Delta q = J^+ \Delta x + (I - J^+ J) [\bar{Q}^+ \Delta \bar{q} + (I - \bar{Q}^+ \bar{Q}) v]$$

und da  $(I - J^+ J)$  eine Projektionsmatrix ist<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \Delta q &= J^+ \Delta x + Q \\ \Delta q &= J^+ \Delta x + \bar{Q}^+ \Delta \bar{q} + (I - \bar{Q}^+ \bar{Q}) v \end{aligned} \quad (2.12)$$

1) Projektionsmatrix  $P$ :  $P \cdot X = X, P^+ = P$

**Sonderfälle:**

$$1. v = 0, Q = I$$

$$\Delta q = J^+ \Delta x + (I - J^+ J) (\Delta \tilde{q} - J^+ \Delta x) \quad (2.13)$$

da  $(I - J^+ J)$  eine Projektionsmatrix ist<sup>1)</sup>

$$2. v = 0, Q \neq I$$

$$\Delta q = J^+ \Delta x + [Q(I - J^+ J)]^+ (\Delta \tilde{q} - Q J^+ \Delta x) \quad (2.14)$$

$$3. v \neq 0$$

Um auch für diesen Fall mit beliebigen  $v$ -Vektor eine ausgezeichnete Lösung zu finden, benötigt man noch weitere Kriterien. [8]

### 2.2.2. Die Methode von Coiffet [4]

In [4] wird von Coiffet folgendes Kriterium betrachtet, um eine definierte Lösung der Umkehraufgabe zu bestimmen:

$$\Phi(q) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{q_i - q_{i \text{ Mittelwert}}}{q_{i \text{ max}} - q_{i \text{ Mittelwert}}} \right)^2 \rightarrow \text{Min}$$

Damit ergibt sich als Lösung von (1.3)

$$\Delta q = J^+ \Delta x + (I - J^+ J) \cdot \text{grad } \Phi(q) \quad (2.15)$$

## 3. Berechnungsmethoden von Pseudoinversen Matrizen

Die in den vorangegangenen Abschnitten formulierten Lösungsvorschriften (2.12) und (2.15) setzen zu ihrer Anwendung die Kenntnis der Pseudoinversen Matrix  $J^+$  voraus. Im folgenden sollen deshalb einige Methoden zur Berechnung von Pseudoinversen vorgestellt werden. Zwei Ziele stehen dabei im Vordergrund:

- Schnelle Berechnung von  $J^+$  mit „rechnerfreundlichen“ Operationen
- Eignung der Berechnungsmethode für viele Matrizentypen

### 3.1. Einfache Berechnung

Gegeben sei eine Matrix  $H$  der Dimension  $n \times m$ .

$$a) H^+ = H^{-1}, \quad (3.1)$$

falls  $H$  eine quadratische, nichtsinguläre Matrix ist.

$$b) H^+ = H^T (HH^T)^{-1}, \quad (3.2)$$

falls  $n$  Zeilen linear unabhängig sind, d. h.  $\det(HH^T) \neq 0$

$$c) H^+ = (H^T H)^{-1} H^T, \quad (3.3)$$

falls  $m$  Spalten linear unabhängig sind, d. h.  $\det(H^T H) \neq 0$

### Beispiel:

Für die im Bild 1 gezeigte Struktur und den im Abschnitt 2.1. gegebenen Werten soll die Umkehrtaufgabe mit (2.13) und (3.2) gelöst werden. Dazu wurde ein PL-1 Programm entwickelt, daß nach Eingabe der JACOBI-Matrix den Lösungsvektor  $\Delta q$  berechnet.

#### JACOBI - MATRIX

$$\begin{aligned} J(1,1) &= -L_1 \cdot \sin(Q_1) + L_2 \cdot \sin(Q_1) - L_3 \cdot \sin(Q_2) \\ J(1,2) &= L_2 \cdot \sin(Q_1) - L_3 \cdot \sin(Q_2) \\ J(1,3) &= -L_3 \cdot \sin(Q_2) \\ J(2,1) &= L_1 \cdot \cos(Q_1) - L_2 \cdot \cos(Q_1) + L_3 \cdot \cos(Q_2) \\ J(2,2) &= -L_2 \cdot \cos(Q_1) + L_3 \cdot \cos(Q_2) \\ J(2,3) &= L_3 \cdot \cos(Q_2) \end{aligned}$$

#### PSEUDOINVERSE MATRIX

$$\begin{array}{cc} -1,392484 & 1,241230 \\ 3,186234 & 0,700230 \\ 1,408846 & 0,067374 \end{array}$$

#### DELTA VEKTOR

$$\begin{array}{l} -0,000756 \\ +0,019432 \\ +0,007381 \end{array}$$

Eine Abschätzung der Genauigkeit der gefundenen Lösung ist durch das Einsetzen der  $(q(t) + \Delta q)$  in die „Direkte Aufgabe“ möglich.

Folgende Fehler (absolut) wurden ermittelt

$$\delta x = +4,5 \cdot 10^{-5}, \quad \delta y = 5,5 \cdot 10^{-5}$$

Die Bedingung für die lineare Unabhängigkeit der Zeilen oder Spalten ist nicht immer erfüllt. Für diese Fälle sollen zur Berechnung von  $H^+$  weitere Methoden vorgestellt werden.

### 3.2. Die Methode der Matrixzerlegung

Es ist möglich, eine Matrix in das Produkt zweier Matrizen mit jeweils linear unabhängigen Zeilen und Spalten zu zerlegen [5].

$$H = C \cdot B \quad (3.4)$$

C - Matrix mit lin. unabh. Spalten, B - Matrix mit lin. unabh. Zeilen

Es gilt

$$H^+ = B^+ \cdot C^+ \quad (3.5)$$

mit  $B^+$  nach (3.2) und  $C^+$  nach (3.3).

Beispiel:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \det HH^T = \det H^T H = 0 \quad (3.6)$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$C^+$  nach (3.3)

$B^+$  nach (3.2)

$$C^+ = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \quad B^+ = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$H^+ = B^+ C^+ = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 4 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

### 3.3. Die Gramm-Schmidt-Methode [5]

Es sei H eine Matrix mit der Dimension  $n \times m$ , für den Rang k gelte:  $k = \min(n, m)$ . Diese Matrix kann in der Form geschrieben werden

$$H \cdot P = (R \mid S) \quad (3.8)$$

wobei P eine permutierte Matrix ist (eine aus Nullen und Einsen bestehende Matrix derart, daß jede Zeile und Spalte genau eine Eins beinhaltet).

R : eine Matrix  $n \times k$ , mit linear unabhängigen Spalten  
S : eine Matrix, deren Spalten die Linearkombinationen der Spalten der Matrix R sind.

Für eine beliebige Matrix U kann man schreiben

$$S = R \cdot U \quad (3.9)$$

Daraus resultiert für die Pseudoinverse Matrix die Form [5]:

$$H^+ = P(I \mid U)^T (I + UU^T)^{-1} R^+ \quad (3.10)$$

Diese Gleichung ist der Ausgangspunkt für das Rechenverfahren, das auf der Methode von Gramm-Schmidt basiert. Die Methode von Gramm-Schmidt wird für die Berechnung von P,  $R^+$ , U und  $(I + UU^T)^{-1}$  verwendet. Für Beispiel (3.6) wurde  $H^+$  mit der Gramm-Schmidt-Methode berechnet (Ergebnis vgl. 3.7).

Es gibt noch weitere Methoden zur Berechnung der Pseudoinversen Matrix. So wird in [5] auf die Eliminationsmethode von Gauß, Jordan, die Methode der Gradientenprojektion und die Methode von Cayley-Hamilton verwiesen.

## 4. Zusammenfassung

In der Arbeit wurden Lösungsmöglichkeiten für die Umkehrtaufgabe bei Industrierobotern mit kinematischer Redundanz vorgestellt. Schwerpunkt der Ausführungen sollte die Erläuterung der praktischen Anwendbarkeit

der Methoden und weniger ihre aufgründigen theoretischen Erläuterung sein. Dazu wurde auf ausführlicher Darstellungen in entsprechenden Arbeiten hingewiesen.

Die Mehrzahl der genannten Methoden wurden auf dem Rechner ES 1040 getestet. Die Einbeziehung weiterer Programmsysteme (z. B. formal-analyt. Berechnung der JACOBI-Matrix mit dem System JACOMA [2]) ist vorgesehen.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Schmieder, I.: Problem der Koordinatentransformation bei rechnergesteuerten Manipulatoren. ZAMM 60, 1980, S. 48 – 50.
- [ 2 ] Denk, W., Maißer, P., Rothe, H.: Bahnsteuerung von Manipulatoren. Technische Mechanik 2 (1981), S. 1 – 16.
- [ 3 ] Tuan, P. A.: Großer Beleg, TH Ilmenau 1983.
- [ 4 ] Coiffet, Philippe: Modelling and Control-Robot-Technology. Vol. 1, Kogan Page, London, 1982.
- [ 5 ] Albert, A.: Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse, Acad. Press, New York-London, 1972.

- [ 6 ] Penrose, R.: A generalized inverse for matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc., 51 (1955), 406 – 413.
- [ 7 ] Penrose, R.: On best approximate solution of linear matrix equations. Proc. Cambridge Philos. Soc., 52 (1956), 17 – 19.
- [ 8 ] Konstantinov, M. S. et al.: Kinematic control of redundant Manipulators. 11. ISIR, Tokyo 1981, pp. 561 – 568.
- [ 9 ] Gorla, B.: Influence of the control on the structure of a manipulator from a kinematic point of view. Preprints RoManSy, Warszawa, 1981 pp. 56 – 66.
- [ 10 ] Fournier, A.; Khalil, W.: Coordination and Reconfiguration of Mechanical Redundant Systems. Proc. Int. Conf. Cybern. Soc., pp 227 – 231, Washington D. C., 1977.

#### Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. Pham Anh Tuan  
Dr. Ing. K. Zimmermann  
TH Ilmenau, Sektion Gerätetechnik  
63 Ilmenau  
PSF 327