TECHNISCHE MECHANIK 5 (1984) Heft 1
Manuskripteingang: 23. 2. 1983

Methode der statistischen Elemente für die Berechnung der effektiven mechanischen Eigenschaften von Polymerverbunden mit Kurzfaserverstärkung

I. K. Archipow, O. W. Herrlein

Die theoretische Modellierung von Realstrukturen mit statistischen Strukturschwankungen ist von großer Bedeutung für die Untersuchung von Polymerverbunden. Das Anliegen einer solchen Theorie besteht in der qualitativen Ermittlung bestimmter Kenngrößen und charakteristischer Zusammenhänge zwischen einzelnen strukturellen und makroskopischen Kenngrößen von Polymerverbunden.

Wir betrachten ein Element, das aus zwei Reihen gleichlaufender Kurzfasern getrennt durch die Matrix besteht (Bild 1). In jeder Schicht werden die Faserlängen und die Abstände zwischen den Fasern mit einer bestimmten Dichte verteilt. Man nimmt auch die Verteilung eines Abstandes zwischen einzelnen Fasern an. In jedem Element bestimmen wir den Abstand D zwischen den Fasern als Mittelwert der Verteilung.

Nach der Terminologie der Erneuerungstheorie [3] bildet der E-Modul in jedem Element einen sogenannten alternierenden Prozeß.

Die notwendigen bedingten Wahrscheinlichkeiten und Korrelationsfunktionen dieses Prozesses sind im Artikel [4] enthalten. Man kann die Gleichgewichtsbedingungen für jedes Element in der Form [5] bezüglich der Verschiebungen u_i schreiben:

$$\frac{d}{dx}\left(E_i \frac{du_i}{dx}\right) - g_1 (u_3 - u_1) = 0; \quad i = 1,2$$

$$E_3 \frac{d^2 u_3}{dx^2} - g_2 (2u_3 - u_1 - u_2) = 0 \tag{1}$$

wobei

$$g_1 = \frac{2\mu}{hd}; \quad g_2 \frac{\mu}{hD}; \quad \frac{\mu}{h} = \frac{2}{d} \cdot \frac{\mu_1 \mu_3}{c_1 \mu_3 + c_2 \mu_1};$$

μ_1, μ_3 – die Schubmoduli der Faser und der Matrix bzw.
$E_1(x)$ – E-Modul des ersten Elementes,
c_K – lineare Anteile der Komponenten (k = 1,2)

längs der x-Achse sind.

Stellen wir die Verschiebungen u_i und die E-Moduli in der Gestalt von Summen regulärer und zufälliger Werte dar

$$U_i = \langle U_i \rangle + U_i^o; \quad E_1 = \langle E_1 \rangle + E_1^o \tag{2}$$

so erhalten wir für den Mittelwert $\langle U_i \rangle$ folgende Randbedingungen:

$$\langle \sigma_x \rangle_{x=\pm\infty} = \langle \sigma \rangle \tag{3}$$

$$\langle U_1 \rangle = \langle U_2 \rangle = \langle U_3 \rangle \tag{4}$$

Weiter erhalten wir für die Schwankungen U_i aus (2) das Differentialgleichungssystem:

$$\langle E_1 \rangle \cdot \frac{d^2 U_i^o}{dx^2} - g_1 (U_3^o - U_i^o) = \frac{d}{dx}\left(E_i^o \frac{dU_i}{dx}\right); \quad i = 1,2$$

$$E_3 \frac{d^2 U_3^o}{dx^2} - g_2 (2U_3^o - U_1^o - U_2^o) = 0 \tag{5}$$

Die Partikulärlösungen dieses Systems angepaßt an die Randbedingungen:

$$\sigma_x \big|_{x=\pm\infty} = 0; \tag{6}$$

schreiben wir mit Hilfe der Greenschen Funktionen $G_{ij}(x-y)$ in der Form:

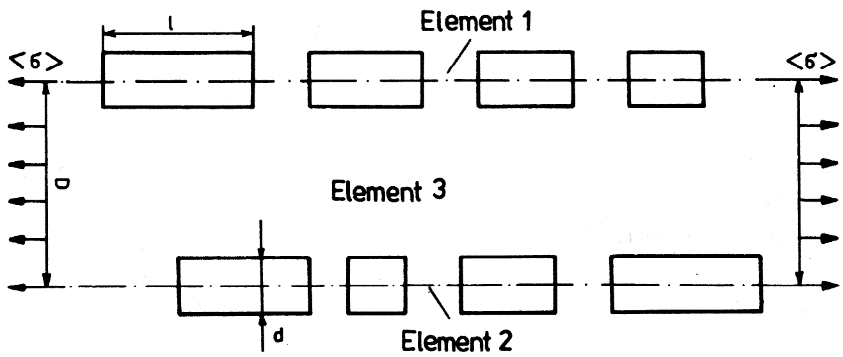

Bild 1

$$U_i^o(x) = -\sum_{j=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(x-y) \frac{d}{dy} [E_j^o \frac{dU_j(y)}{dy}] \, dy, \quad i=1,2,3 \tag{7}$$

Nach der Differenzierung bezüglich x erhalten wir aus (7) die Beziehungen der Verformungsschwankungen:

$$\epsilon_i^o(x) = -\sum_{j=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G_{ij(x-y)}}{\partial x} \frac{d}{dy} [E_j^o \epsilon_j(y)] \, dy \tag{8}$$

Wenn wir mit Rücksicht auf die Eigenschaften der für $y = \neq$, verschwindenden Greenschen Funktionen partiell integrieren, so erhalten wir:

$$\epsilon_i^o(x) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial G_{ij}(x-y)}{\partial x \, \partial y} [E_j^o \epsilon_j(y)] \, dy \tag{9}$$

Um die Methode der bedingten Momente [1], [2] für Gleichungen (9) anzuwenden, berechnen wir die Mittelwerte der Verteilungen mit bedingter Dichte f_1 ($E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $\epsilon_i^{(1)}$, $\epsilon_j^{(2)}$, $E_\nu^{(1)}$) der rechten und linken Teile (9). Im Ergebnis erhalten wir das System von Integralgleichungen bezüglich der bedingten Mittelwerte der Verformungen jedes Elementes $\epsilon_i^{s\nu}$:

$$\sum_{s=1}^{2} P_{\nu s}(x) \epsilon_i^{s\nu}(x) = \langle\epsilon_i\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial x \, \partial y} \sum_{s=1}^{2} (E_s - E) P_{\nu s}(y) \epsilon_j^{s\nu}(y) \, dy \tag{10}$$

wobei ν, j = 1,2 $\quad E \frac{E_1 E_3}{c_1 E_3 + c_2 E_1}$.

Hier ist $P_{\nu s}(x_2 - x_1)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\nu s}(x_2 - x_1)$ dafür, daß im Punkt x_2 die Komponente s sich befindet und im Punkt x_1 die Komponente ν.
$\epsilon^{s\nu}$ ist der Mittelwert der Verformungen ϵ_i im Punkt x_2 unter der Bedingung, daß sich im Punkt x_1 die Komponente s und im Punkt x_2 die Komponente ν befindet.

Man kann auch zeigen, daß die bedingten Momente $\epsilon_i^{s\nu}$ die folgenden Beziehungen erfüllen:

$$\langle\epsilon_i^\nu\rangle = \sum_{s=1}^{2} P_{\nu s}(x) \epsilon_i^{\nu s}(x), \quad \nu = 1,2 \tag{11}$$

wobei $\langle\epsilon_i^\nu\rangle$ Mittelwerte der Verformungen der Komponente ν im Element i sind.
Benutzen wir die offensichtlichen Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_{\nu s}$:

$$P_{11} + P_{12} = P_{22} + P_{21} = 1; \quad C_1 P_{12} = C_2 P_{11};$$

$$P_{11}(0) = P_{22}(0) = 1; \quad P_{12}(0) = P_{21}(0) = 0; \tag{12}$$

so kann man mit Rücksicht auf (11) die Gleichungen für die Bestimmung der mittleren Faser- und Matrixverformungen in den Elementen bekommen:

$$\langle\epsilon_i^1\rangle = \langle\epsilon_i\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \frac{\partial^2 G_{i1}}{\partial x \, \partial y} P_{11}(y) [(E_1 - E)\langle\epsilon_1^1\rangle - (E_2 - E)\langle\epsilon_1^2\rangle]$$

$$\frac{\partial^2 G_{i2}}{\partial x \, \partial y} P_{11}(y) [(E_1 - E)\langle\epsilon_2^1\rangle - (E_2 - E)\langle\epsilon_2^2\rangle] \Big\} dy, \quad i = 1,2,3 \tag{13}$$

Aus der Abhängigkeit (4) folgt

$$\langle\epsilon_1\rangle = \langle\epsilon_2\rangle = \langle\epsilon\rangle \tag{14}$$

wobei $\langle\epsilon\rangle$ der gesamte Mittelwert der Verformung ist.
Die Lösungen des Systems (13) sind:

$$\langle\epsilon_1^1\rangle = [(\gamma_{11} - \gamma_{12}) B + (\gamma_{22} - \gamma_{12}) A] \Delta^{-1} \langle\epsilon\rangle$$

$$\langle\epsilon_2^1\rangle = [(\gamma_{11} - \gamma_{12}) A + (\gamma_{22} - \gamma_{12}) A_1] \Delta^{-1} \langle\epsilon\rangle \tag{15}$$

$$\langle\epsilon_3\rangle = \langle\epsilon\rangle$$

wobei $\gamma_{11} = C_2 - \beta_{11}$; $\gamma_{12} = C_2 - \beta_{22}$; $\gamma_{12} = \beta_{12}$;

$$A = C_1 \beta_{12} + C_2 \alpha_{12}; \quad B = C_2(1 - \alpha_{22}) - C_1 \beta_{22};$$

$$A_1 = C_2(1 - \alpha_{11}) - C_1 \beta_{11}; \quad \Delta = A_1 B - A^2;$$

$$\alpha_{ij} = (E_1 - E) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial x \, \partial y} P_{11}(y) \, dy; \tag{16}$$

$$\beta_{ij} = \frac{E_2 - E}{E_1 - E} \alpha_{ij}$$

Mit Rücksicht auf eine Exponentialverteilung der Faserlänge und der Abstände zwischen den Fasern bekommen wir die Wahrscheinlichkeit $P_{11}(y)$ in der Form [1]:

$$P_{11}(y) = c_1 + c_2 \exp\left(\frac{-/y/}{c_2 \langle L\rangle} \right) \tag{17}$$

wobei $\langle L\rangle$ die mittlere Faserlänge ist.
Für die Berechnung der Faktoren α_{ij}, β_{ij} müssen die Greenschen Funktionen $G_{ij}(x-y)$ und ihre Ableitungen bekannt sein. Diese Funktionen werden wir als partikuläre Lösungen des Systems (5) suchen. Dabei stehen in den rechten Teilen der Gleichungen (5) δ-Funktionen im Punkt x = y. Die Bestimmung der partikulären Lösungen (5) kann man zweckmäßig mit Hilfe der Fouriertransformationen der Gleichungen (5) durchführen. Im Transformationenraum (k) haben wir folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \langle E_1\rangle k^2 G_{ij}^F + g_1 (G_{3j}^F - G_{ij}^F) = -\delta_{ij} e^{-ky}; \quad i, y = 1,2 \\ E_3 \cdot K^2 G_{3j}^F + g_2 (2G_{3j}^F - G_{ij}^F - G_{2j}^F) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

wobei

$$G_{ij}^F = \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(x-y) e^{-ikx} \, dx \text{ ist.}$$

δ_{ij} stellt das Kronnecker-Symbol dar.

Das Gleichungssystem (18) bezüglich G_{ij}^F hat folgende Lösungen:

$$G_{ij}^F = \frac{e^{-ky}}{k^2 \langle E_1\rangle} (k^2 + 2\beta - \alpha)^{-1} A_{ij}; \tag{19}$$

wobei

$$\Lambda_{11} = k^2 + 2\beta - \alpha - \frac{3\alpha}{2\beta}(\alpha + \beta);$$

$$\Lambda_{22} = -\frac{\alpha}{2\beta}(\beta + 2\alpha);$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = -\frac{\alpha}{2};$$

$$\Lambda_{31} = \Lambda_{32} = -1;$$

$$\alpha = \frac{g_1}{\langle E_1 \rangle}; \quad \beta = \frac{g_2}{E_3} \tag{20}$$

sind.

Dabei wurde die Randbedingung $G_{ij}(\pm\infty) = 0$ verwendet. Nach den inversen Transformationen (19) – (20), nach der Ableitung und Berechnung der Integrale (16) ergeben sich:

$$\alpha_{11} = \frac{E_1 - E}{\langle E_1 \rangle}\left[1 - \frac{3\alpha}{2\beta}(\alpha + \beta)\delta\right];$$

$$\alpha_{22} = -\frac{E_1 - E}{\langle E_1 \rangle} \cdot \frac{\alpha}{2\beta}(\beta + 2\alpha)\delta;$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{E_1 - E}{E_1} \frac{\alpha}{2}\delta; \quad \beta_{ij} = \frac{E_2 - E}{E_1 - E}\alpha_{ij};$$

$$\delta = \frac{c_1}{2\beta - \alpha} + \frac{c_2^2 \langle L \rangle}{\sqrt{2\beta - \alpha}\,(C_2 \langle L \rangle \sqrt{2\beta - \alpha} + 1)} \tag{21}$$

Der Mittelwert der Spannung durch den Querschnitt des Elements ergibt sich aus dem mittleren Hookeschen Gesetz:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{C_1^F}{2}\left[E_3 \langle \epsilon \rangle + c_1 (E_1 - E_3) \langle \epsilon_1^1 \rangle\right] + \frac{C_1^F}{2}\left[E_3 \langle \epsilon \rangle + c_1 (E_1 - E_3) \langle \epsilon_2^1 \rangle\right] + C_2^F E_3 \langle \epsilon_3 \rangle \tag{22}$$

wobei C_i^F die Flächenanteile der Faser und Matrix im Querschnitt senkrecht zu der Faserrichtung sind.

Nach einigen Transformationen mit Hilfe von Gl. (15) finden wir den effektiven E-Modul der Komposition in der Form:

$$E^* = C_1^F\left[E_3 + \frac{c_1}{2}(E_1 - E_3)\,\phi(\beta_{ij})\right] + C_2^F E_3; \tag{23}$$

wobei

$$\phi(\beta_{ij}) = (2C_1\phi_1 - C_2\phi_2 - C_1C_2\phi_3)\Delta^{-1}; \tag{24}$$

$$\phi_1 = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12};$$

$$\phi_2 = \beta_{11} + \beta_{22} + 2(C_2 + \beta_{12})[1 - \lambda(\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{12})] - 2\lambda\beta_{11}\beta_{22}$$

$$\phi_3 = \beta_{11} + \beta_{22} - 2\beta_{12}$$

$$\Delta = C_2^2 + C_1^2\phi_1 - C_2(c_1 + c_2\lambda)[\phi_3 + 2(\phi_1 + 2\beta_{12}^2 + \beta_{12})]$$

$$\lambda = \frac{E_1 - E}{E_2 - E}$$

sind.

Die Werte β_{ij} folgen aus (21).

Für die Komposition mit unendlichen Fasern folgt aus der Formel (23) bei $c_2 = 0$; $C_1^F = C_1^V$; $C_2^F = C_2^V$;

$$E^*_\infty = C_1^v E_1 + C_2^v E_2; \tag{25}$$

d. h. hier wirkt die übliche Mischungsregel.

In der Gl. (25) sind C_i^v die Volumenanteile der Komponenten. Für GFP mit orientierten Kurzfasern wurde eine Berechnung des effektiven E-Moduls in Abhängigkeit von den Volumenanteilen C_i und der Dimension $n = \frac{1}{d}$ durchgeführt. Für die Moduli der Komponenten werden folgende Werte angenommen [1]:

$$E_1 = 0{,}981 \cdot 7 \cdot 10^4 \frac{MN}{M^2}; \quad E_2 = 0{,}981 \cdot 0{,}315 \cdot 10^4 \frac{MN}{M^2}$$

Dabei betrachten wir zwei Schwerpunkte:

1. Kurzfasern werden in der Matrix längs getrennt.
2. Fasern haben eine große Zahl von Rißstellen.

Zersprengte Strecken l werden nach dem folgenden Gesetz verteilt:

$$P(l)\,\frac{1}{\langle l \rangle}\quad \exp\left(\frac{/x/}{c_2\langle l \rangle}\right), \tag{26}$$

wobei c_2 der lineare Porenanteil ist. Die Poren entstehen bei dem Faserbruch. In der Berechnung wurde $c_2 = 0{,}01$ angenommen. Die Ergebnisse der Berechnung aus (23) – (24) werden im Bild 2 gezeigt. Zum Vergleich werden die Werte E gezeigt, die nach der Methode der bedingten Momente [1], [2] berechnet werden.

Zusammenfassend bemerken wir, daß die Methode der statistischen Elemente auf elastisch-plastische Verfor-

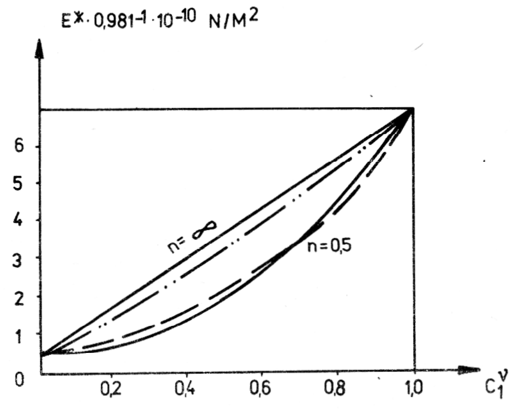

Bild 2

——— nach den Formeln (23), (24)
– – – – nach [1], [2]
–··–··– Fasern sind zerrissen

mungen der Komposition angewandt werden kann. Außerdem kann man mit Hilfe dieser Methode den Einfluß unvollkommener Bindung zwischen den Komponenten auf die mechanischen Eigenschaften ermitteln.

LITERATUR

[1] Horoschun, L. P.: Metody teorii slucajnych funkcij w zadacach o makroskopiceskich swojtwach mikroneodnoroddnych sred. Prikladnaja mechanika, 14, 2, 1978, 3/17.

[2] Horoschun, L. P.: Ugrugie swostwa materialow, armirowannych odnonaprawlennymi korotkimi woloknami. Prikladnaja mechanika, 8, 12, 1972, 86/93.

[3] Koks, D.; Smith, W.: Teorija wosstanowlenija. Sowetskoje radio. 1968, 212.

[4] Archipow, I. K.; Herlein, O. W.: Opredelenije statisticeskich charakteristik uprogosti komposicionnych materialow. Raboty po mechanike deformiruemogo twerdogo tela, Tula, 1981, 124/130.

[5] Lawendel, E. E.; Kalinka, I. A.: Wsaimodejstwije polymernoj matricy c armirujuschimi korotkimi woloknami. Mechanika polymerow. 1971, 6, 1030/1035.

Anschrift der Verfasser:

Doz. Dr. I. K. Archipow,
Doz. O. W. Herrlein
Polytechnische Hochschule
Tula, UdSSR