

# Einige ergänzende Bemerkungen zur klassischen, pulsierenden laminaren Rohrströmung

D. Büttner, H.K. Ihen

## 1. Einleitung

Die ersten theoretischen Untersuchungen zur pulsierenden und oszillierenden Rohrströmung auf der Basis einer absolut konstanten Fluidichte  $\rho_0$  newtonscher Fluide stammen von Sexl [12] und Uchida [13].

Es folgten die Arbeiten von Gerbes [5], Pechau [10], Lutz [8], Emsmann [4] und Kirmse [7]. Die beiden zuletzt genannten Autoren führten umfangreiche und genaue Messungen an pulsierenden und oszillierenden Rohrströmungen mit modernen strömungstechnischen Meßmethoden durch.

Durch die Modellannahme  $\rho = \text{const}$  breiten sich die von den zeitabhängigen Randbedingungen an den Rohren ausgehenden Störungen mit unendlich großer Geschwindigkeit im Fluid aus. Der praktisch zu beobachtende Wellenvorgang geht also verloren. Ein echtes Anfangs-Randwertproblem kann nicht gestellt werden. Daraus folgt für die praktische Anwendung, daß diese Betrachtungsweise nur auf solche instationären Rohrströmungen angewendet werden darf, deren Dichte- und Schallgeschwindigkeitsänderungen hinreichend klein sind

und bei denen die Frequenz  $f_R = \frac{c_0}{2L}$ , mit der die Störungen in dem Rohr der Länge  $L$  hin- und hereilen, groß ist gegenüber der Frequenz  $f$ , mit der der Druck infolge zeitabhängiger Randbedingungen schwankt. Dieses klassische Berechnungsmodell beschreibt zudem nur den eingeschwungenen Zustand in Rohrmitte zwischen den Rohrrändern.

In der genannten Literatur gibt man ausnahmslos den Druckgradienten als zeitveränderliche Funktion vor. Die Praxis kennt jedoch auch Aufgaben, bei denen ein zeitveränderlicher Volumenstrom die Randbedingung der pulsierenden Strömung bildet.

Diese Aufgabenstellung soll im folgenden behandelt werden.

## 2. Analytische und numerische Lösung

Gesucht ist eine beschränkte Lösung der Differentialgleichung (Dgl.) der klassischen pulsierenden Rohrströmung newtonscher Fluide

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (1)$$

in dem Gebiet  $g(r, t) : [0, R] \times [0, \infty)$ , die für beliebiges  $z$  der Haftbedingung

$$v(R, t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (2)$$

und der als Randbedingung vorgegebenen mittleren Geschwindigkeit

$$v_m(t) = \frac{\Delta p_0}{8\eta L} R^2 + v_m^*(t) \quad \forall t \in [0, \infty) \text{ und } \Delta p_0 \geq 0 \quad (3)$$

genügt. Die praktisch auftretende maximale Dichte- und Schallgeschwindigkeitsänderung und die Frequenz  $f$ , mit der sich die Randbedingung zeitlich ändert, sind den Bedingungen

$$\max_{t \in [0, \infty)} \left| \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right| \ll 1$$

$$\max_{t \in [0, \infty)} \left| \frac{\Delta c}{c_0} \right| \ll 1$$

und

$$f < 5 \text{ Hz}$$

unterworfen.

In den Gleichungen (Gln.) (1) bis (3) sind  $v$  die örtliche Geschwindigkeit,  $t$  die Zeit,  $z$  die Koordinate in Achsrichtung des Rohres konstanten Querschnitts,  $r$  der veränderliche Rohrradius,  $R$  der Rohrrinnenradius,  $\nu$  die kinematische Zähigkeit,  $\eta$  die dynamische Zähigkeit,  $L$  die Rohrlänge,  $\Delta p_0$  das Druckgefälle einer stationären Grundströmung und  $v_m^*(t) \in C[0, \infty)$  ist die vorgegebene Schwankung der über dem Querschnitt gemittelten Geschwindigkeit mit der Periode  $T_1$ .

Zur Lösung der Dgl. (1) eignen sich die komplexen Separationsansätze für die Geschwindigkeit

$$v(r, t) = \frac{\Delta p_0}{4\eta L} (R^2 - r^2) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\bar{c}_n(r) - \bar{c}_n(R)) e^{i\omega n t} \quad (4)$$

und den Druckgradienten

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\Delta p_0}{L} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{K}_n e^{i\omega n t} \quad (5)$$

$\omega = 2\pi/T_1$  ist in obigen Gleichungen die Kreisfrequenz der Geschwindigkeitsschwankung. G. (4) erfüllt bereits die Haftbedingung (2). Die komplexen Koeffizienten

$$\bar{K}_n = K_n - iK_{in} \quad (6)$$

sind mit den Fourierkoeffizienten

$$\bar{c}_n = c_n + ic_{in} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} v_m^*(t) e^{-i\omega n t} dt, \quad (7)$$

der in eine Reihe zu entwickelnden Geschwindigkeitsschwankung

$$v_m^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n e^{i\omega n t}, \quad (8)$$

über die aus der mittleren Geschwindigkeitsschwankung

$$v_m(t) = \frac{\Delta p_0}{8\eta L} R^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega n t} \left[ \frac{2}{R^2} \int_0^R r \bar{f}_n(r) dr - \bar{f}_n(R) \right]$$

und der aus den Gln. (3), (8) und (9) folgenden Beziehung

$$\bar{c}_n = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \bar{f}_n(r) dr - \bar{f}_n(R), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

verknüpft. Die Ansätze (4) und (5) ergeben für  $\bar{f}_n(r)$  die inhomogene Besselsche Dgl.

$$\bar{f}_n'' + \frac{1}{r} \bar{f}_n' - \frac{i\omega n}{\nu} \bar{f}_n = \frac{\bar{K}_n}{\nu \rho_0} - \frac{i\omega n}{\nu} \bar{f}(R). \quad (11)$$

Diese Gleichung ist für die Fälle  $n \neq 0$  und  $n = 0$  zu lösen. Da  $v(r,t)$  für  $r = 0$  beschränkt bleiben muß, erhält man unter Beachtung der Randbedingungsgl. (2) als Lösung von Gl. (11)

$$\bar{f}_n(r) = \begin{cases} \bar{f}_n(R) + \frac{i\bar{K}_n}{\omega n \rho_0} \left[ 1 - \frac{J_0\left(r \sqrt{-\frac{i\omega n}{\nu}}\right)}{J_0\left(R \sqrt{-\frac{i\omega n}{\nu}}\right)} \right] & \text{für } n = 1, 2, \dots \\ \bar{f}_0(R) + \frac{\bar{K}_0}{4\nu \rho_0} (r^2 - R^2) & \text{für } n = 0 \\ \bar{f}_{-n}(R) - \frac{i\bar{K}_{-n}}{\omega n \rho_0} \left[ 1 - \frac{J_0\left(r \sqrt{\frac{i\omega n}{\nu}}\right)}{J_0\left(R \sqrt{\frac{i\omega n}{\nu}}\right)} \right] & \text{für } n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (12)$$

Gl. (12) wird nun in Gl. (4) eingesetzt. Die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung ist dann der Realteil von

$$v(r,t) = \frac{\Delta p_0}{4\eta L} (R^2 - r^2) + \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{K}_0}{4\nu \rho_0} (r^2 - R^2) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \neq 0 \frac{i\bar{K}_n e^{i\omega n t}}{\omega n \rho_0} \left[ 1 - \frac{J_0\left(r \sqrt{-\frac{i\omega n}{\nu}}\right)}{J_0\left(R \sqrt{-\frac{i\omega n}{\nu}}\right)} \right] \right\}. \quad (13)$$

Da man nach [1] die Besselfunktion mit komplexem Argument auf den Winkelhalbierenden durch die Kelvinfunktionen ersetzen kann

$$J_0\left(r e^{\frac{i3\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega n}{\nu}}\right) = \operatorname{ber}_0\left(r \sqrt{\frac{\omega n}{\nu}}\right) + i \operatorname{bei}_0\left(r \sqrt{\frac{\omega n}{\nu}}\right)$$

$$J_0\left(r e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{\omega n}{\nu}}\right) = \operatorname{ber}_0\left(r \sqrt{\frac{\omega n}{\nu}}\right) - i \operatorname{bei}_0\left(r \sqrt{\frac{\omega n}{\nu}}\right),$$

nimmt Gl. (13) die Gestalt an:

$$v(r,t) = \frac{\Delta p_0}{4\eta L} (R^2 - r^2) + \frac{K_0}{4\nu \rho_0} (r^2 - R^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega n \rho_0} \left\{ [(K_{in} - K_{-in}) \cos(\omega n t) - (K_n + K_{-n}) \sin(\omega n t)] \cdot \left[ 1 - \frac{\operatorname{ber}_0(x_n) \cdot \operatorname{ber}_0(\Omega_{sn}) + \operatorname{bei}_0(x_n) \cdot \operatorname{bei}_0(\Omega_{sn})}{\operatorname{ber}_0^2(\Omega_{sn}) + \operatorname{bei}_0^2(\Omega_{sn})} \right] + [(K_n + K_{-n}) \cos(\omega n t) + (K_{in} - K_{-in}) \sin(\omega n t)] \cdot \left[ \frac{\operatorname{bei}_0(x_n) \operatorname{ber}_0(\Omega_{sn}) - \operatorname{ber}_0(x_n) \operatorname{bei}_0(\Omega_{sn})}{\operatorname{ber}_0^2(\Omega_{sn}) + \operatorname{bei}_0^2(\Omega_{sn})} \right] \right\}, \quad (14)$$

mit den Abkürzungen

$$\Omega_{sn} = R \sqrt{\frac{\omega n}{\nu}} \quad \text{und} \quad x_n = r \sqrt{\frac{\omega n}{\nu}}. \quad (15)$$

Die über dem Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit ergibt sich zu:

$$v_m(t) = \left( \frac{\Delta p_0}{\eta L} - \frac{K_0}{\nu \rho_0} \right) \frac{R^2}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega n \rho_0} \left\{ [(K_{in} - K_{-in}) \cos(\omega n t) - (K_n + K_{-n}) \sin(\omega n t)] \left[ 1 - \frac{2 \cdot q_0(\Omega_{sn})}{\Omega_{sn} p_0(\Omega_{sn})} \right] - [(K_{in} - K_{-in}) \sin(\omega n t) + (K_n + K_{-n}) \cos(\omega n t)] \frac{2r_0(\Omega_{sn})}{\Omega_{sn} p_0(\Omega_{sn})} \right\} \quad (16)$$

In Gl. (16) sind:

$$p_0(\Omega_{sn}) = \operatorname{ber}_0^2(\Omega_{sn}) + \operatorname{bei}_0^2(\Omega_{sn}),$$

$$q_0(\Omega_{sn}) = \operatorname{bei}_0'(\Omega_{sn}) \cdot \operatorname{ber}_0(\Omega_{sn}) - \operatorname{ber}_0'(\Omega_{sn}) \operatorname{bei}_0(\Omega_{sn})$$

und

$$r_0(\Omega_{sn}) = \operatorname{ber}_0(\Omega_{sn}) \operatorname{ber}_0'(\Omega_{sn}) + \operatorname{bei}_0(\Omega_{sn}) \cdot \operatorname{bei}_0'(\Omega_{sn}). \quad (17)$$

Die mit Gl. (14) berechenbare Wandschubspannung

$$\tau_w = \left( \frac{\Delta p_0}{L} - K_0 \right) \frac{R}{2} + R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_{sn}} \left\{ [(K_{in} - K_{-in}) \cos(\omega n t) - (K_n + K_{-n}) \sin(\omega n t)] \frac{r_0(\Omega_{sn})}{p_0(\Omega_{sn})} - [(K_{in} - K_{-in}) \sin(\omega n t) + (K_n + K_{-n}) \cos(\omega n t)] \frac{q_0(\Omega_{sn})}{p_0(\Omega_{sn})} \right\}. \quad (18)$$

und die mittlere Geschwindigkeit, Gl. (16), gestatten die Angabe des örtlichen instationären Rohrreibungsbeiwertes

$$\lambda_{in} = \frac{8 |\tau_w|}{\rho_o v_m^2(t)} \quad (19)$$

und des über eine Periode gemittelten Rohrreibungsbeiwertes

$$\bar{\lambda}_{in} = \frac{8}{T_1 \rho_o} \int_0^{T_1} \frac{|\tau_w|}{v_m^2} dt. \quad (20)$$

Legt man für den Druck die Bedingung

$$p(0,t) = p_o$$

fest, dann folgt aus Gl. (5)

$$p(z,t) = p_o - \frac{\Delta p_o}{L} z + z \left\{ K_o + \sum_{n=1}^{\infty} [(K_n + K_{-n}) \cos(\omega n t) + (K_{in} - K_{-in}) \sin(\omega n t)] \right\}. \quad (21)$$

Die oben angegebenen Lösungen für die Geschwindigkeit, die Wandschubspannung und den Druck hängen von den Koeffizienten  $\bar{K}_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) ab, die ihrerseits durch die Fourierkoeffizienten  $\bar{c}_n$  der Randbedingung (8) eindeutig bestimmt sind.

Der Zusammenhang zwischen den  $\bar{K}_n$  und  $\bar{c}_n$  läßt sich anhand der Gln. (10) und (12) nach einigen Rechenschritten angeben:

$$K_o = - \frac{8 \nu \rho_o}{R^2} c_o,$$

$$K_{io} = \frac{8 \nu \rho_o}{R^2} c_{io},$$

$$K_n = \frac{1}{D} [A_n c_{in} - B_n c_n], \quad (22)$$

$$K_{in} = \frac{1}{D} [A_n c_n + B_n c_{in}],$$

$$K_{-n} = - \frac{1}{D} [A_n c_{-n} + B_n c_{-in}],$$

$$K_{-in} = - \frac{1}{D} [A_n c_{-n} - B_n c_{-in}], \quad n = 1, 2, \dots$$

Die Koeffizientendeterminante

$$D = A_n^2 + B_n^2$$

ist für  $n \neq 0$  stets größer Null, so daß der Zusammenhang (22) umkehrbar eindeutig ist. Als Abkürzungen wurden

$$A_n = \frac{1}{\omega n \rho_o} \left[ 1 - \frac{2}{\Omega_{sn}} \frac{q_o(\Omega_{sn})}{p_o(\Omega_{sn})} \right]$$

und

$$B_n = \frac{2}{\omega n \rho_o \Omega_{sn}} \frac{r_o(\Omega_{sn})}{p_o(\Omega_{sn})}$$

eingeführt.

Die vorgegebene Randwertaufgabe ist damit grundsätzlich gelöst. Die numerische Auswertung auf einer EDVA

erfordert jedoch eine eingehende Untersuchung des asymptotischen Lösungsverhaltens für Frequenzparameter  $\Omega_{sn} \geq 200$ .

Aus bekannten Reihenentwicklungen für das Quadrat des Moduls der Kelvinfunktionen und für ihre Summe und Differenz gemischter Produkte lassen sich mit großem Nutzen asymptotische Darstellungen der Lösungen angeben, die sich bereits für  $\Omega_{sn} > 10$  numerisch genauer und schneller berechnen lassen als direkt über die Kelvinfunktionen.

Mit den Entwicklungen nach [6]

$$\text{ber}_n(x) = \frac{e^{\alpha(x)}}{\sqrt{2\pi x}} \cos(\beta(x))$$

und

$$\text{bei}_n(x) = \frac{e^{\alpha(x)}}{\sqrt{2\pi x}} \sin(\beta(x)), \quad n = 0, 1, 2,$$

mit

$$\alpha(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8x\sqrt{2}} - \frac{25}{384x^3\sqrt{2}} - \dots$$

und

$$\beta(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8x\sqrt{2}} - \frac{1}{16x^2} - \dots$$

und den Beziehungen nach [1]

$$\text{ber}_o^2(x) + \text{bei}_o^2(x) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^{2K}}{(K!)^2 (2K)!} \approx \frac{e^{x\sqrt{2}}}{2\pi x} \gamma(x)$$

mit

$$\gamma(x) = 1 + \frac{1}{4x\sqrt{2}} + \frac{1}{64x^2} - \frac{33}{256x^3\sqrt{2}} - \dots,$$

$$\text{ber}_o(x) \text{ bei}'_o(x) - \text{bei}_o(x) \text{ ber}'_o(x) =$$

$$= \frac{x}{2} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^{2K}}{(K!)^2 (2K+1)!} \approx \frac{e^{x\sqrt{2}}}{2\pi x} \delta(x)$$

mit

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8x} + \frac{9}{64x^2\sqrt{2}} + \frac{39}{512x^3} + \dots$$

und

$$\text{ber}_o(x) \cdot \text{ber}'_o(x) + \text{bei}_o(x) \cdot \text{bei}'_o(x)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^{2K}}{(K!)^2 (2K-1)!} \approx \frac{e^{x\sqrt{2}}}{2\pi x} \vartheta(x)$$

mit

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8x} - \frac{15}{64x^2\sqrt{2}} - \frac{45}{512x^3} + \dots$$

lassen sich, ausgehend von den Gln. (14), (16) und (18), die gesuchten asymptotischen Lösungen angeben, die hier aber nicht näher aufgeführt werden sollen. Einzelheiten kann man [3] entnehmen.

Dem Rechenprogramm mit der Bezeichnung TIBENB liegt die Randbedingung

$$v_m^*(t) = \begin{cases} r_K \omega \left[ \sin \alpha + \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{15\lambda^2}{128} + \frac{\lambda^3}{8} \right) \sin(2\alpha) - \left( \frac{\lambda^3}{16} + \frac{3\lambda^5}{64} \right) \sin(4\alpha) + \frac{3\lambda^5}{256} \sin(6\alpha) \right] & \text{für } 0 \leq \alpha \leq \pi \\ r_K \omega \left[ \sin \alpha - \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{15\lambda^2}{128} + \frac{\lambda^3}{8} \right) \sin(2\alpha) + \left( \frac{\lambda^3}{16} + \frac{3\lambda^5}{64} \right) \sin(4\alpha) - \frac{3\lambda^5}{256} \sin(6\alpha) \right] & \text{für } \pi < \alpha \leq 2\pi \end{cases} \quad (23)$$

einer Kolbenpumpe,

mit  $\alpha = 2\pi \cdot t/T_1 = \omega t$ ,  $r_K$  dem Kurbelradius in [m] und  $\lambda = r_K/l$  dem Schubstangenverhältnis, zugrunde.

Die Fourierkoeffizienten  $\bar{c}_n$  der Geschwindigkeitsverteilung (23) kann man ebenfalls der Arbeit [3] entnehmen. Setzt man in Gl. (23)  $\lambda = 0$ , so ergibt sich eine rein harmonische Störfunktion, die im Zusammenhang mit Gl. (3) auch die harmonisch pulsierende oder die oszillierende Rohrströmung beschreibt.

Das Rechenprogramm ist infolge dieser und anderer wählbarer Parameter für eine ganze Reihe von praktischen Anwendungsfällen der klassischen, pulsierenden Rohrströmung geeignet. Es liegt in Fortran programmiert vor. Schließlich sei noch erwähnt, daß die Kelvinfunktionen  $ber_n(\ )$ ,  $bei_n(\ )$ ,  $ker_n(\ )$  und  $kei_n(\ )$  selbst programmiert werden mußten, da die Programmbibliotheken der THM und die von Robotron diese speziellen Funktionen nicht enthalten.

Für die Kelvinfunktionen wurden daher umfassende Subroutinen aufgestellt und getestet. Wie das Hauptprogramm TIBENB, so stehen auch sie interessierten Nachutzern zur Verfügung.

### 3. Auswertung der Ergebnisse

Die erhaltenen Gleichungen werden auf eine pulsierende Rohrströmung des Heizöls HEB angewendet. Die kinematische Zähigkeit, die Dichte und die Schallgeschwindigkeit des Öles betragen bei Normaldruck,  $p = 10^5 \text{ N/m}^2$  und einer Temperatur von  $60^\circ \text{C}$ :  $\nu = 16,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho_o = 872,6 \text{ kg/m}^3$  und  $c_o = 1300 \text{ m/s}$ . Das Strömungsrrohr konstanten Querschnitts besitzt 100 mm Innendurchmesser. Die Geschwindigkeit des zeitlich gemittelten Volumenstromes beträgt  $v_o = 5 \text{ m/s}$ . Die Amplitude der Geschwindigkeitsschwankung ist bei den durchgerechneten Beispielen  $v_1 - v_o = 0,1 \cdot v_o = \text{const}$ , Bild 1.

Ähnlichkeitsbetrachtungen ergaben, daß der instationäre Widerstandsbeiwert eine Funktion der Ähnlichkeitsparameter

$$\lambda_{in} = \lambda_{in}(Re, Re_{gl}, Sr, Ma, S1, S2, Eu_o, Eu_1) \quad (24)$$

ist. In der Beziehung (24) sind:

$$Re = \frac{2 \cdot R \cdot v_m}{\nu}, \quad \text{die momentane Re-Zahl,}$$

$$Re_{gl} = \frac{2 \cdot R \cdot v_1}{\nu}, \quad \text{die globale Re-Zahl,}$$

$$Sr = \frac{L \cdot \Omega_s^2}{\pi \cdot R \cdot Re_{gl}}, \quad \text{die Strouhal-Zahl mit } \Omega_s = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \text{ und } L \text{ einer gewählten Rohrlängse (} L = 5 \text{ m),}$$

$$S1 = \frac{v_o}{v_1}, \quad \text{der Pulsationsgrad}$$

$$Eu_o = \frac{\Delta p_o}{\rho_o v_o^2}, \quad \text{die Euler-Zahl der Grundströmung,}$$

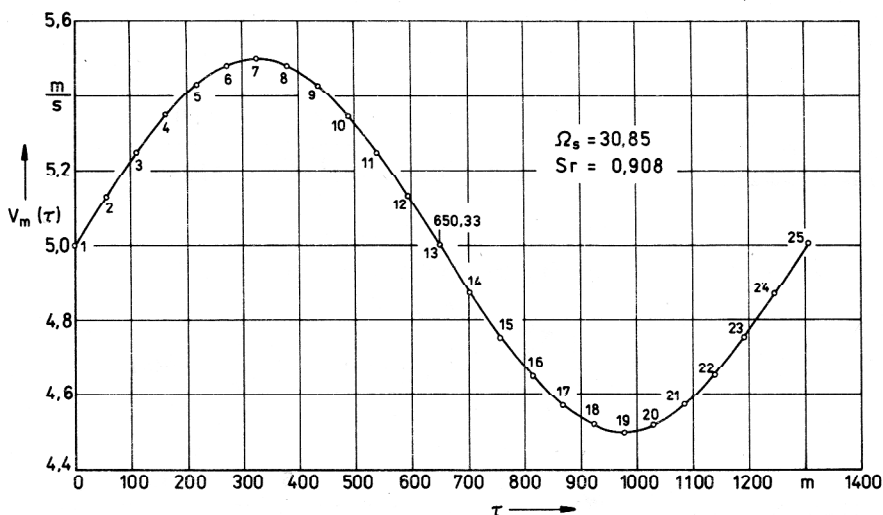
$$S2 = \frac{2R}{L}, \quad \text{ein geometrisches Verhältnis}$$

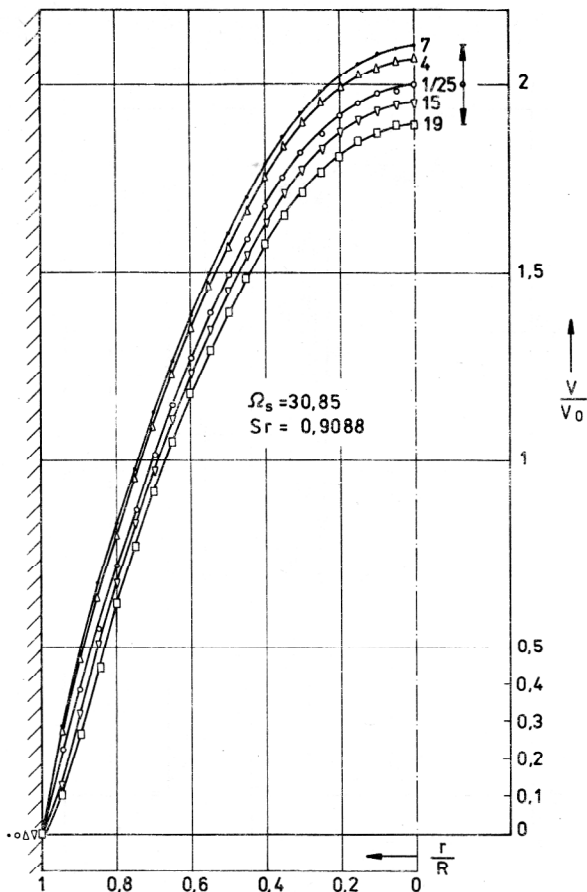
und

$$Eu_1 = \frac{p_o}{\rho_o v_1^2}, \quad \text{die Euler-Zahl der instationären Strömung.}$$

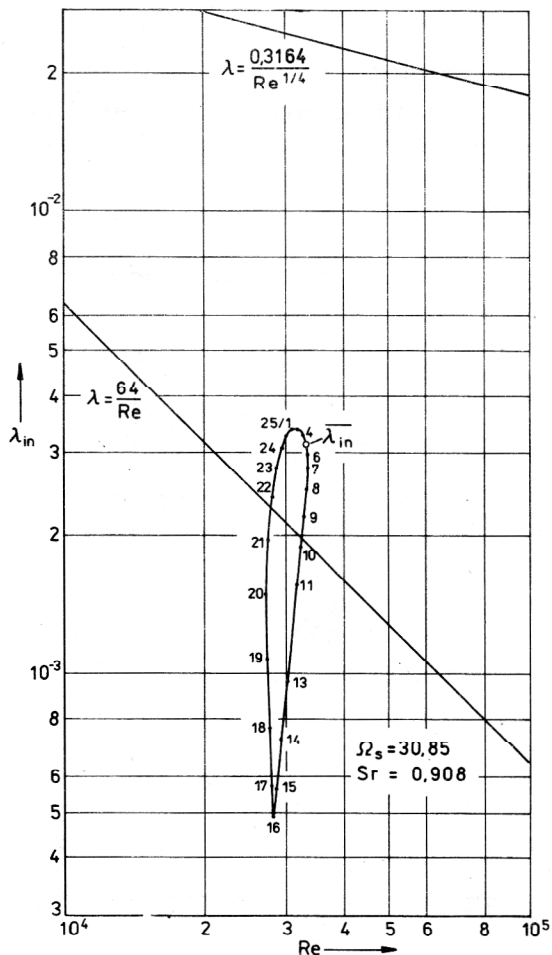
**Bild 1**

Über dem Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit einer pulsierenden Rohrströmung in Abhängigkeit von der „Zeit“  $\tau$  mit 1 Hz Störfrequenz





**Bild 2**  
Geschwindigkeitsverteilung einer pulsierenden Rohrströmung mit 1 Hz Störfrequenz



In Gl. (24) wurden die Ähnlichkeitsparameter entsprechend ihres Einflusses auf  $\lambda_{in}$  aufgeführt. Am stärksten hängt  $\lambda_{in}$  von  $Re$  ab.

Im folgenden werden acht Varianten mit veränderlicher  $Sr$ -Zahl,  $Sr \in [0,908; 181,7]$  bzw.  $\Omega_s \in [30,8; 436,2]$  oder  $\omega \in [6,28; 1256]$  1/s oder  $f \in [1; 200]$  Hz betrachtet. Außer  $Re$  sind die übrigen Ähnlichkeitsparameter konstant. Sie betragen in allen Beispielen:

$$Re_{gl} = 3,33 \cdot 10^4, Ma = 0,00423, S1 = 0,091, S2 = 0,02, Eu_0 = 0,0528 \text{ und } Eu_1 = 37,88.$$

Da  $Re_{gl} > 2200$  ist, besitzen die obigen Varianten nur Beispielcharakter. Auch in einem turbulenzarmen Versuchsstand läßt sich die pulsierende Rohrströmung nicht bis  $Re_{gl} = 3,33 \cdot 10^4$  laminar halten [11]. Die Aussagen, die die Varianten lehren, sind jedoch von diesem Umstand unabhängig.

Die Variation der  $Sr$ -Zahl ist bei pulsierenden Strömungen von großem Interesse. In den Arbeiten [8] und [7] wird die Vermutung ausgesprochen, daß sich der Widerstand einer stationären Rohrströmung senken läßt, falls man ihr einen harmonisch schwankenden Volumenstrom überlagert.

Bild 2 zeigt einige momentane Geschwindigkeitsprofile der pulsierenden Rohrströmung mit der niedrigsten untersuchten Störfrequenz von 1 Hz. Infolge der dominierenden Grundströmung und der niedrigen Störfrequenz tritt der Annulareffekt nicht sichtbar hervor. Von diesem Sachverhalt zeugt auch Bild 3. Obwohl etwa die Hälfte aller im Bild 3 eingetragenen  $\lambda_{in}$ -Werte kleiner als  $\lambda = 64/Re$  der stationären Grundströmung ist, liegt der über eine Schwingungsperiode gemittelte  $\lambda_{in}$ -Beiwert wesentlich über der Geraden  $\lambda = 64/Re$ .

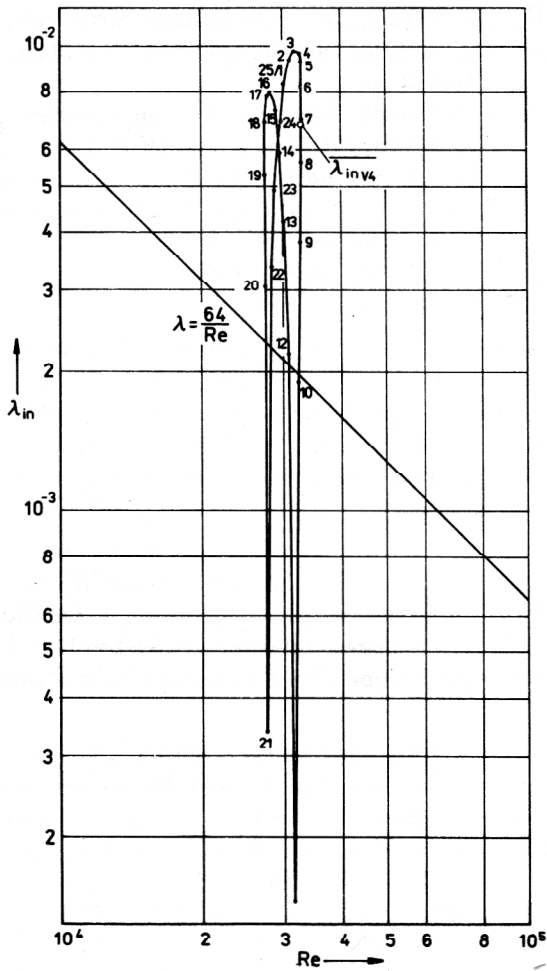
Mit zunehmender Schwankungsfrequenz, Bild 4 und 5, nehmen der momentane und der gemittelte  $\lambda_{in}$ -Beiwert ebenfalls zu. Außerdem verzweigt sich  $\lambda_{in}$  über dem  $Re$ -Verlauf, was auf den bei anwachsender Schwankungsfrequenz stärker in Erscheinung tretenden Annulareffekt zurückzuführen ist. Die mit dem Annulareffekt auftretende Phasenverschiebung zwischen der über dem Querschnitt gemittelten Geschwindigkeit und dem Druckgradienten genügt den gleichen Gesetzmäßigkeiten wie bei einer infolge zeitlich veränderlichem Druckgradienten schwankender pulsierender Strömung. Die bekannten und in [8] oder [10] dargestellten Ergebnisse sollen hier nicht wiederholt werden.

Bild 6 zeigt schließlich noch den Einfluß der Schwankungsfrequenz auf den über eine Schwingungsperiode gemittelten  $\lambda_{in}$ -Beiwert. Sämtliche  $\lambda_{in}$ -Beiwerte dieser Darstellung liegen oberhalb der  $\lambda = 64/Re$ -Geraden. Mit zunehmender Frequenz nähern sie sich dem Widerstandsbeiwert der stationären, turbulenten Rohrströmung des hydraulisch glatten Rohres.

Durch die Überlagerung einer stationären, laminaren newtonschen Grundströmung mit einem harmonisch schwankenden Volumenstrom tritt also im zeitlichen Mittel eine Widerstandserhöhung und keine Widerstandsminderung ein. Wenn auch dieses Resultat nur exakt für

**Bild 3**

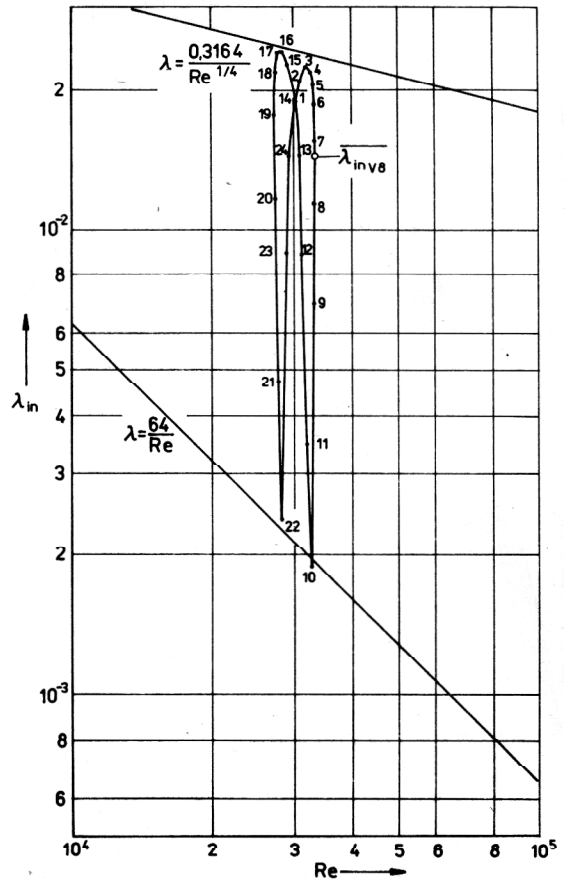
Abhängigkeit des Widerstandsbeiwerts  $\lambda_{in}$  von  $Re$  einer pulsierenden Rohrströmung mit 1 Hz Störfrequenz



**Bild 4**  
Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes  $\lambda_{in}$  von  $Re$  einer pulsierenden Rohrströmung mit 30 Hz Störfrequenz

das vorliegende klassische Berechnungsmodell gilt, so muß doch vermutet werden, daß diese Grundaussage auch für instationäre Rohrein- und -anlaufströmungen zutrifft.

Eine Widerstandsminderung der Rohrströmung durch instationäre Maßnahmen wiesen Böhme und Nonn [2] bei nicht-newtonischen Fluiden mit scherverdünnenden Eigenschaften nach.

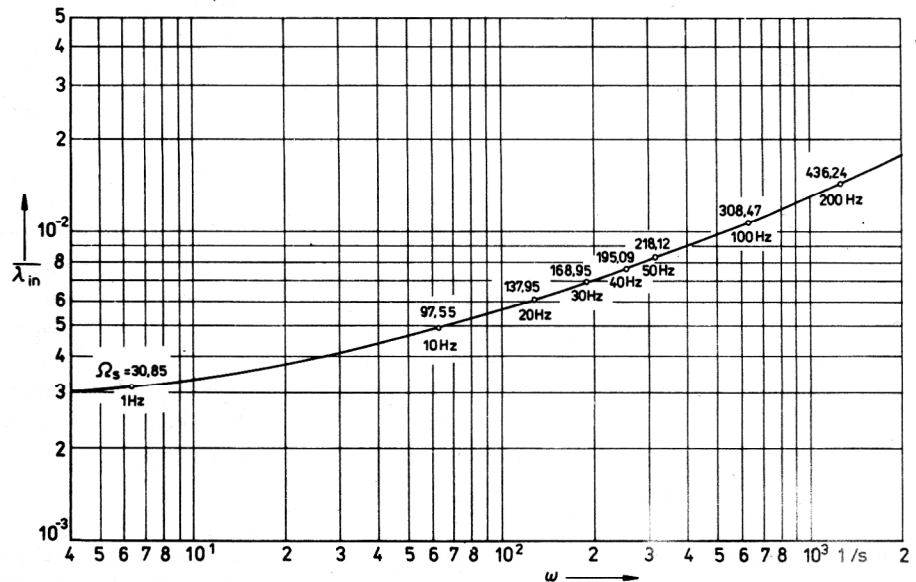


**Bild 5**  
Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes  $\lambda_{in}$  von  $Re$  einer pulsierenden Rohrströmung mit 200 Hz Störfrequenz

#### 4. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das Randwertproblem der klassischen, pulsierenden, laminaren Rohrströmung newtonischer Fluide bei vorgegebener zeitlicher Volumenstromschwankung gelöst.

**Bild 6**  
Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes  $\lambda_{in}$  von der Störkreisfrequenz bzw. der Sr-Zahl



Das Rechenprogramm TIBENB gestattet die Berechnung des Geschwindigkeitsprofils, der über dem Querschnitt gemittelten Geschwindigkeit, des Druckes, des momentanen instationären Widerstandsbeiwertes  $\lambda_{in}$  und des über eine Schwingungsperiode gemittelten Widerstandsbeiwertes  $\bar{\lambda}_{in}$  in Abhängigkeit der Ähnlichkeitsparameter, von denen das Problem abhängt. An einigen Variantenrechnungen wurde der Einfluß der momentanen Reynolds-Zahl und der Strouhal-Zahl auf  $\lambda_{in}$  und  $\bar{\lambda}_{in}$  untersucht. Der über eine Schwingungsperiode gemittelte Widerstandsbeiwert  $\bar{\lambda}_{in}$  ist stets größer als der der laminaren Grundströmung. Er nimmt mit steigender Schwankungsfrequenz zu. Nicht untersucht wurden die Einflüsse der globalen Reynolds-Zahl, des Pulsationsgrades und der Mach-Zahl auf  $\lambda_{in}$  und  $\bar{\lambda}_{in}$ . Die Mach-Zahl hängt von der Schallhärte des Fluids ab. Letztere beeinflusst spürbar den  $\lambda_{in}$ -Beiwert, wie in [9] an Einspritzvorgängen gezeigt werden konnte.

Das Rechenprogramm TIBENB gestattet die Berechnung pulsierender und oszillierender Vorgänge. Es steht interessierten Nutzern zur Anwendung zur Verfügung.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Абрамовича, М.; Стиган, И.: Справочник по специальным Функциям. Москва Наука (1979).
- [ 2 ] Böhme, G., Nonn, G.: Instationäre Rohrströmung viskoelastischer Flüssigkeiten – Maßnahmen zur Durchsatzsteigerung. Ing.-Archiv 48 (1979), S. 35–49.
- [ 3 ] Büttner, D.: Ein Beitrag zur pulsierenden laminaren Rohrströmung. Diplomarbeit TH Magdeburg Nr. 7-DA81-655.
- [ 4 ] Emsmann, S.: Experimentelle Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung in einer oszillierenden turbulenten Rohrströmung. Diss. TU Berlin 1973.
- [ 5 ] Gerbes, W.: Zur instationären, laminaren Strömung einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit in kreiszylindrischen Rohren. Zeitschrift für angew. Physik III B. H 7 (1951).
- [ 6 ] Градштейн, И. С., Рыжик, И. М.: Таблицы, Интегралов, Сумм, Рядов и Произведений. Москва (1963).

- [ 7 ] Kirmse, R.: Investigations of Pulsating Turbulent Pipe Flow. Journal of Fluid Engineering Transactions of the ASME, Vol. 101, Dec. (1979), S. 436–442.
- [ 8 ] Lutz, O.: Die periodische, viskose Rohrströmung. Forschung im Ing.-Wes. Bd. 36 (1970) Nr.6.
- [ 9 ] Nguyen Thac Tan: Ein Beitrag zum Druckverlust der instationären laminaren Rohrströmung. Diss. A. TH Magdeburg (1981).
- [ 10 ] Pechau, W.: Geschwindigkeitsverteilung und Verlustleistung bei oszillierender Rohrströmung. Techn. Mitt. Krupp, Forschungsbericht Bd. 22 (1964) Nr. 2.
- [ 11 ] Sarpkaya, T.: Experimental Determination of the Critical Reynolds Number for Pulsating Poiseuille Flow. Journal of Basic Engineering (1966).
- [ 12 ] Sexl, T.: Über den von E.G. Richardson entdeckten „Annulareffekt“. Zeitschrift f. Physik, 61 (1930), S. 349.
- [ 13 ] Uchida, S.: The Pulsating Viscous Flow Superposed on the Steady Laminar Motion of Incompressible Fluid in a Circular Pipe. ZAMP, Vol. 7 (1956) S. 403.

#### Anschriften des Verfassers:

Dipl.-Ing. D. Büttner  
VEB Filmfabrik Wolfen  
444 Wolfen

Doz. Dr. sc. techn. H.K. Iben  
Technische Hochschule Otto von Guericke  
Sektion Dieselmotoren, Pumpen und  
Verdichter  
3010 Magdeburg  
PSF 124