

Zur Entwicklung abgeleiteter Antwortspektren für die Abschätzung von Erdbebeneinflüssen

Udo Fischer

1. Einleitung

Bei Erdbebenuntersuchungen im Ingenieurwesen hat die sogenannte Antwortspektrenmethode weite Verbreitung gefunden. Sie ermöglicht in einfacher Weise die Abschätzung des maximalen Betrages einer interessierenden kinematischen oder dynamischen Größe eines Bauwerkes oder Ausrüstungsteils unter Verwendung von Normal-Antwortspektren für Erdbeben. Solche Spektren werden aus aufgezeichneten Erdbeben entwickelt und stellen ein Diagramm dar, aus dem der maximale Betrag der „Antwort“ eines stützenerregten linearen, gedämpften Einmassenschwingers in Abhängigkeit von seiner Eigenfrequenz und seines Dämpfungsgrades zu entnehmen ist. Die Stützenbewegungen sind entweder die erdbebenbedingten Bodenbewegungen selbst oder stellen Reaktionen eines Bauwerkes auf die Erdbebenerregungen dar. Als „Antworten“ werden in der Praxis hauptsächlich dargestellt

- die Absolutbeschleunigung,
- die Relativverschiebung,
- die Relativgeschwindigkeit.

Mit den Bezeichnungen von Bild 1 sind das die Größen $\max |\ddot{X}|$, $\max |Y|$, $\max |\dot{Y}|$ (wobei im statischen Gleichgewicht $Y=0$ gelten soll).

Die Antwortspektrenmethode hat den großen praktischen Vorteil, daß ihre Anwendung relativ wenig Aufwand erfordert und sich auf ihrer Basis verhältnismäßig leicht Berechnungsvorschriften entwickeln lassen. Neben Anwendungsgrenzen, die sich aus der geforderten Linearität des zu berechnenden Schwingungssystems ergeben, bietet die Anwendung der Methode Schwierigkeiten, wenn Antwortspektren nicht für die in Frage kommenden Dämpfungsgrade zur Verfügung stehen. Weitere

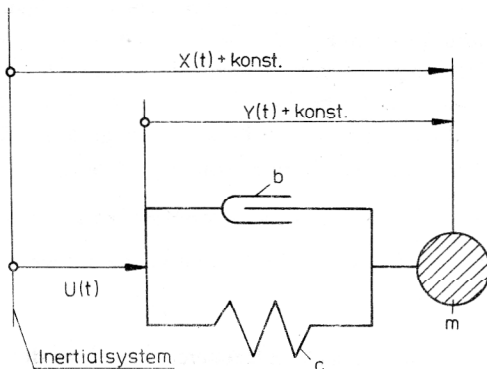


Bild 1
Schema des stützenerregten Einmassenschwingers

Schwierigkeiten ergeben sich aus der Tatsache, daß insbesondere bei Schwingern, die zur Isolierung von der Erdbebenerregung tief abgestimmt und optimal gedämpft werden sollen, die maximale Relativverschiebung abgeschätzt werden muß und dafür in der Regel entsprechende Antwortspektren fehlen. Der vorliegende Beitrag befaßt sich deshalb mit der Aufgabe, die Spektraldichtefunktion des Erregerprozesses aus einem vorgegebenen Antwortspektrum (z. B. der Absolutbeschleunigung) abzuschätzen und daraus abgeleitete Antwortspektren für andere Schwingungsgrößen (z. B. Relativverschiebung) und/oder andere Dämpfungsgrade abzuleiten.

2. Spektraldichtefunktion des Erregungsprozesses

Im folgenden sollen die Voraussetzungen gültig sein, daß der Erregungsprozeß $U(t)$ als stationärer Zufallsprozeß angesehen werden kann. Diese Voraussetzung möge auch für die Systemantworten $X(t)$ und $Y(t)$ zumindest im Bereich ihrer stärksten Ausschläge gelten. Diese Annahmen können für den „Strong-Motion“-Abschnitt der meisten Erdbeben als gültig angesehen werden, vgl. z. B. [1], [2]. Zwischen der Spektraldichtefunktion $S_U(\Omega)$ des Prozesses $U(t)$ und den Spektraldichtefunktionen von $X(t)$ und $Y(t)$ bestehen folgende Zusammenhänge, vgl. z. B. [3].

$$S_{\ddot{X}}(\Omega) = |H_{X,U}(\omega_0, \beta_0, \Omega)|^2 \cdot S_{\ddot{U}}(\Omega) \quad (1)$$

$$S_Y(\Omega) = |H_{Y,\ddot{U}}(\omega_0, \beta_0, \Omega)|^2 \cdot S_{\ddot{U}}(\Omega) \quad (2)$$

mit

$$|H_{X,U}|^2 = |H_{\ddot{X},\ddot{U}}|^2 = \frac{\omega_0^4 + 4\beta_0^2 \Omega^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta_0^2 \Omega^2 \omega_0^2} \quad (3)$$

$$|H_{Y,\ddot{U}}|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta_0^2 \Omega^2 \omega_0^2} \quad (4)$$

Aus Gl. (1) läßt sich die Streuung der Beschleunigung des Einmassenschwingers in Abhängigkeit von Kenn-

kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ und Dämpfungsgrad

$\beta = h/(2\sqrt{c \cdot m})$ wie folgt angeben:

$$\sigma_{\ddot{X}}^2(\omega_0, \beta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{X,U}(\omega_0, \beta_0, \Omega)|^2 S_{\ddot{U}}(\Omega) d\Omega \quad (5)$$

Für hinreichend kleine Dämpfungsgrade ($\beta_0 \leq 0,1$), bei denen die Übertragungsfunktion eine deutliche Resonanzüberhöhung aufweist und darüber hinaus $S_{\ddot{U}}(\Omega)$ hinreichend „glatt“ ist, kann Gl. (5) durch eine Näherung ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \sigma_{\ddot{X}}^2(\omega_0, \beta_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_{X,U}|^2 d\Omega \cdot S_{\ddot{U}}(\omega_0) = \\ &= \frac{1 + 4\beta_0^2}{2\beta_0} \pi \omega_0 S_{\ddot{U}}(\omega_0) \end{aligned} \quad (6)$$

Die mittlere Frequenz des Prozesses $\ddot{X}(t)$ ergibt sich näherungsweise zu $\omega_0/2\pi$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß dieser stationäre Prozeß während einer Zeit T die Schranke a nicht über- bzw. -a nicht unterschreitet, ist, wenn der Prozeß normalverteilt ist und die Überschreitungen als unabhängige Ereignisse angesehen werden können,

$$P = \exp \left[- \frac{\omega_0 T}{\pi} \exp \left(- \frac{a^2}{2\sigma_{\ddot{X}}^2} \right) \right].$$

Man kann die Schranke a, die von ω_0 und β_0 abhängig ist, als das Antwortspektrum der Absolutbeschleunigung ansehen. Daraus folgt nach Auflösung nach $\sigma_{\ddot{X}}^2$:

$$\sigma_{\ddot{X}}^2(\omega_0, \beta_0, P, T) = \frac{1}{2} a^2(\omega_0, \beta_0) \cdot \left[\ln \left(\frac{\omega_0 T}{\pi \ln P^{-1}} \right) \right]^{-1} \quad (7)$$

Die Gln. (6) und (7) gestatten die Auflösung nach $S_{\ddot{U}}$.

Man erhält mit Ω anstelle von ω_0 :

$$S_{\ddot{U}}(\Omega) = \frac{\beta_0}{1 + 4\beta_0^2} \frac{a^2(\Omega, \beta_0)}{\pi \Omega} \left[\ln \left(\frac{\Omega T}{\pi \ln P^{-1}} \right) \right]^{-1} \quad (8)$$

Die Gültigkeit von Gl. (8) ist eingeschränkt

- für sehr kleine Ω und schwache Dämpfungen β_0 , wenn $\beta_0 \Omega T \ll 1$, weil dann die Annahme einer stationären Bewegung des Schwingers nicht annähernd erfüllt ist und
- für große Ω im Bereich von Ω unabhängiger $a(\Omega, \beta_0)$, weil Gl. (6) für $S_{\ddot{U}}(\omega_0) = 0$ ihre Gültigkeit verliert.

Deshalb erlaubt Gl. (8) nicht den Schluß, daß mit $a(\Omega, \beta_0) \rightarrow 0$ für $\Omega \rightarrow 0$ auch $S_{\ddot{U}}(\Omega)$ verschwindet. Andererseits wird $S_{\ddot{U}}(\Omega)$ im Bereich großer Ω überschätzt und sollte deshalb im Bereich von Ω unabhängiger $a(\Omega, \beta_0)$ zu Null gesetzt werden.

Pfaffinger [4] benutzt einen anderen Weg zur Bestimmung der Spektraldichtefunktion, obgleich in der zitierten Arbeit Beziehungen verwendet werden, die den Gln. (6) und (7) – für $P = 1/e$ – entsprechen. Hier wird $S_{\ddot{U}}(\Omega)$ entweder als gebrochen rationale Funktion mit unbekanntem Parametern oder als Treppenfunktion vorausgesetzt. Die Parameter bzw. der Verlauf der Treppenfunktion werden durch Ausgleichsrechnung aus den Be-

ziehungen bestimmt, die den Gln. (5) und (7) entsprechen. Diese Vorgehensweise ist aufwendiger als die hier angewandte, die allerdings auf vorgegebene Antwortspektren kleiner Dämpfung beschränkt ist.

3. Abgeleitete Antwortspektren

Mit der nach Gl. (4) berechneten Spektraldichte $S_{\ddot{U}}(\Omega)$ kann die Streuung der Absolutbeschleunigung oder der Relativverschiebung eines Schwingers der Kennkreisfrequenz ω_0 und des Dämpfungsgrades β berechnet werden:

$$\sigma_{\ddot{X}}^2(\omega_0, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{X,U}(\omega_0, \beta, \Omega)|^2 S_{\ddot{U}}(\Omega) d\Omega \quad (9)$$

$$\sigma_Y^2(\omega_0, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{Y,\ddot{U}}(\omega_0, \beta, \Omega)|^2 S_{\ddot{U}}(\Omega) d\Omega. \quad (10)$$

Die Wahrscheinlichkeit des Nichtüberschreitens der Schranken a und -a kann wie oben zu

$$P = \exp \left[- \frac{\bar{\omega} T}{\pi} \exp \left(- \frac{a^2}{2\sigma^2} \right) \right]$$

angenommen werden, wobei $\bar{\omega}$ die mittlere Kreisfrequenz des Prozesses \ddot{X} bzw. Y sein möge. Diese Gleichung erlaubt die Umstellung für die Absolutbeschleunigung

$$a^2(\omega_0, \beta) = 2\sigma_{\ddot{X}}^2 \ln \left[\frac{\bar{\omega}_{\ddot{X}} T}{\pi \ln P^{-1}} \right] \quad (11)$$

bzw. für den Relativweg

$$s^2(\omega_0, \beta) = 2\sigma_Y^2 \ln \left[\frac{\bar{\omega}_Y T}{\pi \ln P^{-1}} \right] \quad (12)$$

Zur Berechnung dieser abgeleiteten Antwortspektren benötigt man außer den Streuungen $\sigma_{\ddot{X}}^2$ und σ_Y^2 nach Gln. (9) und (10) die mittleren Kreisfrequenzen, die sich sich aus

$$\bar{\omega}_{\ddot{X}} = \sigma_{\ddot{X}}^2 / \sigma_{\ddot{X}}; \quad \bar{\omega}_Y = \sigma_Y^2 / \sigma_Y \quad (13)$$

berechnen lassen. Die Gln. (9) bis (13) erlauben damit eine Berechnung der abgeleiteten Antwortspektren für die Absolutbeschleunigung und die Relativverschiebung. Die Integrale in den Gln. (9) und (10) sind im allgemeinen numerisch zu berechnen. Diese Aufgabe wird dadurch erleichtert, daß $S_{\ddot{U}}(\Omega)$ nach obigem nur für endliche Bereiche von Ω ungleich Null ist. Die Unsicherheit von $S_{\ddot{U}}(\Omega)$ in der Nähe von $\Omega = 0$ spielt keine große Rolle, wenn ω_0 hinreichend groß gewählt ist. Die zur Auswertung der Gln. (13) benötigten Größen $\sigma_{\ddot{X}}^2$ und σ_Y^2 erhält man in bekannter Weise mit den Gln. (9) bzw. (10) durch Multiplikation der Integranden mit Ω^2 .

Hohe Ansprüche an den Rechenaufwand bei der numerischen Integration werden insbesondere dann gestellt, wenn β klein ist, weil dann die Funktionen $|H(\omega_0, \beta, \Omega)|^2$ für $\Omega \approx \omega_0$ stark ausgeprägte Maxima haben.

In diesem Fall ist es jedoch erlaubt, die bereits in Gl. (6) verwendete Näherung zu benutzen, die schließlich auf folgende einfache Näherungsgln. führt:

$$a(\omega_o, \beta) \approx \sqrt{\frac{1+4\beta^2}{1+4\beta_o^2}} \cdot \frac{\beta_o}{\beta} \cdot a(\omega_o, \beta_o) \quad (14)$$

$$s(\omega_o, \beta) \approx \sqrt{\frac{1}{1+4\beta_o^2}} \cdot \frac{\beta_o}{\beta} \cdot \omega_o^{-2} a(\omega_o, \beta) \quad (15)$$

Gl. (14) verliert ihre Gültigkeit für große ω_o aus oben dargelegten Gründen. Insbesondere muß gelten, daß

$$\lim_{\omega_o \rightarrow \infty} a(\omega_o, \beta) = \lim_{\omega_o \rightarrow \infty} a(\omega_o, \beta_o)$$

unabhängig von der Dämpfung sein muß. Das gleiche gilt für die Relativverschiebung, jedoch ist der Fehler von $s(\omega_o, \beta)$ für große ω_o weniger auffällig, weil $s(\omega_o, \beta)$ wie $s(\omega_o, \beta_o)$ mit wachsendem ω_o gegen Null strebt. Dagegen ist es nicht möglich, aus Gl. (15) den Wert für $s(0, \beta)$ zu bestimmen – auch nicht als Grenzwert.

Zum Einfluß der geschätzten Länge der stationären Phase des Erdbebens, T , und der Wahrscheinlichkeit P der Nichtüberschreitung des Niveaus a bzw. s ist zu bemerken, daß sich dieser bei Schmalbandprozessen (kleine β) aufhebt, wie Gln. (14) und (15) zeigen. Bei großen Dämpfungen wird der Einfluß nur teilweise ausgeglichen. Fehlerhafte Schätzungen, die sich aus der Unkenntnis der Voraussetzungen ergeben, die bei der Entwicklung des Antwortspektrums zu Grunde gelegt wurden, führen vor allem bei kleinen Ω zu Abweichungen. Das geht aus Gl. (8) hervor, wenn man den darin enthaltenen Term

$$\ln \frac{\Omega T}{\pi \ln P \cdot 1} \quad \text{wie folgt aufspaltet:}$$

$$\ln \frac{\Omega T'}{\pi \ln P' \cdot 1} + \ln \frac{T}{T'} + \ln \frac{\ln P'}{\ln P}$$

Hierin stellen T' und P' die geschätzten und T und P die wahren Werte dar.

4. Ein Beispiel

Bild 2 zeigt ein Beispiel für die Entwicklung abgeleiteter Antwortspektren. Gegeben war hier das Spektrum der Absolutbeschleunigung für den Dämpfungsgrad $\beta = 0,01$.

Es ist ein Antwortspektrum auf eine Erregung, die durch Gebäudeschwingungen gefiltert ist. Abgeleitet wurden Antwortspektren für die Absolutbeschleunigung für die Dämpfungsgrade 0,025; 0,1; 0,2 und 0,5 (ausgezogene Linien) sowie die Antwortspektren für die dazugehörigen Relativverschiebungen (unterbrochene Linien). Es wurde $P = 0,95$ und $T = 10$ s gewählt. Schon aus der Form der Kurven ist ersichtlich, daß die Beschleunigungsspektren für $\beta = 0,025$ und 0,1 mit Hilfe der Näherungsformel (14) ermittelt wurden, während für die höheren Dämpfungen eine numerische Integration nach Gl. (9) erfolgte. Erkennbar ist die gute Konvergenz dieser Kurven mit der vorgegebenen für große ω_o . Diese Konvergenz ist als ein Prüfstein für eine einigermaßen richtige Abschätzung der Länge der stationären Phase des Bebens und der Nicht-

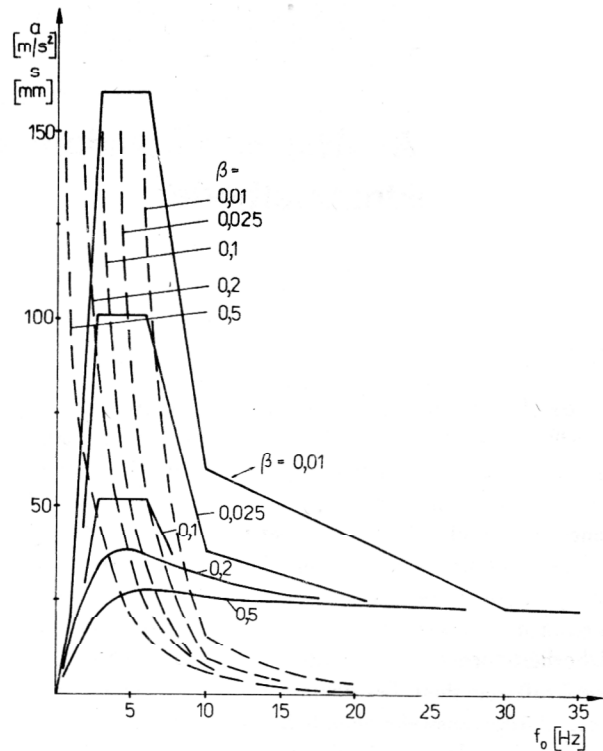


Bild 2

Antwortspektren für die Absolutbeschleunigung (durchgehende Linien) und die Relativverschiebung (unterbrochene Linien). Das Spektrum für die Absolutverschiebung $\beta = 0,01$ war vorgegeben

überschreitungswahrscheinlichkeit P einzusetzen. Sie kann aber auch als ein gewisses Maß der „inneren Richtigkeit“ des gegebenen Antwortspektrums selbst angesehen werden. Die Kurven für $\beta = 0,5$ zeigen, daß eine weitere Vergrößerung der Dämpfung keine Vorteile mehr verspricht und andererseits eine Isolation des Schwingers von der Stützenbeschleunigung nur mit relativ hohen Relativwegen erreicht werden kann. Diese Relativverschiebungen s sind jedoch geringer als sie sich bei der verbreiteten Schätzung

$$s(\omega_o, \beta) = a(\omega_o / \beta) / \omega_o^2$$

ergeben würden. Das liegt vor allem daran, daß bei den breitbandigen „Antwortprozessen“ eines stark gedämpften Schwingers die mittlere Frequenz stärker durch den Erregerprozeß bestimmt wird und deshalb höher ist als die Eigenfrequenz des Schwingers.

LITERATUR

- [1] Kiureghian, A.D.: A Response Spektrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems. Earthq. Eng. and Struct. Dyn. Vol. 9 (1981) 419–435.
- [2] Kiureghian, J.L., Sackman, B., Nour-Omid: Dynamic Response of Light Equipment in Structures. Univ. of California, Report EERC-81/05.
- [3] Fischer, U., Stephan, W.: Mechanische Schwingungen. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1981.
- [4] Pfaffinger, D.D.: Die Methode der Antwortspektren aus der Sicht der probabilistischen Tragwerksdynamik. Birkhäuser Verlag Basel – Boston – Stuttgart, 1979.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. sc. techn. Udo Fischer
Technische Hochschule „Otto von Guericke“
3010 Magdeburg, PSF 124