

Beitrag zur Spannungsberechnung in dünnen elastischen Schalen

Heinzjoachim Franek

1. Einleitung

Die Verwendung doppelt gekrümmter elastischer Schalen als tragende Elemente ist bei einfachen geometrischen Formen im Bauwesen und im Maschinenbau seit langem üblich [1]. Die Einführung computergestützter Rechenmethoden (z. B. Methode der finiten Elemente) erweitert die Möglichkeit elastizitätstheoretischer Untersuchungen auch auf kompliziertere Tragwerke, wobei im Gegensatz zu der den Bauingenieur interessierenden Schnittgrößenmittlung [2], [3] im Maschinenbau ausschließlich die Berechnung der Spannungen im Vordergrund steht. Diese folgen unmittelbar aus dem Verschiebungszustand, bedürfen jedoch bei schiefwinkligen und verwundenen Schalen spezieller Überlegungen.

In dem vorliegenden Beitrag werden, ausgehend von der Flüggeschen Schalentheorie [4], [5], Beziehungen für die Bestimmung des Spannungstensors in allgemeinen Koordinaten angegeben. Da die Spannungen auch eine Funktion des Abstandes von der Schalenmittelfläche (Bezugsfläche) sind, ändern sich neben ihren Beträgen auch ihre Richtungen mit diesem Abstand. Es wird gezeigt, wie sich letztere durch vereinfachende Annahmen berücksichtigen lassen.

Auch bei Schalen mit nichtorthogonalen Spannungsrichtungen spielt die Berechnung einer Vergleichsspannung eine entscheidende Rolle bei der Einschätzung der Tragfähigkeit. Man erhält sie am einfachsten aus den Hauptspannungen. Deshalb werden für diese Formeln angegeben, welche bei schiefwinkligen Koordinatensystemen die Ermittlung der Hauptnormalspannungen und der Hauptschubspannung gestatten.

2. Schalengeometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem kann jeder Punkt A der undeformierten Schalenmittelfläche durch den Ortsvektor

$$r^q(x^1, x^2) = \{ r^{\bar{1}}(x^1, x^2); r^{\bar{2}}(x^1, x^2); r^{\bar{3}}(x^1, x^2) \} \quad (1)$$

festgelegt werden (Bild 1). Dabei sind x^1, x^2 dimensionslose krummlinige Koordinaten, die auf der Schalenmittelfläche ein schiefwinkliges Koordinatensystem beschreiben. Die nichtnormierten Tangentenvektoren

$$c_\alpha^q = \frac{\partial r^q}{\partial x^\alpha} = r_{|\alpha}^q; \quad q = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}; \quad \alpha = 1, 2 \quad (2)$$

sind entlang der Koordinatenlinien $x^1 = \text{konst.}$, $x^2 = \text{konst.}$ gerichtet und bilden in jedem Punkt A eine Tangentialebene. Mit Gl. (2) berechnet man

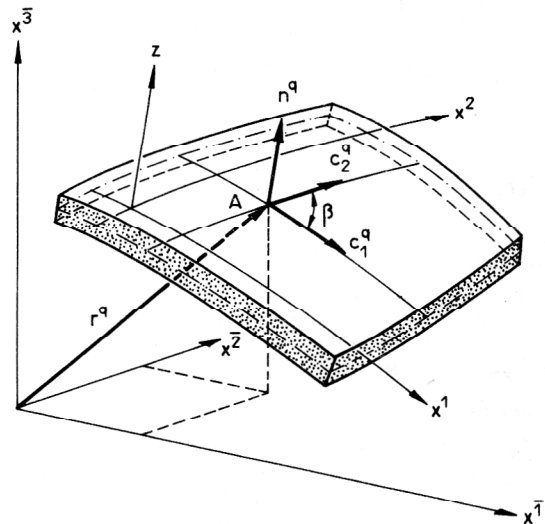


Bild 1
Beschreibung der Schalenmittelfläche

– die Komponenten der ersten Fundamentalform

$$g_{\alpha\beta} = c_\alpha^q c_\beta^q, \quad g = \det g_{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\tau} \epsilon^{\beta\lambda} g_{\tau\lambda} \quad (3)$$

– die Gradientenvektoren der Schalenmittelfläche

$$c_q^\alpha = g^{\alpha\beta} c_\beta^q \quad (4)$$

– den Normalenvektor zur Schalenmittelfläche

$$n_q = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon_{qpr} c_1^p c_2^r = \frac{1}{2} \epsilon_{qpr} \epsilon^{\alpha\beta} c_\alpha^p c_\beta^r \quad (5)$$

– die Komponenten der zweiten Fundamentalform

$$b_{\alpha\beta} = c_\alpha^q |_\beta n_q, \quad b_\alpha^\lambda = g^{\lambda\beta} b_{\alpha\beta}, \quad b^{\tau\lambda} = g^{\alpha\lambda} b_\alpha^\tau \quad (6)$$

– und die Komponenten der dritten Fundamentalform

$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda, \quad c_\alpha^\lambda = b_\alpha^\beta b_\beta^\lambda, \quad c^{\tau\lambda} = b_\beta^\tau b^{\beta\lambda} \quad (7)$$

Der Winkel β zwischen den beiden Tangentenvektoren folgt aus

$$\cos \beta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g^{11}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{22} g^{22}}} \quad (8)$$

Mit dem Ortsvektor

$$R^q(x^1, x^2, z) = r^q(x^1, x^2) + z n^q(x^1, x^2); \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (9)$$

zu einem Punkt des Schalenraumes ergeben sich bei Verwendung des Schalentensors

$$F_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - z b_\beta^\alpha \quad (10)$$

für die geometrischen Größen des Schalenraumes

$$C_{\alpha}^q = F_{\alpha}^{\beta} c_{\beta}^q = c_{\alpha}^q - z b_{\alpha}^{\beta} c_{\beta}^q, \quad (11)$$

$$G_{\alpha\beta} = F_{\alpha}^{\gamma} F_{\beta}^{\lambda} g_{\gamma\lambda} = g_{\alpha\beta} - 2z b_{\alpha\beta} + z^2 c_{\alpha\beta},$$

$$G_{33} = 1, \quad G_{\alpha 3} = 0, \quad (12)$$

$$G = \det G_{\alpha\beta} = g [1 - 2z b_{\alpha}^{\alpha} + z^2 (2b_{\alpha}^{\alpha} b_{\beta}^{\beta} - c_{\alpha}^{\alpha})], \quad (13)$$

$$(F_{\beta}^{\alpha})^{-1} = \delta_{\beta}^{\alpha} + z b_{\beta}^{\alpha} + z^2 c_{\beta}^{\alpha}, \quad (14)$$

$$G^{\alpha\beta} = (F_{\tau}^{\alpha})^{-1} (F_{\lambda}^{\beta})^{-1} g^{\tau\lambda} = g^{\alpha\beta} + 2z b_{\alpha\beta} + 3z^2 c_{\alpha\beta},$$

$$G^{33} = 1, \quad G^{\alpha 3} = 0, \quad (15)$$

$$C_{\alpha}^q = (F_{\beta}^{\alpha})^{-1} c_{\beta}^q = c_{\alpha}^q + z b_{\beta}^{\alpha} c_{\beta}^q + z^2 c_{\beta}^{\alpha} c_{\beta}^q. \quad (16)$$

Wie aus den Gln. (11), (16) zu erkennen ist, sind die durch die Tangentenvektoren C_{α}^q bzw. die Gradientenvektoren C_{α}^q festgelegten Tangentialebenen des Schalenraumes zwar parallel zur entsprechenden Tangentialebene der Schalenmittelfläche, jedoch hat sich der Winkel β geändert, da die Tangentenvektoren C_1^q bzw. C_2^q nicht mehr zu den Vektoren c_1^q bzw. c_2^q parallel sind. Bezeichnet man den Winkel zwischen C_1^q und c_1^q mit ϵ_1 , bzw. den Winkel zwischen C_2^q und c_2^q mit ϵ_2 , so gelten die Beziehungen

$$\cos \epsilon_1 = \frac{C_1^q c_1^q}{\sqrt{G_{11} g_{11}}} = 1 - \frac{1}{2} z^2 \frac{b_1^2 b_1^2}{g_{11} g^{22}}, \quad (17)$$

$$\cos \epsilon_2 = \frac{C_2^q c_2^q}{\sqrt{G_{22} g_{22}}} = 1 - \frac{1}{2} z^2 \frac{b_2^2 b_2^2}{g_{22} g^{11}}. \quad (18)$$

Es ist ersichtlich, daß ϵ_1 und ϵ_2 nahezu Null sind, da die in z quadratischen Zusatzterme nur einen geringen Einfluß auf die Größe dieser Winkel haben. Für Schalen mit verschwindender Verwindung ($b_2^1 = b_1^2 = 0$) sind die zugehörigen Tangentenvektoren des Schalenraumes und

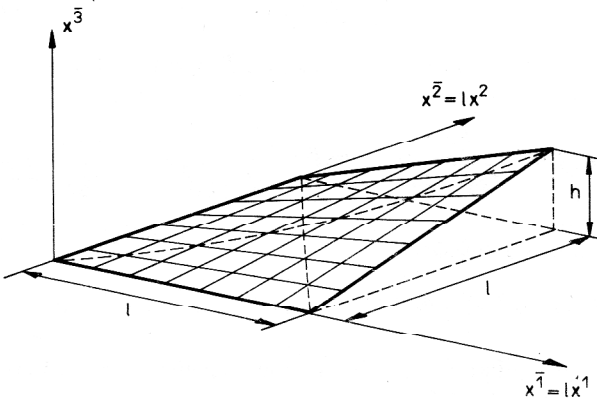


Bild 2
Doppelt gekrümmte Schale mit nichtorthogonalen Koordinatenlinien

der Schalenmittelfläche kollinear, aber auch für andere Schalen kann dies mit genügender Genauigkeit angenommen werden.

Wählt man zum Beispiel eine doppelt gekrümmte Schale entsprechend Bild 2, so folgen mit der Abkürzung $k = h/l$ aus dem Ortsvektor

$$r^q(x^1, x^2) = \{ l x^1; l x^2; h x^1 x^2 \}$$

die geometrischen Größen

$$c_1^q = \{ l; 0; h x^2 \}, \quad c_2^q = \{ 0; l; h x^1 \},$$

$$g_{11} = l^2 [1 + k^2 (x^2)^2], \quad g_{12} = h^2 x^1 x^2,$$

$$g_{22} = l^2 [1 + k^2 (x^1)^2],$$

$$g = l^4 \{ 1 + k^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2] \},$$

$$g^{11} = \frac{1 + k^2 (x^1)^2}{l^2 \{ 1 + k^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2] \}},$$

$$g^{22} = \frac{1 + k^2 (x^2)^2}{l^2 \{ 1 + k^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2] \}},$$

$$g^{12} = \frac{-k^2 x^1 x^2}{l^2 \{ 1 + k^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2] \}},$$

$$n_q = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2]}} \{ -k x^2; -k x^1; 1 \}$$

$$b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad b_{12} = \frac{h}{\sqrt{1 + k^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2]}}$$

$$b_1^1 = b_2^2 = -\frac{1}{l} \frac{k^3 x^1 x^2}{\sqrt{1 + k^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2]}}$$

$$b_2^1 = \frac{1}{l} \frac{k [1 + k^2 (x^1)^2]}{\sqrt{1 + k^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2]}}$$

$$b_1^2 = \frac{1}{l} \frac{k [1 + k^2 (x^2)^2]}{\sqrt{1 + k^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2]}}$$

Die Gln. (17), (18) liefern dann die Beziehungen

$$\cos \epsilon_1 - \cos \epsilon_2 = 1 - \frac{k^4}{2} \left(\frac{z}{h}\right)^2; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2},$$

die wegen $k \ll 1$ das oben Gesagte bestätigen.

3. Spannungszustand

Unter der Voraussetzung der Kirchhoffschen Hypothese lautet der Verschiebungsvektor eines Punktes des Schalenraumes

$$v^q = v^q - z (b_{\beta}^{\alpha} v^{\beta} + v^3 |^{\alpha}) c_{\alpha}^q$$

$$= (F_{\beta}^{\alpha} v^{\beta} - z v^3 |^{\alpha}) c_{\alpha}^q + v^3 n^q. \quad (19)$$

Mit ihm lassen sich analog zu den Gln. (10) bis (16) geometrische Größen des deformierten Schalenraumes aufbauen, aus denen man die Teilkomponenten

$$D_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + z q_{\alpha\beta} - z^2 [b_{\alpha}^{\tau} b_{\beta}^{\lambda} p_{\tau\lambda} + \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\lambda} q_{\lambda\beta} + b_{\beta}^{\lambda} q_{\lambda\alpha})], \quad (20)$$

$$D_{\alpha 3} = 0, \quad D_{33} = 0 \quad (21)$$

des Deformationstensors

$$D_{\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} (\bar{G}_{\Gamma\Delta} - G_{\Gamma\Delta}); \quad \Gamma, \Delta = 1, 2, 3 \quad (22)$$

erhält. Dabei finden der Dehnungstensor

$$p_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha} |_{\beta} + v_{\beta} |_{\alpha} - 2 b_{\alpha\beta} v^3) \quad (23)$$

und der Verkrümmungstensor

$$q_{\alpha\beta} = -b_{\alpha\beta} |_{\lambda} v^{\lambda} - b_{\alpha\lambda} v^{\lambda} |_{\beta} - b_{\beta\lambda} v^{\lambda} |_{\alpha} + c_{\alpha\beta} v^3 - v^3 |_{\alpha\beta} \quad (24)$$

Verwendung. Für den Spannungstensor $S^{\alpha\beta}$ und den Deformationstensor $D_{\alpha\beta}$ im Schalenraum folgt bei einem homogenen, isotropen Medium und einem ebenen Spannungszustand

$$S^{\alpha\beta} = (F_{\nu}^{\alpha})^{-1} (F_{\mu}^{\beta})^{-1} (F_{\varphi}^{\lambda})^{-1} (F_{\gamma}^{\tau})^{-1} a^{\nu\mu\varphi\gamma} D_{\lambda\tau} \quad (25)$$

mit

$$a^{\nu\mu\varphi\gamma} = \frac{E}{2(1+\mu)} (g^{\nu\varphi} g^{\mu\gamma} + g^{\nu\gamma} g^{\mu\varphi} + \frac{2\mu}{1-\mu} g^{\nu\mu} g^{\varphi\gamma}). \quad (26)$$

Setzt man Gl. (14) und Gl. (20) in die Beziehung (25) ein, so erhält man bei Berücksichtigung der Abkürzung

$$D_{\lambda\nu\tau}^{\alpha\beta\gamma} = 2 \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} b_{\tau}^{\gamma} + \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\tau}^{\gamma} b_{\nu}^{\beta} + \delta_{\nu}^{\beta} \delta_{\tau}^{\gamma} b_{\lambda}^{\alpha} \quad (27)$$

die kontravarianten Komponenten des Spannungstensors im Schalenraum

$$S^{\alpha\beta} = a^{\lambda\nu\epsilon\tau} \left\{ \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} p_{\epsilon\tau} + z (\delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} q_{\epsilon\tau} + D_{\lambda\nu\tau}^{\alpha\beta\gamma} p_{\epsilon\gamma}) + z^2 [D_{\lambda\nu\tau}^{\alpha\beta\gamma} (q_{\epsilon\gamma} + b_{\gamma}^{\varphi} p_{\epsilon\varphi} + b_{\epsilon}^{\varphi} p_{\gamma\varphi}) + (\delta_{\lambda}^{\alpha} c_{\nu}^{\beta} + \delta_{\lambda}^{\beta} c_{\nu}^{\alpha} + b_{\lambda}^{\alpha} b_{\nu}^{\beta}) p_{\epsilon\tau} - \delta_{\lambda}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} b_{\tau}^{\gamma} (q_{\epsilon\gamma} + 2 b_{\epsilon}^{\varphi} p_{\gamma\varphi})] \right\} \quad (28)$$

Sie sind bekannt, wenn der Verschiebungszustand vorliegt. Die technischen Komponenten des Spannungstensors ermittelt man zu

$$S(\alpha\beta) = \sqrt{\frac{G_{\beta\beta}}{G_{\alpha\alpha}}} S^{\alpha\beta} \quad (29)$$

Aus Gl. (29) ist ersichtlich, daß die Spannungen einerseits selbstverständlich von z abhängen [vgl. auch Gl. (12)], andererseits aber auch in dem Koordinatenzweibein C_1^q, C_2^q des Schalenraumes definiert sind. Dies würde bei einer Auswertung beträchtliche Mühe erfordern, so daß von der mit den Gln. (17), (18) begründete

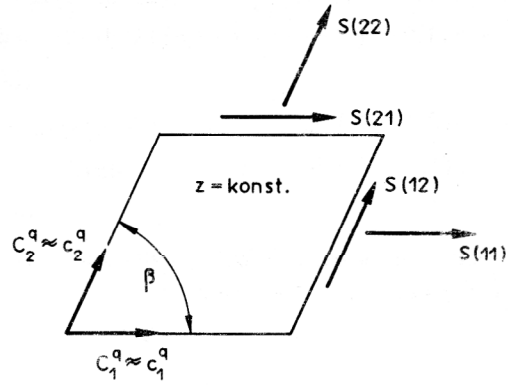


Bild 3 Positive Definitionen der Spannungen

ten Möglichkeit Gebrauch gemacht wird, das Koordinatenzweibein des Schalenraumes mit dem der Schalenmittelfläche zusammenfallen zu lassen. Dann haben die einzelnen Spannungskomponenten die in Bild 3 dargestellten Richtungen. Bei orthogonalen x^1, x^2 -Koordinatensystemen stimmen die Spannungen $S(11), S(22)$ mit den Normalspannungen und die Spannungen $S(12) = S(21)$ mit den Schubspannungen überein.

4. Hauptspannungen

Die bei orthogonalen Koordinatensystemen übliche Berechnung der Hauptspannungen und der Hauptspannungsrichtungen hat auch bei schiefwinkligen Systemen Bedeutung. Dazu wird ein differentielles Flächenteilchen mit den Seitenlängen $dx(1) = \sqrt{g_{11}} dx^1$ und $dx(2) = \sqrt{g_{22}} dx^2$ durch eine Gerade so getrennt, daß deren Normale mit der x^1 -Achse den Winkel ψ einschließt (Bild 4). Das Kräftegleichgewicht zwischen den Spannungen $S(11), S(22), S(12), S(21)$ und den zum ξ, η -System gehörenden orthogonalen Spannungen $S(\xi\xi), S(\eta\eta)$ liefert

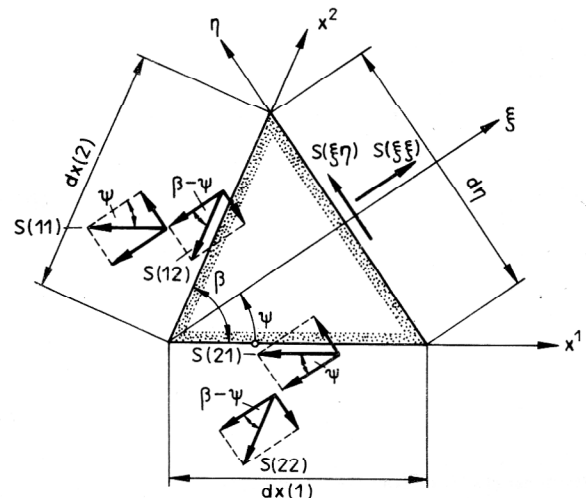


Bild 4 Kräftegleichgewicht für einen Schnitt $\xi = \text{konst.}$

$$S(\xi\xi) d\eta = S(22) dx(1) \cos(\beta - \psi) + S(21) dx(1) \cos \psi + S(12) dx(2) \cos(\beta - \psi) + S(11) dx(2) \cos \psi, \quad (30)$$

$$S(\xi\eta) d\eta = S(22) dx(1) \sin(\beta - \psi) - S(21) dx(1) \sin \psi + S(12) dx(2) \sin(\beta - \psi) - S(11) dx(2) \sin \psi. \quad (31)$$

Analog erhält man für einen Schnitt parallel zur ξ -Achse (Bild 5) die Transformationsbeziehungen

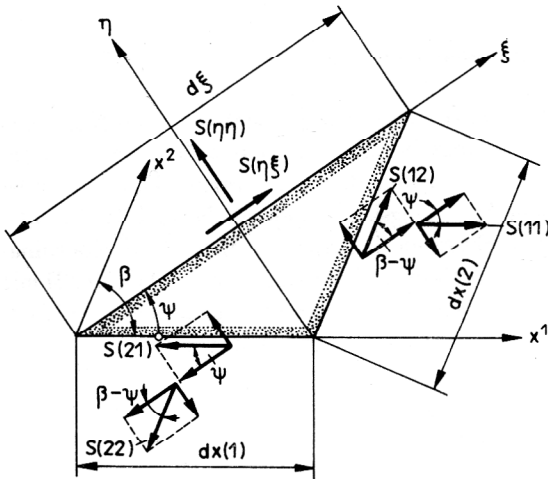


Bild 5
Kräftegleichgewicht für einen Schnitt $\eta = \text{konst.}$

$$S(\eta\eta) d\xi = S(22) dx(1) \sin(\beta - \psi) - S(21) dx(1) \sin \psi - S(12) dx(2) \sin(\beta - \psi) + S(11) dx(2) \sin \psi, \quad (32)$$

$$S(\eta\xi) d\xi = S(22) dx(1) \cos(\beta - \psi) + S(21) dx(1) \cos \psi - S(12) dx(2) \cos(\beta - \psi) - S(11) dx(2) \cos \psi. \quad (33)$$

Nach kurzer Zwischenrechnung ergeben sich die Spannungen im gedrehten orthogonalen Koordinatensystem

$$S(\xi\xi) = \frac{1}{2 \sin \beta} \left\{ S(11) [1 + \cos 2\psi] + S(22) [1 + \cos 2(\beta - \psi)] + 2 S(12) [\cos \beta + \cos(\beta - 2\psi)] \right\}, \quad (34)$$

$$S(\eta\eta) = \frac{1}{2 \sin \beta} \left\{ S(11) [1 - \cos 2\psi] + S(22) [1 - \cos 2(\beta - \psi)] + 2 S(12) [\cos \beta - \cos(\beta - 2\psi)] \right\}, \quad (35)$$

$$S(\xi\eta) = S(\eta\xi) = \frac{1}{2 \sin \beta} \left\{ -S(11) \sin 2\psi + S(22) \sin 2(\beta - \psi) + 2 S(12) \sin(\beta - 2\psi) \right\}. \quad (36)$$

Die Extremwerte der Normalspannungen folgen aus den Gln. (34), (35) und haben die Größen

$$S_{I,II} = \frac{1}{\sin \beta} \left(\frac{S(11) + S(22)}{2} + S(12) \cos \beta \right)$$

$$\pm \left\{ \left[\frac{S(11) - S(22)}{2} \right]^2 + S(12)^2 + S(12) [S(11) + S(22)] \cos \beta + S(11) S(22) \cos^2 \beta \right\}^{1/2}, \quad (37)$$

wobei S_I mit der x^1 -Achse einen Winkel ψ_I einschließt, der sich aus

$$\begin{aligned} \tan \psi_I &= 2 \frac{S_I \sin \beta - [S(11) + S(22) \cos^2 \beta + 2 S(12) \cos \beta]}{S(22) \sin 2\beta + 2 S(12) \sin \beta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{S(22) \sin 2\beta + 2 S(12) \sin \beta}{S_I \sin \beta - S(22) \sin^2 \beta} \end{aligned} \quad (38)$$

bestimmen läßt. Die Schubspannung verschwindet für diese Richtung. Sie nimmt ihren Extremwert

$$\begin{aligned} T &= \pm \left| \frac{S_I - S_{II}}{2} \right| \\ &= \pm \frac{1}{\sin \beta} \left\{ \left[\frac{S(11) - S(22)}{2} \right]^2 + S(12)^2 + S(12) [S(11) + S(22)] \cos \beta + S(11) S(22) \cos^2 \beta \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (39)$$

längs einer Geraden an, für deren Normalenwinkel die Beziehung

$$\tan 2\psi_2 = - \frac{S(11) + S(22) \cos 2\beta + 2 S(12) \cos \beta}{S(22) \sin 2\beta + 2 S(12) \sin \beta} \quad (40)$$

gilt.

Mit den Gln. (37) bis (40) sind die Hauptspannungen an jedem Punkt des Schalenraumes festgelegt. Es sei noch einmal daraufhingewiesen, daß die Spannungen nach den Gln. (12), (15), (28) und (29) von x^1 , x^2 und z abhängen, während für die Winkelfunktionen die Beziehungen (8) gewählt werden.

5. Zusammenfassung

Die Berechnung der Spannungen einer doppelt gekrümmten elastischen Schale in allgemeinen Koordinaten erfordert Überlegungen hinsichtlich der positiven Richtungen der einzelnen Spannungskomponenten. Es wird gezeigt, daß mit ausreichender Genauigkeit auch die im Schalenraum wirkenden Spannungen im Koordinatensystem der Schalenmittelfläche dargestellt werden können. Für unverwundene Tragwerke ist diese Annahme exakt. Ausgehend von den Transformationsbedingungen an einem schiefwinkligen Flächenteilchen erhält man Beziehungen zur Ermittlung von Größe und Richtung der Hauptspannungen. Diese gehen bei orthogonalen Koordinaten in die bekannten Formeln über.

LITERATUR

- [1] Girkmann, K.: Flächentragwerke. Wien: Springer Verlag 1956.
- [2] Franeck, H.: Ermittlung des Spannungs- und Verschiebungszustandes doppelt gekrümmter elastischer Schalen mit Hilfe der FEM. Freiburger Forschungsheft A 627 (1981), S. 21 – 36.
- [3] Franeck, H., Kämmel, G., Recke, H.-G.: Behandlung doppelt gekrümmter Schalen mit der Methode der finiten Elemente. Z. Technische Mechanik 1 (1980) H. 1, S. 83 – 88.
- [4] Green, A. E., Zerna, W.: Theoretical Elasticity. Oxford: University Press, 1954.
- [5] Krätzig, W. B.: Optimale Schalengrundgleichungen und deren Leistungsfähigkeit. ZAMM (54) 1974, S. 265 – 276.