

# Numerische Untersuchung von periodischen Schwingungen des Gestells ebener Mechanismen

Nguyen van Khang

## 1. Einleitung

Die Steigerung der Arbeitsgeschwindigkeit der Maschinen bedeutet auch vergrößerte Trägheitskräfte. Diese Kräfte wirken auf das Gestell. Deshalb ist es nötig, den Massenausgleich an Mechanismen und die Schwingungen des Gestells zu untersuchen.

Im folgenden werden die gleichzeitig parametererregten und erzwungenen Schwingungsdifferentialgleichungen des Gestells ebener Mechanismen beschrieben. Dann wird die numerische Berechnung der dynamischen Stabilitätsparameter und der periodischen Schwingungen des Gestells mit Hilfe der elektronischen Rechentechnik behandelt.

## 2. Schwingungsdifferentialgleichungen des Gestells ebener Mechanismen

Um die Wirkung der am Gestell angreifenden Massenkräfte zu veranschaulichen, sei angenommen, daß dieses elastisch gelagert ist (Bild 1). Die Bewegung soll aus der statischen Ruhelage heraus betrachtet werden. Der Einfluß des Eigengewichtes, der je nach Federanordnung auftritt, wird außer acht gelassen. Die Herleitung der Schwingungsdifferentialgleichungen des Gestells ebener Mechanismen wurde in [1], [2] ausführlich behandelt. Geht man von kleinen Schwingungen aus und verwirft die nichtlinearen Glieder, so erhält man die linearen Schwingungsdifferentialgleichungen des Gestells ebener Mechanismen [2]:

$$(m_F + m_G) \ddot{\xi}_F - \left( \sum_{i=2}^I m_i y_i + m_G \bar{\eta}_0 \right) \ddot{\Psi}_F + b_1 \dot{\xi}_F - 2 \left( \sum_{i=2}^I m_i \dot{y}_i \right) \dot{\Psi}_F + c_{11} \xi_F + c_{12} \eta_F + \left( c_{13} - \sum_{i=2}^I m_i \ddot{y}_i \right) \Psi_F = - \sum_{i=2}^I m_i \ddot{x}_i \quad (1)$$

$$(m_F + m_G) \ddot{\eta}_F + \left( \sum_{i=2}^I m_i x_i + m_G \bar{\xi}_0 \right) \ddot{\Psi}_F + b_2 \dot{\eta}_F + 2 \left( \sum_{i=2}^I m_i \dot{x}_i \right) \dot{\Psi}_F + c_{21} \xi_F + c_{22} \eta_F + \left( c_{23} + \sum_{i=2}^I m_i \ddot{x}_i \right) \Psi_F = - \sum_{i=2}^I m_i \ddot{y}_i \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & - \left( \sum_{i=2}^I m_i y_i + m_G \bar{\eta}_0 \right) \ddot{\xi}_F + \left( \sum_{i=2}^I m_i x_i + m_G \bar{\xi}_0 \right) \ddot{\eta}_F \\ & + [J_F + \sum_{i=2}^I J_i + m_G (\bar{\xi}_0^2 + \bar{\eta}_0^2) + \sum_{i=2}^I m_i (x_i^2 + y_i^2) + 2 \bar{\xi}_0 \sum_{i=2}^I m_i x_i + 2 \bar{\eta}_0 \sum_{i=2}^I m_i y_i] \ddot{\Psi}_F \\ & + [b_3 + 2 \sum_{i=2}^I m_i (x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i) + 2 \bar{\xi}_0 \sum_{i=2}^I m_i \dot{x}_i + 2 \bar{\eta}_0 \sum_{i=2}^I m_i \dot{y}_i] \dot{\Psi}_F \\ & + c_{31} \xi_F + c_{32} \eta_F + c_{33} \Psi_F = - \bar{\xi}_0 \sum_{i=2}^I m_i \ddot{y}_i + \bar{\eta}_0 \sum_{i=2}^I m_i \ddot{x}_i \\ & - \sum_{i=2}^I m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i) - \sum_{i=2}^I J_i \ddot{\varphi}_i \quad (3) \end{aligned}$$

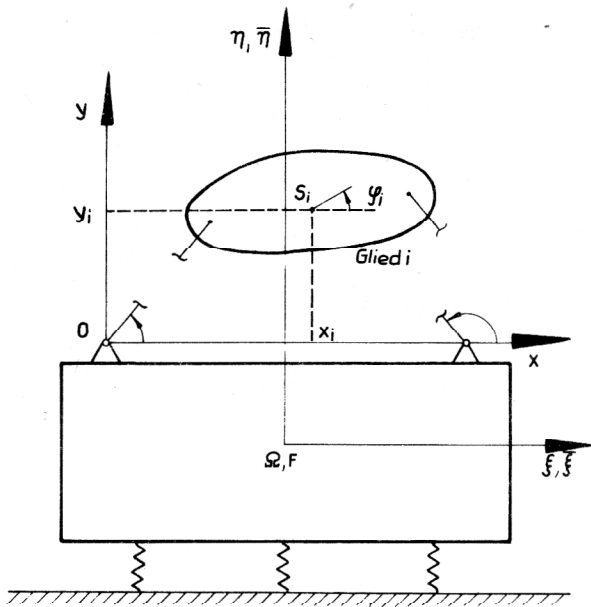


Bild 1

Dabei bedeuten:

- $b_i$  Dämpfungsbeiwert
- $c_{ij}$  Federkonstante
- $m_i$  Masse des Getriebegliedes  $i$
- $m_F$  Masse des Gestells
- $m_G$  Masse des Getriebes ( $m_G = \sum m_i$ )
- $x_i, y_i$  Koordinaten des Schwerpunktes des Getriebegliedes  $i$  im gestellfesten  $x$ - $y$ -System
- $I$  Anzahl der Getriebeglieder ( $i = 1$  für Gestell)
- $J_i$  Massenträgheitsmoment des Getriebegliedes  $i$  bzgl. seiner Schwerpunktschse
- $J_F$  Massenträgheitsmoment des Gestells bzgl. seiner Schwerpunktschse

$$M(\Omega t) = \begin{bmatrix} m_F + m_G & 0 & -m_G \bar{\eta}_0 - a_2 \\ 0 & m_F + m_G & m_G \bar{\xi}_0 + a_1 \\ -m_G \bar{\eta}_0 - a_2 & m_G \bar{\xi}_0 + a_1 & J_F + \sum_{i=2}^I J_i + m_G (\bar{\xi}_0^2 + \bar{\eta}_0^2) + a_3 + 2\bar{\xi}_0 a_1 + 2\bar{\eta}_0 a_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$B(\Omega t) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & -2\dot{a}_2 \\ 0 & b_2 & 2\dot{a}_1 \\ 0 & 0 & \dot{a}_3 + 2\bar{\xi}_0 \dot{a}_1 + 2\bar{\eta}_0 \dot{a}_2 + b_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$C(\Omega t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} - \ddot{a}_2 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} + \ddot{a}_1 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$\xi_F, \eta_F$  Koordinaten des Schwerpunktes  $F$  des Gestells im raumfesten  $\xi$ - $\eta$ -System

$\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0$  Koordinaten des Punktes  $O$  im gestellfesten  $\bar{\xi}$ - $\bar{\eta}$ -System

$\varphi_i$  Drehung des Getriebegliedes  $i$  bzgl.  $x$ -Achse

$\Psi_F$  Drehung des Gestells bzgl.  $\xi$ -Achse

Die Federkonstanten  $c_{ij}$  ( $c_{ij} = c_{ji}$ ) werden nach den in [1] beschriebenen Formeln berechnet.

Für eine günstige Beschreibung der Bewegungsgleichungen des Gestells führen wir neue Bezeichnungen ein:

$$a_1 = \sum_{i=2}^I m_i x_i \quad (4)$$

$$a_2 = \sum_{i=2}^I m_i y_i \quad (5)$$

$$a_3 = \sum_{i=2}^I m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (6)$$

$$a_4 = \sum_{i=2}^I [m_i (x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i) + J_i \ddot{\varphi}_i] \quad (7)$$

Im Maschinenbau werden häufig ungleichmäßig übersetzende Mechanismen mit gleichmäßig umlaufender Antriebskurbel ( $q_1 = \Omega t$ ) verwendet. Im folgenden soll dieser wichtige Fall untersucht werden. Damit sind  $a_i(\Omega t)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) periodische Funktionen von  $t$  mit der Periode  $T = 2\pi/\Omega$ .

Nun können die linearen Schwingungsdifferentialgleichungen des Gestells ebener Mechanismen (1) bis (3) in der folgenden Matrizendarstellung geschrieben werden:

$$M(\Omega t) \ddot{q} + B(\Omega t) \dot{q} + C(\Omega t) q = h(\Omega t) \quad (8)$$

Dabei sind:

$$h(\Omega t) = \begin{bmatrix} -\ddot{a}_1 & & & \\ -\ddot{a}_2 & & & \\ -\bar{\xi}_0 \ddot{a}_2 + \bar{\eta}_0 \ddot{a}_1 - a_4 & & & \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} \xi_F \\ \eta_F \\ \Psi_F \end{bmatrix} \quad (12)$$

### 3. Bestimmung der Stabilitätsparameter und der periodischen Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems

Wir betrachten ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_s = p_{s1}(t)x_1 + \dots + p_{sn}(t)x_n, \quad (s = 1, \dots, n), \quad (13)$$

wobei  $p_{sj}(t)$  stetige periodische Funktionen von  $t$  mit der Periode  $T$  sind.

Das Gleichungssystem (13) kann in der folgenden Matrixdarstellung geschrieben werden:

$$\dot{x} = P(t)x \quad (14)$$

Es seien  $x_{sj}(t)$  ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gl. (13). Der erste Index bezeichnet hier und im folgenden die Nummer der Funktion in einer bestimmten Lösung und der zweite Index die Nummer der Lösung. Mit den Bezeichnungen

$$\Phi(T) = \begin{bmatrix} x_{11}(T) & x_{12}(T) & \dots & x_{1n}(T) \\ x_{21}(T) & x_{22}(T) & \dots & x_{2n}(T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(T) & x_{n2}(T) & \dots & x_{nn}(T) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

läßt sich die charakteristische Gleichung des linearen Differentialgleichungssystems mit periodischen Koeffizienten (13) in der Form

$$|\Phi(T) - \rho E| = 0 \quad (16)$$

beschreiben [3].

Zur Berechnung der Werte von Elementen der Matrix  $\Phi(T)$  werden wir eine numerische Methode benutzen. Dazu teilen wir das Intervall  $[0, T]$  in  $m$  gleiche Teile der Länge

$$h = t_i - t_{i-1} = \frac{T}{m}$$

ein;  $h$  ist die Schrittweite. Die Teilpunkte sind:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$$

Nach dem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung [4] werden die Näherungswerte von Elementen der Matrix  $\Phi(T)$  nach folgender Formel berechnet [5]:

$$\Phi(T) = \prod_{i=m-1}^0 A_i \quad (17)$$

Dabei sind:

$$A_{i-1} =$$

$$E + \frac{1}{6} \left\{ h[P(t_{i-1}) + 4P(t_{i-1} + \frac{h}{2}) + P(t_i)] + h^2[P(t_{i-1})P(t_{i-1} + \frac{h}{2}) + P^2(t_{i-1} + \frac{h}{2}) + P(t_{i-1} + \frac{h}{2})P(t_i)] + \frac{h^3}{2}[P(t_{i-1})P^2(t_{i-1} + \frac{h}{2}) + P^2(t_{i-1} + \frac{h}{2})P(t_i)] + \frac{h^4}{4}P(t_{i-1})P^2(t_{i-1} + \frac{h}{2})P(t_i) \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

Aus Gl. (16) kann man die Ermittlung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung in die Berechnung der Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix  $\Phi(T)$  überführen:

$$(\Phi(T) - \rho_k E) y_k = 0 \quad (19)$$

Mithin setzt sich der Rechenalgorithmus zur Bestimmung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung des linearen Differentialgleichungssystems mit periodischen Koeffizienten (13) aus folgenden Operationen zusammen:

1. Berechnung der Werte von Elementen der Matrix  $\Phi(T)$  nach der Formel (17)
2. Berechnung aller Eigenwerte  $\rho_k$  und zugehöriger Eigenvektoren  $y_k$  der Matrix  $\Phi(T)$  nach der Gleichung (19).

Es ist zu beachten, daß die Eigenwerte und Eigenvektoren der nichtsymmetrischen reellen Matrizen komplex werden können. Jedoch bei der Untersuchung der Stabilität des linearen Differentialgleichungssystems (13) ist es notwendig, nur den Eigenwert mit höchstem Betrag zu berechnen.

Zur Bestimmung des stabilen Parametervektors des linearen Differentialgleichungssystems mit periodischen Koeffizienten (13) werden wir die in [6] aufgezeichnete Methode benutzen.

Nun betrachten wir ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = P(t)x + f(t) \quad (20)$$

wobei die Matrix  $P(t)$  und der Vektor  $f(t)$  periodisch in  $t$  mit der Periode  $T$  sind.

Wenn das Differentialgleichungssystem (14) keine periodische Lösung mit der Periode  $T$  (außer der Lösung  $x = 0$ ) hat, so gibt es genau eine periodische Lösung mit der Periode  $T$  vom Differentialgleichungssystem (20). Daraus folgt: wenn alle Wurzeln  $\rho_k$  der charakteristischen Gleichung (16) dem Betrage nach kleiner als Eins sind, so hat das Differentialgleichungssystem (20) genau eine periodische Lösung mit der Periode  $T$  [7]. Zur nu-

merischen Ermittlung der periodischen Lösung des linearen Differentialgleichungssystems mit periodischen Koeffizienten (20) lässt sich oft vorteilhaft die in [5] aufgezeichnete Methode anwenden.

#### 4. Berechnung der dynamischen Stabilitätsparameter und periodischen Schwingungen des Gestells

Mit den Substitutionen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dots \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}(\Omega t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{P}(\Omega t) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \dots & \dots \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (22)$$

erhält man aus Gl. (8) das lineare Schwingungsdifferentialgleichungssystem des Gestells ebener Mechanismen in folgender Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(\Omega t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(\Omega t) \quad (23)$$

Hierbei sind die Matrix  $\mathbf{P}(\Omega t)$  und der Vektor  $\mathbf{f}(\Omega t)$  periodisch nach  $t$  mit der Periode  $T = 2\pi/\Omega$ .

Mit der Matrizendarstellung (23) ist es günstig, die im Abschnitt 3 aufgezeichnete Methode zur Berechnung der dynamischen Stabilitätsparameter und periodischen Schwingungen des Gestells ebener Mechanismen anzuwenden.

Entsprechend der angegebenen Methode wurde im Lehrstuhl Theoretische Mechanik der Polytechnischen Hochschule Hanoi ein Teilprogramm zur Ermittlung der dynamischen Stabilitätsparameter und periodischen Schwingungen des Gestells ebener Koppelgetriebe aufgebaut. Als Programmiersprache wurde FORTRAN verwendet.

#### 5. Anwendungsbeispiel

Das mechanische Modell des Gestells eines viergliedrigen Getriebes ist in Bild 2 dargestellt.

Die Daten des viergliedrigen Getriebes werden in der Tabelle 1 angegeben.

Außerdem müssen wir die Daten der geometrischen und kinetischen Parameter des Gestells angeben:

Tabelle 1

Glied $i$	$l_i$ (cm)	$\xi_{ii}$ (cm)	$\eta_{ii}$ (cm)	$m_i$ (kg)	$J_i$ (kg cm <sup>2</sup> )
2	7,00	3,00	0,00	0,50	35,00
3	37,00	18,00	0,00	0,60	70,00
4	16,00	8,00	0,00	0,25	60,00

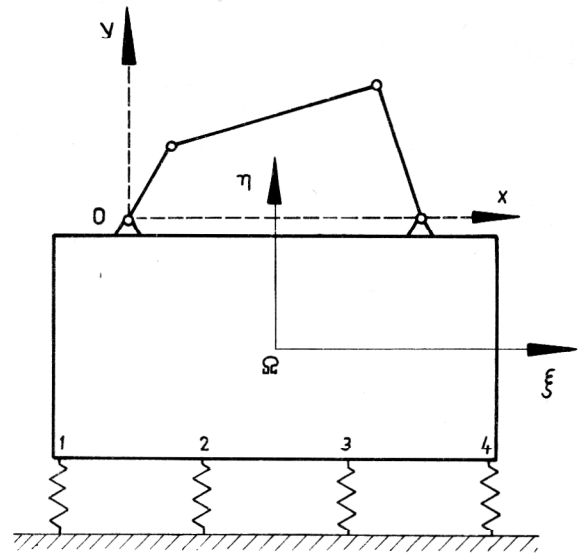


Bild 2

$$\bar{\xi}_0 = -2l_0, \bar{\xi}_1 = -3l_0, \bar{\xi}_2 = -l_0, \bar{\xi}_3 = l_0, \bar{\xi}_4 = 3l_0$$

$$\bar{\eta}_0 = 2l_0, \bar{\eta}_1 = -2l_0, \bar{\eta}_2 = -2l_0, \bar{\eta}_3 = -2l_0, \bar{\eta}_4 = -2l_0$$

$$m_F = 18 \text{ kg}, J_F = 7800 \text{ kg cm}^2$$

$$k_j = k_0, \bar{k}_j = \bar{k}_0 \quad (j = 1, \dots, 4)$$

Die numerische Berechnung dieses Beispiels erfolgte mit dem Teilprogramm zur Ermittlung der dynamischen Stabilitätsparameter und periodischen Schwingungen des Gestells ebener Koppelgetriebe für mehrere Varianten auf der EDV-Anlage Minsk-32.

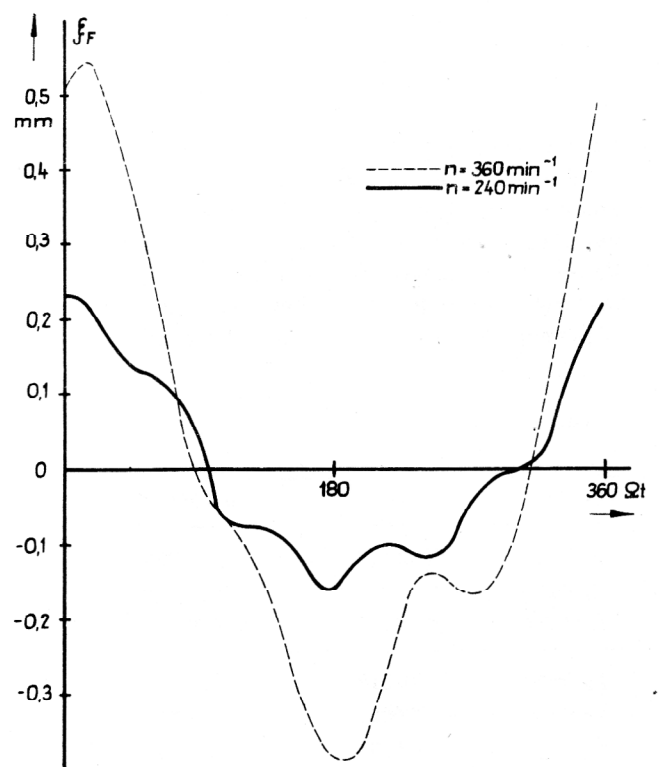


Bild 3

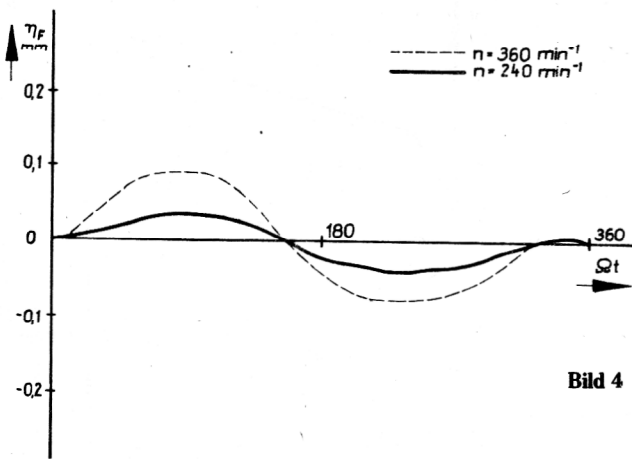


Bild 4

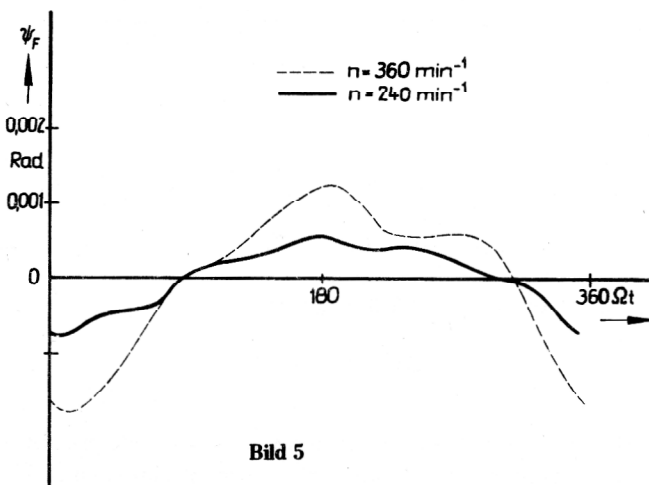


Bild 5

Tabelle 2

$n (\text{min}^{-1})$	$\rho_{\max}$
240	0,602127
360	0,508802

Für die Dämpfungszahlen  $b_1 = 0,5 \text{ kg/s}$ ,  $b_2 = 0,5 \text{ kg/s}$ ,  $b_3 = 0,05 \text{ kgm/s}$ , die Federkonstante  $k_o = k_o = 200 \text{ kp/cm}$  und die Länge  $l_o = 10 \text{ cm}$  werden die erhaltenen Berechnungsergebnisse in den Tabellen 2 und 3 sowie in den Bildern 3 bis 5 dargestellt. Die Tabelle 2 zeigt den Betrag der Wurzeln mit höchstem Wert der charakteristischen Gleichung bei verschiedenen Umdrehungszahlen des Antriebsgliedes.

Tabelle 3

$t = 0 \text{ s}$	$n = 240 \text{ min}^{-1}$	$n = 360 \text{ min}^{-1}$
$\xi_F (\text{m})$	0,000224	0,000501
$\eta_F (\text{m})$	-0,000001	-0,000000
$\psi_F (\text{Rad})$	-0,000729	-0,001636
$\dot{\xi}_F (\text{m/s})$	0,002318	0,011054
$\dot{\eta}_F (\text{m/s})$	-0,000022	-0,000197
$\dot{\psi}_F (\text{1/s})$	-0,008151	-0,039094

In der Tabelle 3 sind einige Berechnungsergebnisse der Anfangswerte der periodischen Lösungen dargestellt. Die Bilder 3, 4 und 5 zeigen an, wie sich die Schwingungen des Gestells eines viergliedrigen Getriebes ändern.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Nguyen van Khang: Über die Relativbewegung ebener Mechanismen. Rev. Roum. Techn. – Mec. Appl. 23 (1978), N. 2, p. 311 – 319.
- [ 2 ] Nguyen van Khang: Zur Berechnung der dynamischen Stabilitätsbedingungen und periodischen Schwingungen des Gestells ebener Mechanismen. Rev. Roum. Techn. – Mec. Appl. 25 (1980), N. 2, p. 269 – 284.
- [ 3 ] Demidowitsch, B. P.: Lektionen über die mathematische Stabilitätstheorie (russ.). Moskau: Verlag Nauka 1967.
- [ 4 ] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag 1955.
- [ 5 ] Ronto, W. A.: Über die Lösungen der linearen Differentialgleichungssysteme mit periodischen Koeffizienten (russ.). Sammelbd. „Metod integralnykh mnogobrasii w nelincinykh differencialnykh urawnenijach“. Kiew: Izd. Institut für Mathematik 1973.
- [ 6 ] Nguyen van Khang: Bestimmung der Stabilitätsparameter eines linearen Differentialgleichungssystems mit periodischen Koeffizienten (vietnames.). Journal of Mechanics, Hanoi 1981, N. 3, S. 12 – 16.
- [ 7 ] Hale, J. K.: Oscillations in nonlinear systems. New York: McGraw-Hill 1963.
- [ 8 ] Gumpert, W.: Zum Verfahren von Blaes für die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Berichte des IV. IKM, Band 2, Weimar 1967.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Nguyen van Khang  
Polytechnische Hochschule  
Lehrstuhl Theoretische Mechanik  
Hanoi