

# MISES-Fließbedingung für Rotationsschalen

Albrecht Oschatz

## 0. Einleitung

Bei der Traglastberechnung für Flächentragwerke ist es wie bei der elastischen Berechnung üblich, mit den Schnittgrößen zu arbeiten. Die für die Spannungen vorliegende Fließbedingung wird deshalb in eine Form für die Schnittgrößen überführt. Bei Rotationsschalen ergeben sowohl die Fließbedingung von Huber-v. Mises-Hencky (HMH) als auch die Fließbedingung von Coulomb-Tresca (CT) nichtlineare Fließbedingungen für die Schnittgrößen.

In der Praxis verwendet man deshalb oft Näherungsfließbedingungen mit auf der „sicheren Seite“ liegenden Ergebnissen. Steigende Belastungen und Fragen der Materialökonomie erfordern aber eine immer genauere Berechnung. Für die Traglastberechnung bedingt das die Verwendung einer möglichst exakten Fließbedingung. Bei dicken Schalen sind zusätzlich der Trapezeffekt, die Querkraftschubspannung und die Normalspannung senkrecht zur Schalenmittelfläche zu berücksichtigen.

## 1. Grundlagen

Wir verwenden das in Bild 1 angegebene Koordinatensystem mit den Koordinaten  $s$  in Meridianrichtung,  $\vartheta$  in Umfangsrichtung und  $z$  senkrecht zur Schalenmittelfläche. Die Krümmungsradien sind  $r_s$  und  $r_\vartheta$ , die Schalendicke ist  $h$ .

Bei rotationssymmetrischer Belastung existieren nur die in Bild 2 angegebenen Schnittmomente  $m_s$ ,  $m_\vartheta$ , die Schnittkräfte  $n_s$ ,  $n_\vartheta$  und die Querkraft  $q$ .

Mit Berücksichtigung des Trapezeffektes ergeben sich die Schnittgrößen aus den Spannungen  $\sigma_s$ ,  $\sigma_\vartheta$  und  $\tau$  zu

$$\begin{aligned}
 m_s &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_s \left(1 + \frac{z}{r_\vartheta}\right) z dz \\
 m_\vartheta &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\vartheta \left(1 + \frac{z}{r_s}\right) z dz \\
 n_s &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_s \left(1 + \frac{z}{r_\vartheta}\right) dz \\
 n_\vartheta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_\vartheta \left(1 + \frac{z}{r_s}\right) dz \\
 q &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau \left(1 + \frac{z}{r_\vartheta}\right) dz
 \end{aligned} \tag{1}$$

Den Schnittgrößen sind die Geschwindigkeiten der Krümmungen  $\dot{\kappa}_s$  und  $\dot{\kappa}_\vartheta$ , der Dehnungen  $\dot{\epsilon}_s$  und  $\dot{\epsilon}_\vartheta$  sowie der Winkeländerung  $\dot{\gamma}$  dual zugeordnet. Im weiteren wird der Zusatz „Geschwindigkeit“ bei den Verzerrungen weggelassen, da bei der Traglastberechnung diese Größen selbst nicht auftreten und so eine Verwechslung ausgeschlossen ist.

Fassen wir die Schnittgrößen und die Verzerrungen zu Vektoren zusammen,

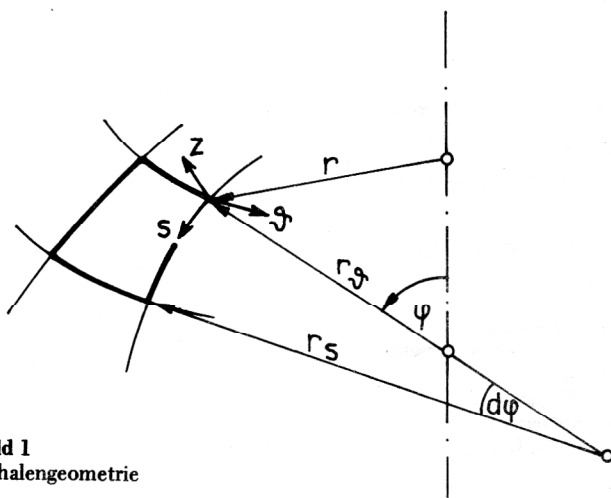


Bild 1  
Schalengeometrie

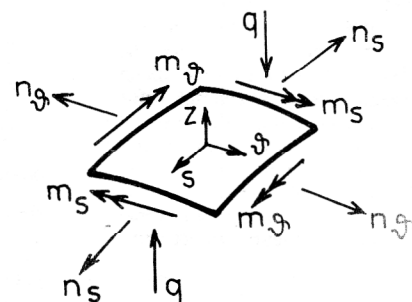


Bild 2  
Schnittgrößen

$$\vec{y}^T = (m_s, m_g, n_s, n_g, q) \quad (2)$$

$$\vec{x}^T = (\dot{\kappa}_s, \dot{\kappa}_g, \dot{\epsilon}_s, \dot{\epsilon}_g, \dot{\gamma})$$

so beträgt die Dissipationsarbeit  $\dot{W}$  je Flächenelement

$$\dot{W} = \vec{y}^T \dot{\vec{x}} = m_s \dot{\kappa}_s + m_g \dot{\kappa}_g + n_s \dot{\epsilon}_s + n_g \dot{\epsilon}_g + q \cdot \dot{\gamma} \quad (3)$$

Die Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verzerrungen ergeben sich aus der Fließbedingung

$$\Phi(m_s, m_g, n_s, n_g, q) = 0 \quad (4)$$

und dem assoziierten Fließgesetz von v. Mises

$$\dot{\kappa}_s = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial m_s} \quad \dot{\epsilon}_s = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial n_s} \quad \dot{\gamma} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial q} \quad (5)$$

$$\dot{\kappa}_g = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial m_g} \quad \dot{\epsilon}_g = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial n_g}$$

Der Faktor  $\dot{\lambda}$  ist eine Funktion der Koordinate  $s$  ( $\dot{\lambda} \geq 0$ ).

## 2. Berechnung der Fließbedingung für die Schnittgrößen

Es gibt prinzipiell zwei Methoden, um aus einer Fließbedingung für die Spannungen die Fließbedingung für die Schnittgrößen herzuleiten. Sie basieren auf den bekannten Traglastsätzen (statisch zulässiges oder kinematisch mögliches System). Das Ergebnis ist eine Fließbedingung für die Schnittgrößen und die Spannungsverteilung über die Schalendicke  $h$ . Die Spannungsließbedingung ist dabei in jedem Punkt erfüllt, während die Gleichgewichtsbedingungen und die Randbedingungen für die Spannungen nur im Mittel erfüllt werden, d. h. nur für die Schnittgrößen.

Auch ohne Berücksichtigung des Trapezeffektes und des Einflusses der Querkraft ist eine geschlossene Darstellung der Fließbedingung für die Schnittgrößen in Form der Gleichung (4) nicht möglich. Man erhält eine Parameterdarstellung mit 3 Parametern. Das erschwert eine Traglastberechnung außerordentlich. Deshalb benutzt man häufig Näherungen für die Fließbedingung der Schnittgrößen.

Erstens besteht die Möglichkeit, sich auf mathematischem Wege eine geschlossene Näherungsließbedingung abzuleiten. In [1] findet man so eine Näherung für die Kreiszyinderschale. Um die maximale Abweichung gering zu halten, befinden sich Teile der Näherungsließbedingung innerhalb und außerhalb der exakten Fließbedingung. Für damit berechnete Traglasten ist von vornherein keine Aussage möglich, ob diese über oder unter dem exakten Wert liegen.

Eindeutig innerhalb oder außerhalb der Fließbedingung liegende Näherungsließbedingungen erhält man, wenn bei deren Berechnung für die Spannungen oder die Verzerrungen Näherungsansätze verwendet werden. Aller-

dings ist die Wahl geeigneter Näherungen für die Spannungen oder Verzerrungen schwierig, da das Ziel nicht in einer Schranke für die Fließbedingung, sondern in einer geschlossenen darstellbaren Form besteht. Eine sehr gute untere Schranke wird im Abschnitt 5. vorgestellt. Gute Obere Schranken sind dem Autor nicht bekannt.

## 3. Berücksichtigung des Trapezeffektes und der Querkraftschubspannung

### 3.1. Exakte Fließbedingung

Zur Herleitung der Fließbedingung für die Schnittgrößen wird die mit der Variation der Spannungsverteilung arbeitende Methode von Landgraf [2] benutzt. Mit der Spannungsließbedingung

$$\Phi = \sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_g + \sigma_g^2 + 3\tau^2 - \sigma_F^2 = 0 \quad (6)$$

lautet das Variationsproblem

$$\begin{aligned} & \dot{\kappa}_s \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_s \left(1 + \frac{z}{r_g}\right) z dz + m_s \right] \\ & + \dot{\kappa}_g \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_g \left(1 + \frac{z}{r_s}\right) z dz + m_g \right] \\ & + \dot{\epsilon}_s \left[ - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_s \left(1 + \frac{z}{r_g}\right) dz + n_s \right] \\ & + \dot{\epsilon}_g \left[ - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_g \left(1 + \frac{z}{r_s}\right) dz + n_g \right] \\ & + \dot{\gamma} \left[ - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau \left(1 + \frac{z}{r_g}\right) dz + q \right] \\ & + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mu (\sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_g + \sigma_g^2 + 3\tau^2 - \sigma_F^2) dz \end{aligned} \quad (7)$$

- Extremum

Für die Lagrangeschen Multiplikatoren sind in Gleichung (7) schon die ihnen entsprechenden Verzerrungen eingesetzt. Aus den Eulerschen Variationsgleichungen

$$\dot{\kappa}_s \left(1 + \frac{z}{r_g}\right) z - \dot{\epsilon}_s \left(1 + \frac{z}{r_g}\right) + \mu (2\sigma_s - \sigma_g) = 0$$

$$\dot{\kappa}_g \left(1 + \frac{z}{r_s}\right) z - \dot{\epsilon}_g \left(1 + \frac{z}{r_s}\right) + \mu (2\sigma_g - \sigma_s) = 0 \quad (8)$$

$$-\dot{\gamma}\left(1 + \frac{z}{r}\right) + \mu_6 \tau = 0$$

und (6) ergeben sich die Spannungen zu

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \frac{2a + b}{\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}} \\ \sigma_g &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \frac{2b + a}{\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}} \\ \tau &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \frac{c}{\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= (-\dot{\kappa}_s z + \dot{\epsilon}_s) \left(1 + \frac{z}{r_g}\right) \\ b &= (-\dot{\kappa}_g z + \dot{\epsilon}_g) \left(1 + \frac{z}{r_s}\right) \\ c &= \frac{1}{2} \dot{\gamma} \left(1 + \frac{z}{r_g}\right) \end{aligned}$$

Durch Integration von (1) berechnet man aus (9) die Schnittgrößen für den vollplastischen Zustand. Diese Integration führt im allgemeinen Fall auf elliptische Integrale und wird zweckmäßig numerisch ausgeführt,

$$\begin{aligned} m_s &= -\frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{(2a + b) \left(1 + \frac{z}{r_g}\right) z}{\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}} dz \\ m_g &= -\frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{(2b + a) \left(1 + \frac{z}{r_s}\right) z}{\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}} dz \\ n_s &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{(2a + b) \left(1 + \frac{z}{r_g}\right)}{\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}} dz \\ n_g &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{(2b + a) \left(1 + \frac{z}{r_s}\right)}{\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}} dz \\ q &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{c \left(1 + \frac{z}{r_g}\right)}{\sqrt{a^2 + ab + b^2 + c^2}} dz \end{aligned} \quad (10)$$

(10) ist eine Parameterdarstellung für die Fließbedingung der Schnittgrößen,

$$\Phi(\vec{y}) = \Phi(\vec{y}(\vec{x})) \quad (11)$$

bei der sich die Parameter  $\dot{\kappa}_s, \dot{\kappa}_g, \dot{\epsilon}_s, \dot{\epsilon}_g$  und  $\dot{\gamma}$  nicht eliminieren lassen. Da sich der Verzerrungsvektor  $\vec{\epsilon}$  nur bis auf einen Faktor bestimmen läßt, ist eine Normierung zweckmäßig. Bei der Traglastberechnung ist die Beantwortung von zwei Fragen wichtig:

- Wie groß ist der Auslastungsgrad  $v$  oder eine Vergleichsschnittgröße bei einem gegebenen Schnittgrößenvektor  $\vec{y}_0$ ?
- Welchen Wert hat eine Schnittgröße  $y_k$ , damit bei vorgegebenen Schnittgrößen  $y_i (i \neq k)$  die Fließbedingung erfüllt ist?

Beide Fragestellungen führen zu nichtlinearen Gleichungssystemen:

$$\text{Fall a) } \vec{y}_0 = v \cdot \vec{y}(\vec{x}) \quad (12)$$

$$\text{Fall b) } y_i = y_i(\vec{x}) \quad i \neq k \quad (13)$$

Einige Probleme bei der numerischen Lösung dieser nichtlinearen Gleichungssysteme werden im Abschnitt 3.4. behandelt.

### 3.2. Fließbedingung ohne Trapezeffekt

Mit  $\frac{1}{r_s} = \frac{1}{r_g} = 0$  ist die Integration von (10) ausführbar.

Ohne Berücksichtigung der Querkraftschubspannungen würde diese Lösung von Hodge [3] angegeben. Eine ähnliche Darstellung wie hier finden wir bei Duszek [4].

$$\begin{aligned} m_s &= -\frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} (2\dot{\epsilon}_s + \dot{\epsilon}_g) i_1 - (2\dot{\kappa}_s + \dot{\kappa}_g) i_2 \\ m_g &= -\frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} (\dot{\epsilon}_s + 2\dot{\epsilon}_g) i_1 - (\dot{\kappa}_s + 2\dot{\kappa}_g) i_2 \\ n_s &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} (2\dot{\epsilon}_s + \dot{\epsilon}_g) i_0 - (2\dot{\kappa}_s + \dot{\kappa}_g) i_1 \\ n &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} (\dot{\epsilon}_s + 2\dot{\epsilon}_g) i_0 - (\dot{\kappa}_s + 2\dot{\kappa}_g) i_1 \\ q &= \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \dot{\gamma} i_0 \end{aligned} \quad (14)$$

mit

$$i_0 = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[ \operatorname{arsh}\left(\frac{B + Ah}{\sqrt{\Delta}}\right) - \operatorname{arsh}\left(\frac{B - Ah}{\sqrt{\Delta}}\right) \right]$$

$$i_1 = \frac{1}{A} (W_1 - W_2) - \frac{B}{2A} \cdot i_0$$

$$i_2 = \frac{1}{8A^2} \left[ (hA - 6B)W_1 + (hA + 6B)W_2 + (3B^2 - 4AC)i_0 \right]$$

$$A = \dot{\kappa}_s^2 + \dot{\kappa}_s \dot{\kappa}_y + \dot{\kappa}_y^2$$

$$B = -(2\dot{\epsilon}_s + \dot{\epsilon}_y)\dot{\kappa}_s - (2\dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_s)\dot{\kappa}_y$$

$$C = \dot{\epsilon}_s^2 + \dot{\epsilon}_s \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_y^2$$

$$D = \frac{1}{4} \dot{\gamma}^2$$

$$\Delta = 4A(C+D) - B^2 > 0$$

$$W_1 = \sqrt{\frac{1}{4} Ah^2 + \frac{1}{2} Bh + C + D}$$

$$W_2 = \sqrt{\frac{1}{4} Ah^2 - \frac{1}{2} Bh + C + D}$$

### 3.3. Kanten in der Fließbedingung

An Ecken oder Kanten sind bei gleichen Schnittgrößen verschiedene Verzerrungen möglich. Das führt zu Komplikationen bei der numerischen Behandlung und soll deshalb kurz untersucht werden.

Wir gehen von den Spannungen (9) aus und stellen die Frage, unter welchen Bedingungen sich die Verzerrungen ändern können, ohne daß sich andere Verläufe für die Spannungen ergeben. Das ist genau dann der Fall, wenn sich das Verhältnis zwischen den Zählern in (9) und dem Nenner nicht ändert. Man erhält

$$\dot{\gamma} = 0$$

$$\dot{\kappa}_s \dot{\epsilon}_y - \dot{\kappa}_y \dot{\epsilon}_s = 0 \quad (15)$$

$$|\dot{\epsilon}_s| \geq \frac{h}{2} |\dot{\kappa}_s|$$

$$|\dot{\epsilon}_y| \geq \frac{h}{2} |\dot{\kappa}_y|$$

Voraussetzung für das Auftreten einer Kante ist also das Verschwinden der Querkraft. Berücksichtigt man den Trapezeffekt, so ergibt sich kein linearer Spannungsverlauf und Momente  $m_s \neq 0$  und  $m_y \neq 0$  sind möglich.

Ohne Trapezeffekt tritt eine Kante nur bei konstanten Spannungen  $\sigma_s$  und  $\sigma_y$  auf. Die Biegemomente sind beide null. Für die Schnittkräfte gilt:

$$n_s^2 - n_s n_y + n_y^2 - \sigma_F^2 h^2 = 0 \quad (16)$$

$$m_s = 0 \quad m_y = 0 \quad q = 0$$

### 3.4. Numerische Berechnungen

Geht man von den Verzerrungen aus, so ist die Berechnung der Spannungen nach (9) und der Schnittgrößen nach (10) oder (14) möglich. Bei der numerischen Integration von (10) ist zu beachten, daß bei Sonderfällen der Nenner und der Zähler des Integranden gleichzeitig null werden. Schon anschaulich ist klar, daß der dazu gehörende Grenzwert existiert und endlich ist.

Eventuelle numerische Schwierigkeiten lassen sich umgehen, wenn in solchen Fällen der Integrationsbereich geteilt und mit dem Verfahren von Gauss gearbeitet wird. Für die Randpunkte sind dann keine Funktionswerte zu berechnen.

Benutzt man für die Integrale  $i_0$ ,  $i_1$  und  $i_2$  in Formel (14) die geschlossenen Ausdrücke, so ist in einigen Fällen auch eine doppelt genaue Berechnung nicht ausreichend. Dann muß entweder auf die numerische Integration zurückgegriffen werden oder die Ausdrücke sind für diese Sonderfälle in Reihen zu entwickeln. Größere numerische Probleme gab es bei der Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme (12) und (13). Wesentlich für die Konvergenz des erforderlichen Iterationsverfahrens ist die Startlösung  $\vec{x}_0$ . Im Abschnitt 5. wird deshalb eine gute Näherungsfließbedingung angegeben.

Zwei Verfahren wurden numerisch getestet, wobei keine Aussage über die geringere Anzahl der Iterationen möglich ist. Diese ist stark abhängig von den vorgegebenen Schnittgrößen.

Beim ersten Verfahren werden die Schnittgrößen in einen vom Trapezeffekt unabhängigen und einen abhängigen Teil zerlegt

$$\vec{y}(\vec{x}) = \vec{y}_U(\vec{x}) + \vec{y}_T(\vec{x}) \quad (17)$$

Die Schnittgrößen  $\vec{y}_T$  ergeben sich als Differenz der Schnittgrößen mit (Gleichungen (10)) und ohne (Gleichungen (14)) Trapezeffekt. Nimmt man für einen Iterationsschritt an, daß die Integrale  $i_0$ ,  $i_1$  und  $i_2$  und  $\vec{y}_T$  unabhängig von  $\vec{x}$  sind, so führt (12) oder (13) auf ein lineares Gleichungssystem für  $\vec{x}$ , wenn für  $\vec{y}_U$  die Ausdrücke (14) benutzt werden. Wenn das Verfahren sehr langsam konvergiert, so ist eine Beschleunigung durch die Einschaltung von Interpolationsschritten möglich.

Das zweite Verfahren besteht in der Linearisierung des Gleichungssystems (12). Zur Startlösung  $\vec{x}_0$  gehören die Schnittgrößen  $\vec{y}_0$ .

$$\vec{y} = V \left\{ \vec{y}_0 + \underline{C}(\vec{x} - \vec{x}_0) \right\} \quad (18)$$

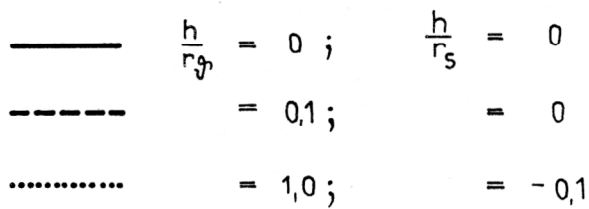
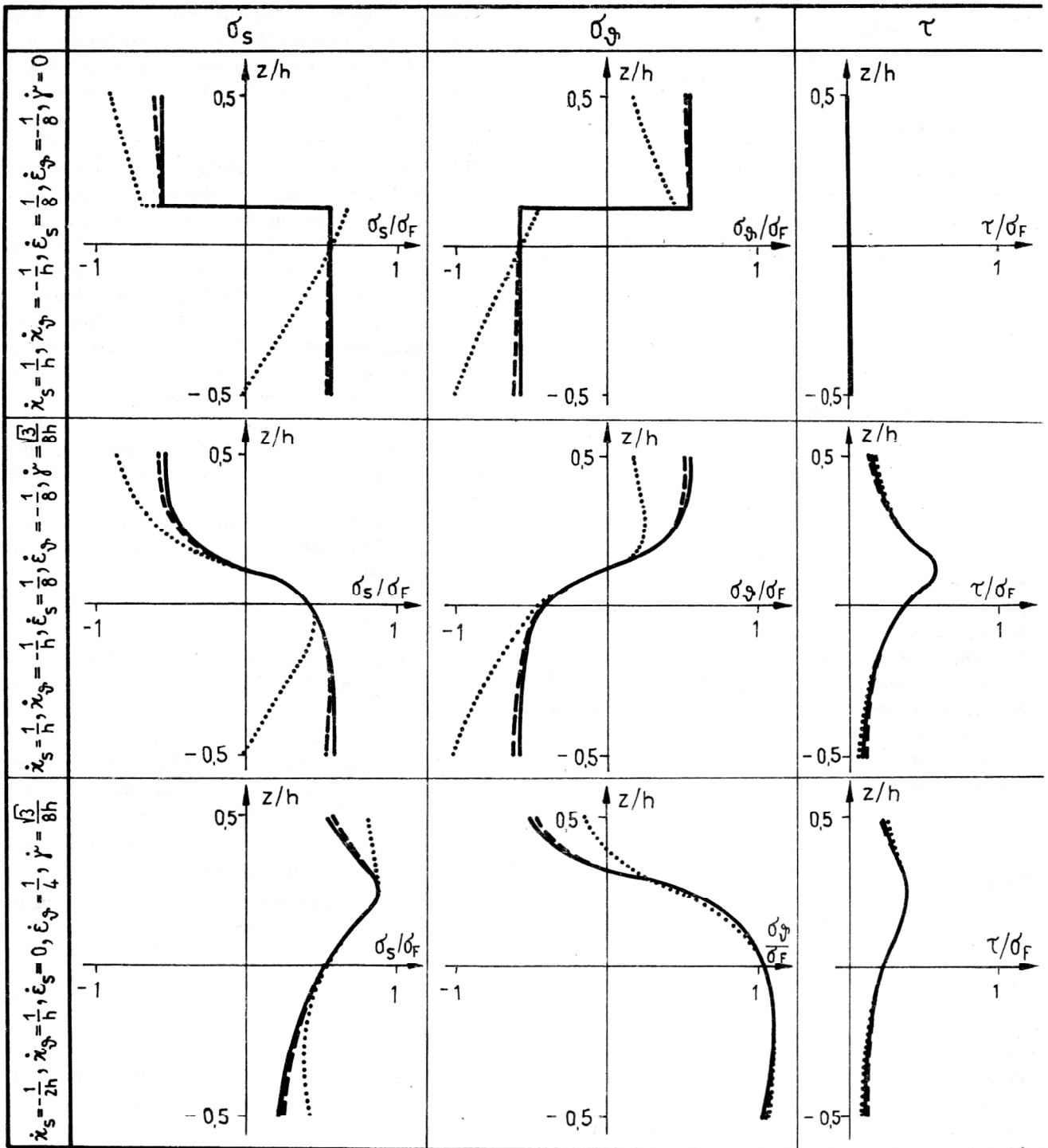
Die Koeffizienten der Matrix  $\underline{C}$  bestimmt man numerisch, da  $\vec{y}$  nur für diskrete  $\vec{x}$  bekannt ist. Analog zu (12) läßt sich das Gleichungssystem (13) lösen.

### 3.5. Beispiele

Um den Einfluß des Trapezeffektes und der Querkraftschubspannungen zu zeigen, sind im Bild 3 Spannungsverläufe und im Bild 4 Schnitte durch die Fließbedingung angegeben.

## 4. Berücksichtigung der Normalspannung $\sigma_z$

Normalspannungen  $\sigma_z$  infolge Druckbelastung  $p_i$  oder  $p_a$  (Bild 5) haben auf die Traglast einen Einfluß in der gleichen Größenordnung wie die Querkraft und der Trapezeffekt. Eine Berücksichtigung in der Fließbedingung ist nur näherungsweise möglich, da zur Berechnung von  $\sigma_z$  aus den Gleichgewichtsbedingungen auch die Ableitungen der Schnittgrößen benötigt werden. Der Ansatz



**Bild 3**  
Spannungen mit Berücksichtigung des Trapezeffektes und der Querkraftschubspannungen

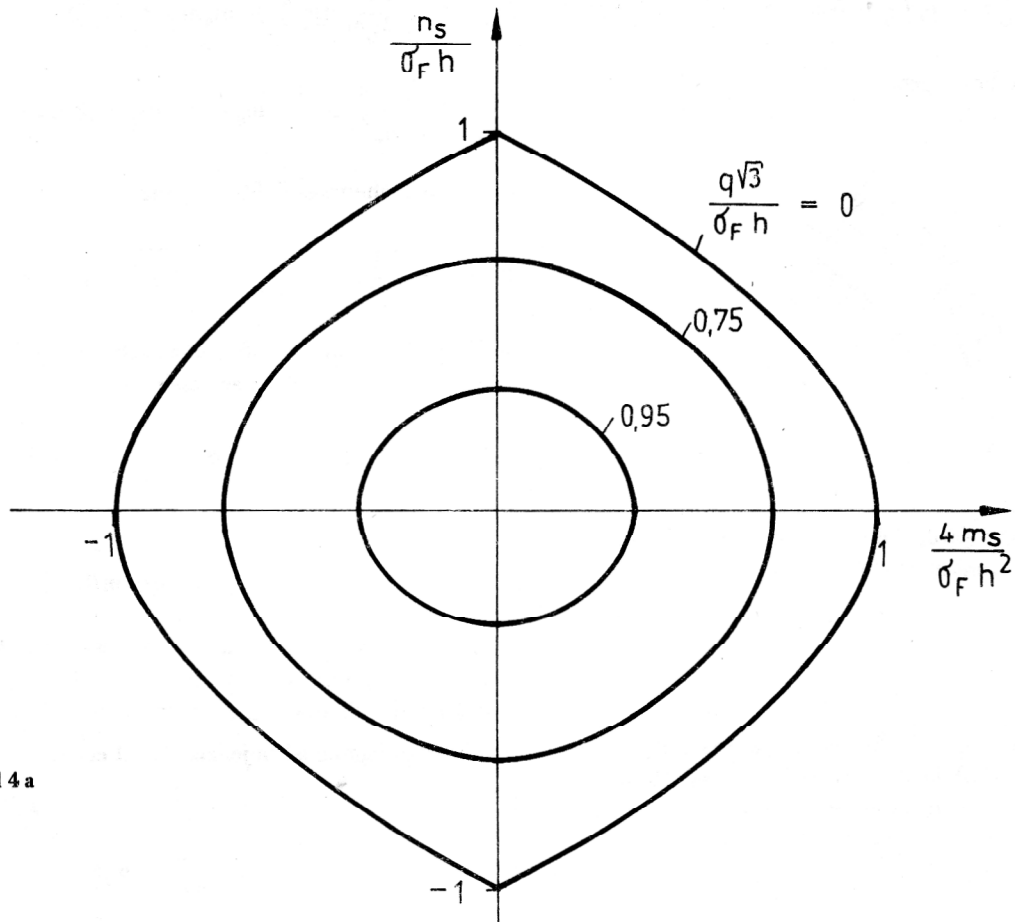


Bild 4 a

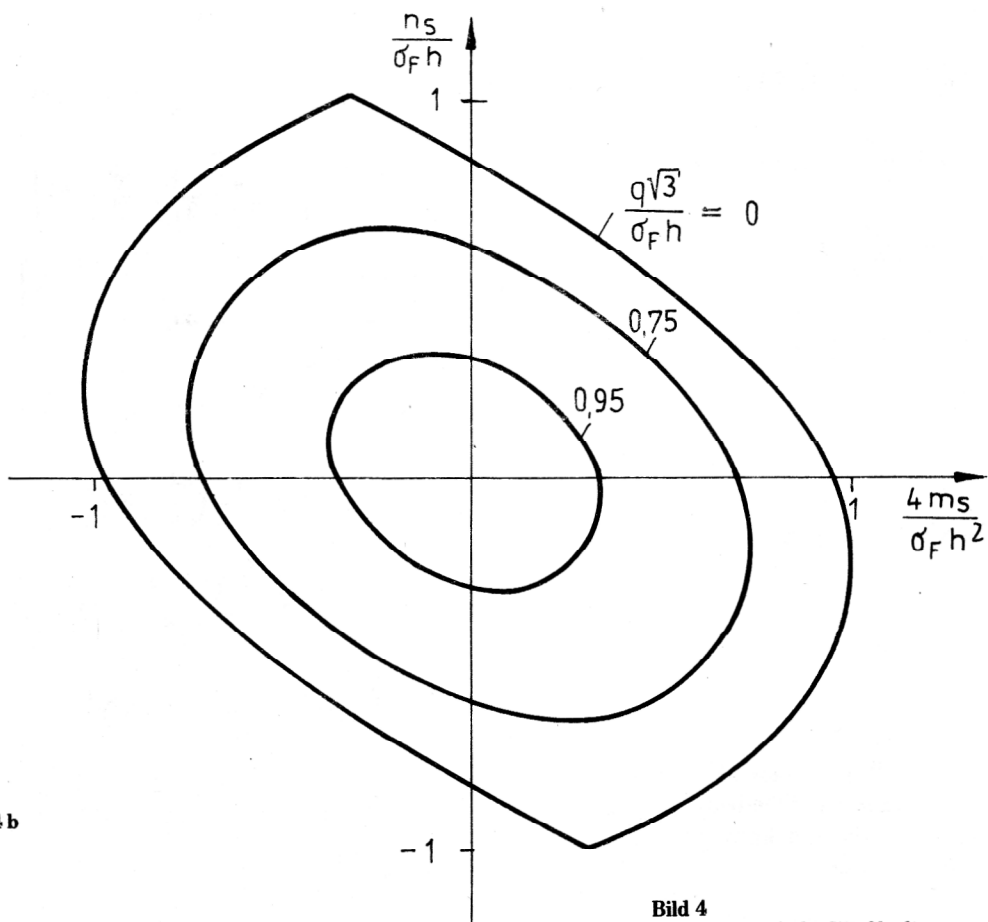


Bild 4 b

**Bild 4**  
 Schnitte durch die Fließbedingung  $m_{\vartheta} - n_{\vartheta} = 0$   
 4 a:  $h/r_s = 0$ ;  $h/r_{\vartheta} = 0$   
 4 b:  $h/r_s = -0,1$ ;  $h/r_{\vartheta} = 1$

$$\sigma_z = -p_a \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) - p_i \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right) \quad (19)$$

erfüllt die Randbedingungen.

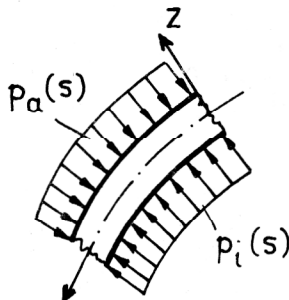


Bild 5  
Druckbelastung

Wie in [5] gezeigt wird, führt die Abspaltung eines hydrostatischen Spannungszustandes  $\sigma = \sigma_z$

$$\sigma_s = \sigma_s^* + \sigma_z \quad (20)$$

$$\sigma_{\vartheta} = \sigma_{\vartheta}^* + \sigma_z$$

auf die Fließbedingung (10) für die Spannungen  $\sigma_s^*$ ,  $\sigma_{\vartheta}^*$  und  $\tau$ . Wir setzen (20) in (1) ein und erhalten für die Schnittgrößen zwei Anteile. Mit dem Index p sind die druckabhängigen und mit \* die Anteile gekennzeichnet, die die Fließbedingung erfüllen

$$\vec{y} = \vec{y}^* + \vec{y}^p$$

$$\begin{aligned} m_s^p &= \frac{h^2}{12} (p_a - p_i) + \frac{h^3}{24 r_{\vartheta}} (p_a + p_i) \\ m_{\vartheta}^p &= \frac{h^2}{12} (p_a - p_i) + \frac{h^3}{24 r_s} (p_a + p_i) \\ n_s^p &= -\frac{h}{2} (p_a + p_i) - \frac{h^2}{12 r_{\vartheta}} (p_a - p_i) \\ n_{\vartheta}^p &= -\frac{h}{2} (p_a + p_i) - \frac{h^2}{12 r_s} (p_a - p_i) \\ q^p &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

## 5. Näherungsfließbedingungen

### 5.1. Fließbedingung von Landgraf/Wölfel

Ohne Trapezeffekt und Querkrafteinfluß ist eine sehr gute Näherung die Fließbedingung von Landgraf/Wölfel. Sie liegt innerhalb der exakten Fließbedingung. Die Abweichung beträgt maximal 4,69 %. Zum gleichen Ergebnis führten unterschiedliche Wege. Landgraf leitete diese Fließbedingung aus der exakten Fließbedingung ab, Wölfel ging von zwei Schichten mit konstanten Spannungen aus. Mit den Abkürzungen

$$n_v^2 = \frac{1}{\sigma_F^2 h^2} (n_s^2 - n_s n_{\vartheta} + n_{\vartheta}^2)$$

$$m_v^2 = \frac{16}{\sigma_F^2 h^4} (m_s^2 - m_s m_{\vartheta} + m_{\vartheta}^2) \quad (22a)$$

$$g_v^4 = \left\{ \frac{4}{\sigma_F^2 h^3} \left[ (2m_s - m_{\vartheta}) n_s + (2m_{\vartheta} - m_s) n_{\vartheta} \right] \right\}^2$$

lautet die Näherungsfließbedingung

$$\Phi = n_v^2 + \frac{1}{2} m_v^2 + \frac{1}{2} \sqrt{m_v^4 + g_v^4} - 1 = 0 \quad (22)$$

Soll der Querkrafteinfluß berücksichtigt werden, so ist  $n_v^2$  in (22) durch (23) zu ersetzen

$$n_v^2 = \frac{1}{\sigma_F^2 h^2} (n_s^2 - n_s n_{\vartheta} + n_{\vartheta}^2 + 3q^2) \quad (23)$$

### 5.2. Mit Trapezeffekt und Querkrafteinfluß

Mit einem schichtweise konstanten Ansatz für die Spannungen  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{\vartheta}$  und einer konstanten Schubspannung  $\tau$  kann auch der Trapezeffekt erfaßt werden (Bild 6).

Die Fließbedingung ist in jedem Punkt erfüllt:

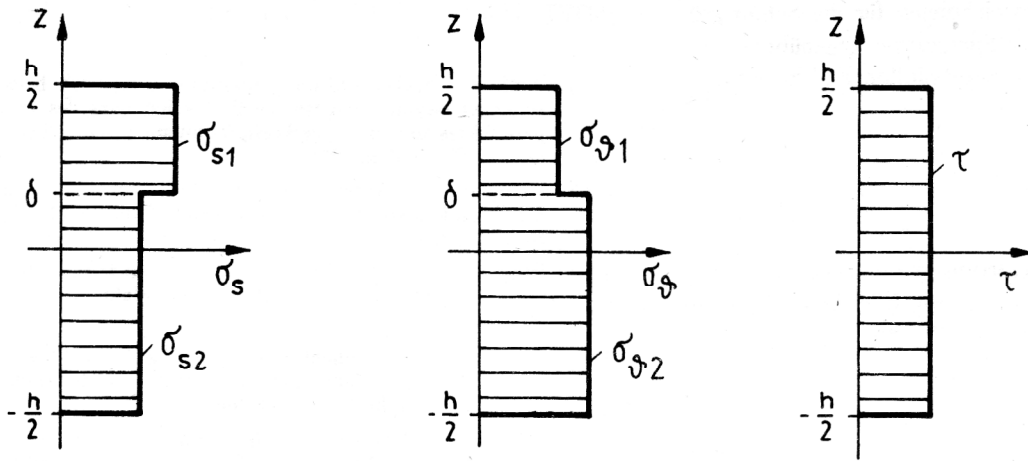
$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sigma_{s1}^2 - \sigma_{s1} \sigma_{\vartheta1} + \sigma_{\vartheta1}^2 + 3\tau^2 - \sigma_F^2 = 0 \\ \Phi_2 &= \sigma_{s2}^2 - \sigma_{s2} \sigma_{\vartheta2} + \sigma_{\vartheta2}^2 + 3\tau^2 - \sigma_F^2 = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Aus (1) folgen die Schnittgrößen

$$\begin{aligned} m_s &= -\frac{\sigma_{s1}}{2} \left[ \frac{h^2}{4} - \delta^2 + \frac{1}{3r_{\vartheta}} \left( \frac{h^3}{8} - \delta^3 \right) \right] \\ &\quad + \frac{\sigma_{s2}}{2} \left[ \frac{h^2}{4} - \delta^2 - \frac{1}{3r_{\vartheta}} \left( \frac{h^3}{8} + \delta^3 \right) \right] \\ m_{\vartheta} &= -\frac{\sigma_{\vartheta1}}{2} \left[ \frac{h^2}{4} - \delta^2 + \frac{1}{3r_s} \left( \frac{h^3}{8} - \delta^3 \right) \right] \\ &\quad + \frac{\sigma_{\vartheta2}}{2} \left[ \frac{h^2}{4} - \delta^2 - \frac{1}{3r_s} \left( \frac{h^3}{8} + \delta^3 \right) \right] \\ n_s &= \sigma_{s1} \left[ \frac{h}{2} - \delta + \frac{1}{2r_{\vartheta}} \left( \frac{h^2}{4} - \delta^2 \right) \right] \\ &\quad + \sigma_{s2} \left[ \frac{h}{2} + \delta - \frac{1}{2r_{\vartheta}} \left( \frac{h^2}{4} - \delta^2 \right) \right] \\ n_{\vartheta} &= \sigma_{\vartheta1} \left[ \frac{h}{2} - \delta + \frac{1}{2r_s} \left( \frac{h^2}{4} - \delta^2 \right) \right] \\ &\quad + \sigma_{\vartheta2} \left[ \frac{h}{2} + \delta - \frac{1}{2r_s} \left( \frac{h^2}{4} - \delta^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$$q = \tau \cdot h$$

Die Gleichungen (24) und (25) bilden die Fließbedingung mit den Parametern  $\sigma_{s1}$ ,  $\sigma_{s2}$ ,  $\sigma_{\vartheta1}$ ,  $\sigma_{\vartheta2}$ ,  $\tau$  und  $\delta$ . Eine geschlossene Elimination der Parameter ist nicht



**Bild 6**  
Spannungverteilung für Näherungsfließbedingung

möglich und deshalb eine numerische Berechnung notwendig. Günstig ist dafür die Auflösung von (25) nach den Spannungen.

$$\sigma_{s1} = \sigma_{s1}(m_s, n_s, \delta)$$

$$\sigma_{s2} = \sigma_{s2}(m_s, n_s, \delta)$$

$$\sigma_{g1} = \sigma_{g1}(m_g, n_g, \delta)$$

$$\sigma_{g2} = \sigma_{g2}(m_g, n_g, \delta)$$

$$\tau = \tau(q)$$

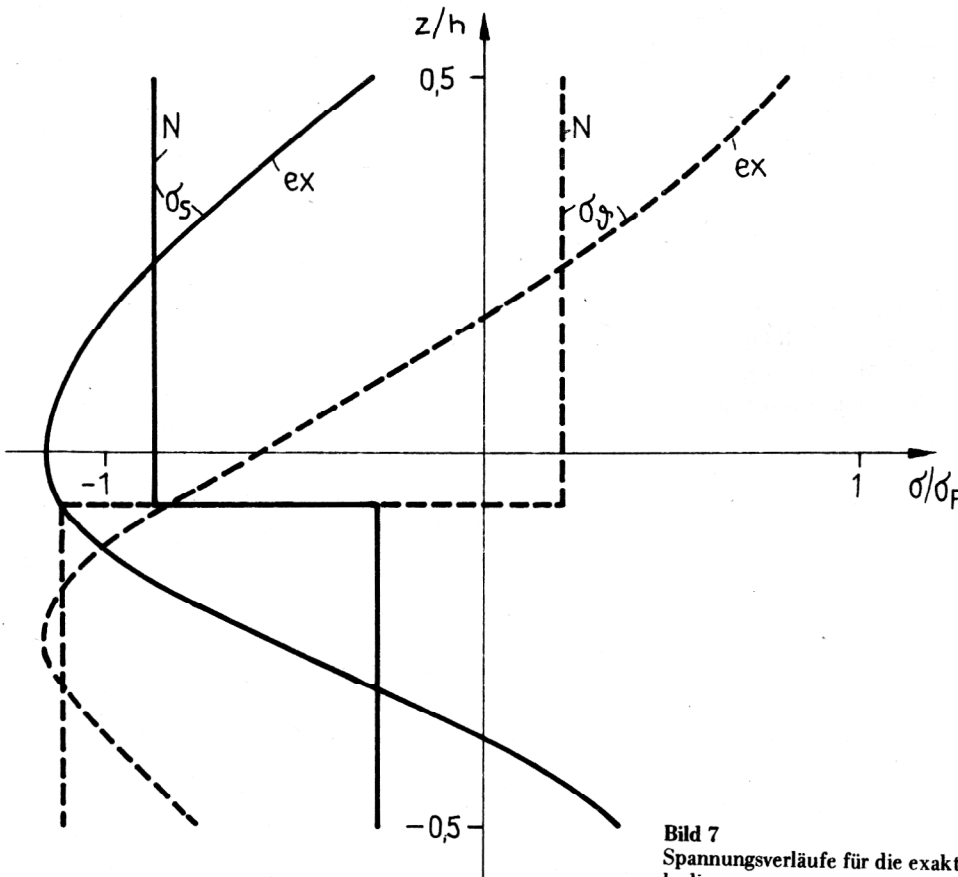
(26)

	$\frac{h}{r_s} = \frac{h}{r_g} = 0$	$\frac{h}{r_s} = 0, \frac{h}{r_g} = 0,1$	$\frac{h}{r_s} = \frac{h}{r_g} = 0,1$	$\frac{h}{r_s} = 0,1; \frac{h}{r_g} = -1$
im Mittel	3,49 %	3,50 %	3,49 %	4,14 %
maximal	6,27 %	6,67 %	6,37 %	11,79 %

Die Fließbedingungen (24) ergeben dann zwei nicht-lineare Gleichungen für die Sprungstelle  $\delta$  und den Aus-

lastungsgrad  $v$ . Die Abweichung der Näherungsfließbedingung von der exakten Fließbedingung wurde für vier Fälle numerisch bestimmt und ist in der Tabelle enthalten.

**Tabelle** Abweichung zwischen exakter und Näherungsfließbedingung



$$\frac{h}{r_s} = 0,1$$

$$\frac{h}{r_g} = -1$$

$\Phi_{ex}$ :

$$m_s = 0,112 \frac{\sigma_F \cdot h^2}{4}$$

$$m_g = -0,709 \frac{\sigma_F \cdot h^2}{4}$$

$$n_s = -0,608 \sigma_F h$$

$$n_g = -0,366 \sigma_F h$$

$$q = 0$$

$\Phi_N$ :

$$v = 1,1164$$

$$\delta = 0,07516 h$$

**Bild 7**  
Spannungsverläufe für die exakte und die Näherungsfließbedingung



Den relativ geringen Abweichungen für die Schnittgrößen stehen größere bei den Spannungen gegenüber. Im Bild 7 sind für einen ausgewählten Fall Spannungsverläufe enthalten.

### 5.3. Verzerrungen

Zur Berechnung der Verzerrungen für einen gegebenen Schnittgrößenvektor  $\vec{y}$  setzen wir (26) in die Fließbedingungen für die Spannungen (24) ein.

$$\Phi_1(\vec{y}, \delta) = 0 \quad (27)$$

$$\Phi_2(\vec{y}, \delta) = 0$$

Aus (27) folgt die Fließbedingung für die Schnittgrößen durch Eliminieren der Größe  $\delta$ .

$$\Phi_1 = 0 \rightsquigarrow \delta = f_1(\vec{y}) \quad (28)$$

$$\Phi_2 = 0 \rightsquigarrow \delta = f_2(\vec{y})$$

$$\Phi(\vec{y}) = f_1(\vec{y}) - f_2(\vec{y}) = 0 \quad (29)$$

Mit dem Fließgesetz (5) erhält man dann die Verzerrungen

$$\dot{x}_i = \lambda \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \delta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \delta} \right) \quad (30)$$

Die Verzerrungen lassen sich auch über die Variation des Spannungszustandes (Abschnitt 3.1.) berechnen.

Variabel sind aber nur die Spannungen  $\sigma_{s1}$ ,  $\sigma_{s2}$ ,  $\sigma_{\vartheta 1}$ ,  $\sigma_{\vartheta 2}$ ,  $\tau$  und die Sprungstelle  $\delta$ . Es entsteht ein nicht-lineares Gleichungssystem mit 13 Gleichungen und 18 Unbekannten, von denen z. B. die fünf Schnittgrößen vorgegeben werden können. Bis auf den Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  entsprechen die Ergebnisse der Gleichung (30).

## 6. Rechenprogramme

Für alle aufgeführten numerischen Berechnungen existieren an der Technischen Universität Dresden FORTRAN-Programme für die Rechenanlage BESM 6. Sie werden bei der Traglastberechnung von Rotationsschalen genutzt.

## LITERATUR

- [ 1 ] Wolf, P.: Traglastermittlung rotationssymmetrisch belasteter Kreiszyinderschalen bei Berücksichtigung des Trapezeffektes und der Querkraftschubspannungen. Dissertation, TU Dresden, 1970.
- [ 2 ] Landgraf, G.: Aufstellung von Fließbedingungen für Schnittgrößen von Flächentragwerken. ZAMM 48 (1968) Heft 5, S. 317 – 323.
- [ 3 ] Hodge, P. G. jr. The Mises Yield Condition for Rotationally Symmetric Shells. Quart. of Appl. Math., 18, 305, 1960.
- [ 4 ] Duszek, M. K.: Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Nr. 31, 1982, Ruhr-Universität Bochum.
- [ 5 ] Oschatz, A.: Fließbedingung für Schalen mit Berücksichtigung der Normalspannungen  $\sigma_z$ . Berichte aus der HFR Festkörpermechanik: Festigkeitsprobleme und Materialverhalten, Band A, Fachbuchverlag Leipzig 1982.

Anschrift des Verfassers:

Doz. Dr.-Ing. Albrecht Oschatz  
Technische Universität Dresden  
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens  
8027 Dresden  
Mommssenstraße 13