

## Zur Untersuchung dünner Platten im elastisch-plastischen Bereich

Hans-Georg Recke

### 0. Einleitung

Beim Erreichen der elastischen Grenzlast in einer Platte ist deren Tragfähigkeit für verformungsfähige Werkstoffe noch nicht ausgeschöpft. Ähnlich wie beim Balken ist der Spannungsverlauf über die Plattendicke im elastischen Bereich linear, so daß sich die maximalen Vergleichsspannungen an der Ober- bzw. Unterseite ergeben. Dagegen treten in der Plattenmittelfläche bei der für dünne Platten üblichen Vernachlässigung der Querkraftschubverformungen keine Spannungen auf. Somit können sich Spannungsspitzen durch örtliches Fließen abbauen. Stellen die dabei entstehenden plastischen Verformungen für die Funktionstüchtigkeit der Konstruktion kein Hindernis dar und besteht keine Gefahr des Sprödbruchs, dürfen plastische Deformationen bei der Bemessung der Platte zugelassen werden. Damit kann man eine bessere Ausnutzung des Werkstoffes erreichen. Die Spannungsumlagerungen durch örtliches Fließen sind mittels der Plastizitätstheorie [2], [3] darstellbar. Analytische Lösungen für derartig stofflich nichtlineare Randwertaufgaben sind nur in Ausnahmefällen zu finden. Dagegen gestatten numerische Verfahren, wie auch die Methode der finiten Elemente, eine Untersuchung komplizierterer Probleme.

In der vorliegenden Arbeit wird über ein FEM-Programm zur Untersuchung dünner Platten im elastisch-plastischen Bereich berichtet. Nach einer zusammenfassenden Darstellung der theoretischen Grundlagen und des programmtechnischen Ablaufs werden einige Beispiele angegeben. Hier ist deutlich zu erkennen, wie sich mit wachsender Belastung die plastischen Gebiete an der Ober- bzw. Unterseite und auch in Richtung zur Plattenmittelfläche ausbreiten.

### 1. Spannungs-Dehnungsbeziehungen im elastisch-plastischen Bereich

Im Folgenden wird homogenes, isotropes Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Die Dehnungen setzen sich aus elastischen, thermischen und plastischen Anteilen zusammen. In inkrementeller Schreibweise lautet dieser Zusammenhang, wobei als Schreibweise  $d(\ ) = (\ )'$  gelten soll,

$$\dot{d}_{ij} = \dot{d}_{ij}^{(e)} + \dot{d}_{ij}^{(t)} + \dot{d}_{ij}^{(p)} \quad (1.1)$$

Mittels des Schubmoduls  $G$  und der Querdehnungszahl  $\mu$  läßt sich das Hookesche Gesetz in der Form

$$\dot{d}_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2G} \left( \dot{s}_{ij} - \frac{\mu}{1+\mu} \delta_{ij} \dot{s}_{kk} \right) \quad (1.2)$$

schreiben. Daraus ergeben sich die Beziehungen zwischen den Zuwüchsen des Dehnungsdeviators  $\dot{d}_{ij}^{(e)}$  und des Spannungsdeviators  $\dot{s}'_{ij}$  zu

$$\dot{d}_{ij}^{(e)} = \dot{d}_{ij}^{(e)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{d}_{kk}^{(e)} = \frac{1}{2G} \left( \dot{s}'_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \dot{s}'_{kk} \right) = \frac{1}{2G} \dot{s}'_{ij}$$

und die elastische Volumendilatation zu (1.3)

$$\dot{d}_{kk}^{(e)} = \frac{1-2\mu}{2G(1+\mu)} \dot{s}'_{kk} \quad (1.4)$$

Für die thermischen Dehnungszuwüchse gilt

$$\dot{d}_{ij}^{(t)} = \delta_{ij} (\beta T)' = \delta_{ij} \dot{d}_o \quad (1.5)$$

wobei  $T$  die Temperaturdifferenz zur spannungsfreien Ausgangstemperatur und  $\beta$  der Temperaturdehnungskoeffizient ist. Für die phänomenologische Beschreibung des plastischen Verhaltens werden die Fließbedingung, die Verfestigungsregel und die Fließregel benötigt.

Die Fließbedingung liefert eine Grenze, die angibt, bei welchem Spannungszustand bleibende Verformungen eintreten können. Aufgrund ihres einfachen Aufbaus hat sich die Fließbedingung nach von Mises in verallgemeinerter Fassung

$$F = \frac{1}{2} (\dot{s}'_{ij} - a_{ij}) (\dot{s}'_{ij} - a_{ij}) - \frac{1}{3} k^2 = 0 \quad (1.6)$$

für eine numerische Behandlung als besonders vorteilhaft erwiesen. Die Fließbedingung (1.6) erfaßt sowohl isotrope als auch kinematische Verfestigung des Werkstoffes. Die isotrope Verfestigung wird durch eine affine Aufweitung der Fließhyperfläche im Spannungsraum erfaßt, die kinematische Verfestigung durch eine translatorische Verschiebung der Fließfläche im Spannungsraum beschrieben. Die Ortskoordinaten der Lageänderung sind die Mittelpunktspannungen  $a_{ij}$ .

Die Verfestigungsregel bestimmt die Änderung der Fließfläche in Abhängigkeit von der Belastungsgeschichte. Für die kinematische Verfestigung wird die lineare Prager-Regel

$$\dot{a}_{ij} = \dot{a}'_{ij} = \frac{2}{3} s_F b \dot{d}_{ij}^{(p)} \quad (1.7)$$

verwendet. Dabei sind  $s_F$  die Fließspannung des unbelasteten, spannungsfreien Materials und  $b$  eine skalare dimensionslose Größe, die der Koordinate der Mittelpunktspannung im eindimensionalen Vergleichszustand proportional ist. Die isotrope Verfestigungsregel wird einem Vorschlag von Landgraf [5] folgend in der Form

$$k = s_F \left[ \frac{c_o}{1+c_2} \left( (c_1 + d_v^{(p)})^{1+c_2} - c_1^{1+c_2} \right) - b d_v^{(p)} + 1 \right] \quad (1.8)$$

angenommen. Die freien Konstanten  $c_0, c_1, c_2$  gestatten eine Anpassung an die im eindimensionalen Versuch aufgenommene Spannungs-Dehnungs-Kennlinie. Die Ableitung

$$\frac{k}{\dot{d}_v(p)} = T_P = s_F c \quad (1.9)$$

wird als Tangentenmodul bezeichnet. Für den dimensionslosen Faktor  $c$  findet man aus Gl. (1.8)

$$c = c_0 (c_1 + d_v(p))^{c_2} - b. \quad (1.10)$$

Dabei ist das Inkrement der einachsigen plastischen Vergleichsdehnung durch

$$\dot{d}_v(p) = \left( \frac{2}{3} \dot{d}_{ij}(p) \dot{d}_{ij}(p) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

definiert.

Die Fließregel

$$\dot{d}_{ij}(p) = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} = \dot{\lambda} (s'_{ij} - a_{ij}) \quad (1.12)$$

geht wiederum auf von Mises zurück und besagt, daß ein plastisches Fließen im Spannungsraum normal zur Fließfläche erfolgt. Der in dieser Annahme enthaltene skalare Faktor  $\dot{\lambda}$  wird mittels der Konsistenzbedingung  $F = 0$  bestimmt. Damit wird ein Verlassen der Fließfläche für die mit einem Belastungszuwachs verbundenen Spannungsänderungen ausgeschlossen. Aus dieser Forderung folgt

$$\dot{\lambda} = \frac{9}{4k^2 s_F (b+c)} (s'_{kl} - a_{kl}) \dot{s}_{kl}. \quad (1.13)$$

Mit Hilfe der Abkürzung

$$N = 1 + \frac{s_F}{3G} (b+c) \quad (1.14)$$

und des Tensors 4. Stufe

$$T_{ijkl} = \frac{3}{2k^2 N} (s'_{ij} - a_{ij})(s'_{kl} - a_{kl}) \quad (1.15)$$

läßt sich Gl. (1.12) in der Form

$$\dot{d}_{ij}(p) = \frac{3N}{2s_F (b+c)} T_{ijkl} \dot{s}_{kl} \quad (1.16)$$

schreiben.

Der Gesamtdehnungszuwachs (1.1) ergibt sich durch Addition der Gln. (1.2), (1.5) und (1.16) zu

$$\dot{d}_{ij} = \frac{1}{2G} \left( s'_{ij} - \frac{\mu}{1+\mu} \delta_{ij} \dot{s}_{kk} \right) + \delta_{ij} \dot{d}_o + \frac{3N}{2s_F (b+c)} T_{ijkl} \dot{s}_{kl} \quad (1.17)$$

woraus man als Spannungszuwachs

$$\dot{s}_{ij} = 2G \left[ \dot{d}_{ij} + \frac{\mu}{1-\mu} \delta_{ij} \dot{d}_{kk} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \delta_{ij} \dot{d}_o - T_{ijkl} \dot{d}_{kl} \right] \quad (1.18)$$

erhält.

Die Untersuchung dünner Platten im Rahmen der Kirchhoffschen Theorie setzt den ebenen Spannungszustand

voraus. Die Forderung  $s_{3i} = 0, i = 1, 2, 3$  führt auf  $(\alpha, \beta, \lambda, \mu = 1, 2)$

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\alpha\beta} = & \frac{2G}{1-\mu} [(1-\mu) \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} + \mu \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} - \frac{1}{N_1} ((1-\mu)^2 T_{\alpha\beta\lambda\mu} \\ & - \mu(1-\mu)(T_{\alpha\beta 33} \delta_{\lambda\mu} + \delta_{\alpha\beta} T_{33\lambda\mu}) \\ & + \mu^2 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} T_{3333})] (\dot{d}_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu} \dot{d}_o) \end{aligned} \quad (1.19)$$

sowie

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2s_F b}{3N_1} [(1-\mu) T_{ij\lambda\mu} - \mu T_{ij33} \delta_{\lambda\mu}] (\dot{d}_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu} \dot{d}_o) \quad (1.20)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{d}_v(p) = & \frac{1}{kNN_1} [(1-\mu)(s'_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu}) - \mu(s'_{33} - a_{33}) \delta_{\lambda\mu}] \\ & (\dot{d}_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\mu} \dot{d}_o), \quad \text{wobei} \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$N_1 = (1-\mu) - (1-2\mu) T_{3333} \quad \text{ist.} \quad (1.22)$$

## 2. Grundgleichungen

Im Hinblick auf eine Näherungslösung mittels der FEM [1] wird im folgenden die Matrixschreibweise benutzt. Dazu werden definiert:

$$\begin{aligned} \underline{u} &= (u, v, w)^T && \dots \text{ Vektor der Verschiebungen} \\ \underline{s} &= (s_{xx}, s_{yy}, s_{xy})^T && \dots \text{ Vektor der Spannungen} \\ \underline{m} &= (m_{xx}, m_{yy}, m_{xy})^T && \dots \text{ Vektor der Momente} \\ \underline{q} &= (q_x, q_y)^T && \dots \text{ Vektor der Querkräfte} \\ \underline{d} &= (d_{xx}, d_{yy}, 2d_{xy})^T && \dots \text{ Vektor der Dehnungen} \\ \underline{k} &= -(w|_{xx}, w|_{yy}, 2w|_{xy})^T && \dots \text{ Vektor der Krümmungen} \\ \underline{d}_o &= (1, 1, 0)^T \frac{z}{h} (\beta \Delta T) && \dots \text{ Vektor der Temperaturdehnung} \\ \underline{k}_o &= (1, 1, 0)^T \frac{1}{h} (\beta \Delta T) \\ \underline{h} &= (s_{xx}, s_{yy}, s_{xy}, a_{xx}, a_{yy}, a_{xy}, d_v(p))^T && \dots \text{ Zustandsvektor} \end{aligned}$$

$$\underline{C}(p) = \frac{2G}{1-\mu} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\mu) \end{bmatrix} \dots \text{ Elastizitätsmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix}^T \dots \text{ Differentiationsoperator}$$

Dabei sind  $z$  die Koordinate senkrecht auf der  $x, y$ -Ebene,  $w(x, y)$  die Verschiebung der Plattenmittelfläche in Richtung der  $z$ -Achse,  $h$  die Plattendicke und  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz zwischen Plattenoberseite ( $z = \frac{h}{2}$ ) und -unterseite ( $z = -\frac{h}{2}$ ). Der Verschiebungszustand in der Platte ist durch

$$\underline{u} = (-z \partial_x, -z \partial_y, 1)^T w \quad (2.1)$$

bestimmt, daraus läßt sich der Vektor der Dehnungen

$$\underline{d} = \underline{z} \underline{k} \quad (2.2)$$

berechnen. Die Momente und Querkräfte

$$\underline{m} = \int_h \underline{s} \underline{z} dz, \quad \underline{q} = \int_h (s_{3x}, s_{3y})^T dz \quad (2.3)$$

genügen den Gleichgewichtsbedingungen

$$\underline{D}^T \underline{m} + \underline{q} = \underline{0} \quad (2.4)$$

$$(\partial_x, \partial_y) \underline{q} + \underline{\bar{p}} = 0 \quad (2.5)$$

In denen  $\underline{\bar{p}}(x, y)$  eine bekannte Flächenbelastung darstellt. Ist  $\underline{B}$  ein am Randstück  $c_q$  vorgegebenes Biegemoment und  $\underline{Q}^*$  eine ebenfalls auf  $c_q$  vorgeschriebene Ersatzquerkraft, dann lautet das Prinzip der virtuellen Arbeit für eine inkrementelle Laststeigerung

$$\delta \Pi = \int_A (\underline{\dot{m}}^T \delta \underline{k} - \underline{\dot{p}} \delta \dot{w}) dA - \int_{c_q} (\underline{Q}^* \delta \dot{w} - \underline{B} \delta (\partial_n \dot{w})) ds = 0. \quad (2.6)$$

Das Stoffgesetz im elastischen Bereich

$$\underline{\dot{m}} = \frac{h^3}{12} \underline{C}^{(e)} (\underline{k} - \underline{k}_o) = \underline{B}^{(e)} (\underline{k} - \underline{k}) \quad (2.7)$$

und im elastisch-plastischen Bereich ( $F = 0, d_v^{(p)} > 0$ )

$$\begin{aligned} \underline{\dot{m}} &= \int_h (\underline{C}^{(e)} + \underline{C}^{(p)}) z^2 dz (\underline{k} - \underline{k}_o) \\ &= (\underline{B}^{(e)} + \underline{B}^{(p)}) (\underline{k} - \underline{k}_o) \end{aligned} \quad (2.8)$$

kann man gemäß Gl. (2.3) unter Verwendung von Gl. (1.19) berechnen. Für die inkrementelle Änderung des Zustandsvektors  $\underline{h}$  [6] ergibt sich

$$\underline{\dot{h}} = \underline{C} (\underline{k} - \underline{k}_o), \quad (2.9)$$

wobei die Koeffizienten der Matrix  $\underline{C}$  mittels der Gln. (1.19) bis (1.21) zu bestimmen sind. Der Zustandsvektor wird zur Darstellung der Fließbedingung in der Form

$$\underline{h}^T \underline{F} \underline{h} - k^2 = 0 \quad (2.10)$$

mit

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & 0 & -1,5 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & 0 \\ & & 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ & & & 3 & -1,5 & 0 & 0 \\ & & & & & 3 & 0 \\ & & & & & & 3 \\ \text{symm.} & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

benutzt. Durch Einsetzen der Beziehungen (2.7) bzw. (2.8) in die Variationsgleichung (2.6) folgt

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_A (\underline{k} - \underline{k}_o)^T \underline{B}^{(e)} \delta \underline{k} dA + \int_{A_p} (\underline{k} - \underline{k}_o)^T \underline{B}^{(p)} \delta \underline{k} dA \\ &\quad - \int_A \underline{\dot{p}} \delta \dot{w} dA - \int_{c_p} (\underline{Q}^* \delta \dot{w} - \underline{B} \delta (\partial_n \dot{w})) ds = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Das erste Integral enthält die infolge elastischen Werkstoffverhaltens in der Platte gespeicherte Energie, im

zweiten steht derjenige Anteil davon, der dissipiert und somit in Wärme übergeht, wenn im Teilbereich  $A_p$  plastische Deformationen erfolgen. Die restlichen Summanden sind die Arbeit der äußeren verallgemeinerten Kräfte.

### 3. Näherungslösung

Ausgangspunkt für eine Näherungslösung mittels der FEM ist die Variationsgleichung (2.12). Als eine im Sinne der Variationsrechnung zulässige Vergleichsfunktion für einen Verschiebungszuwachs  $\Delta w$  wird das bekannte Polynom 5. Grades mit 18 Freiwerten [8] benutzt.

Sind

$$\underline{v}_l = (w_l, w_{l,1}, w_{l,2}, w_{l,11}, w_{l,22}, w_{l,12})^T; l = i, j, k \quad (3.1)$$

der Knotenvektor in den Eckpunkten eines Dreieckselementes und

$$\underline{v}^e = (\underline{v}_i^T, \underline{v}_j^T, \underline{v}_k^T)^T \quad (3.2)$$

der Elementknotenvektor des Elementes  $e$  sowie  $\underline{w}_{21}$  ein Vektor, der alle Glieder eines Polynoms 5. Grades enthält, kann für ein Verschiebungsinkrement

$$\Delta \underline{w}^e = \underline{w}_{21}^T \underline{H}^e \Delta \underline{v}^e \quad (3.3)$$

angegeben werden. Damit lassen sich

$$\Delta \underline{k}^e = -\underline{W}^T \underline{L}^e \Delta \underline{v}^e \quad (3.4)$$

und

$$\partial_n \Delta \underline{w}^e = \underline{w}_{15}^T \underline{D}_n^e \underline{H}^e \Delta \underline{v}^e \quad (3.5)$$

berechnen. Das Einsetzen der Gln. (3.3) bis (3.5) in die Variationsgleichung (2.12) führt auf das algebraische System

$$\begin{aligned} \delta \Delta \Pi &= \sum_{e=1}^n \delta \Delta \underline{v}^e T \left( (\underline{L}^e \int_A \underline{W} \underline{B}^{(e)} \underline{W}^T dA \underline{L}^e)^T \right. \\ &\quad + \underline{L}^e \int_{A_p} \underline{W} \underline{B}^{(p)} \underline{W}^T dA \underline{L}^e \left. \right) \Delta \underline{v}^e \\ &\quad + \underline{L}^e \int_A \underline{W} \underline{B}^{(e)} \Delta \underline{k}_o dA \\ &\quad + \underline{L}^e \int_{A_p} \underline{W} \underline{B}^{(p)} \Delta \underline{k}_o dA - \underline{H}^e \int_A \underline{w}_{21} \Delta \underline{\bar{p}} dA \\ &\quad - \underline{H}^e \int_{c_q} \underline{w}_{21} \Delta \underline{Q}^* ds + \underline{H}^e \underline{D}_n^e \int_{c_q} \underline{w}_{15} \Delta \underline{B} ds = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Berechnung der Matrix  $\underline{B}^{(p)}$  ist vom vorliegenden Spannungszustand und dem Belastungszuwachs selbst abhängig. Für eine Entlastung ( $\Delta d_v^{(p)} < 0$ ) verschwinden die Koeffizienten dieser Matrix. Die Integration des zweiten und vierten Summanden in Gl. (3.6) muß numerisch erfolgen [4], [1].

Für die Bestimmung von

$$\underline{\underline{K}}^{(p)} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{L}} \left( \sum c_q \underline{\underline{W}}_q \underline{\underline{B}}_q^{(p)} \underline{\underline{W}}_q^T \right) \underline{\underline{L}}^T \quad (3.7)$$

bzw.

$$\underline{\underline{r}}_T^{(p)} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{L}} \sum c_q \underline{\underline{W}}_q \underline{\underline{B}}_q^{(p)} \Delta \underline{\underline{k}}_{0q} \quad (3.8)$$

ist die in den Stützstellen benötigte Matrix  $\underline{\underline{B}}_q^{(p)}$  entsprechend Gl. (2.8) ebenfalls durch numerische Integration

$$\underline{\underline{B}}_q^{(p)} = h_q \sum_r c_r z_r^2 \underline{\underline{C}}_{qr} \quad (3.9)$$

zu ermitteln. Addiert man die Beiträge aus Temperaturdehnung, Flächenlast und Randlasten zum Vektor  $\Delta \underline{\underline{r}}$ , folgt aus Gl. (3.6) das lineare Gleichungssystem für jeden Lastschritt

$$\left( \underline{\underline{K}}^{(e)} + \underline{\underline{K}}^{(p)} \right) \Delta \underline{\underline{v}}^\lambda = \underline{\underline{K}} \Delta \underline{\underline{v}}^\lambda = \Delta \underline{\underline{r}}^\lambda \quad (3.10)$$

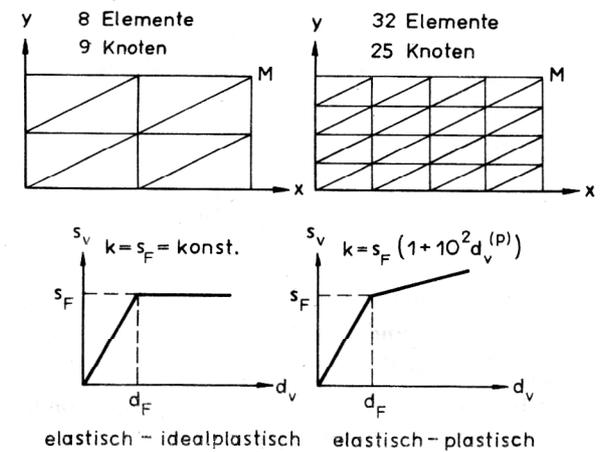
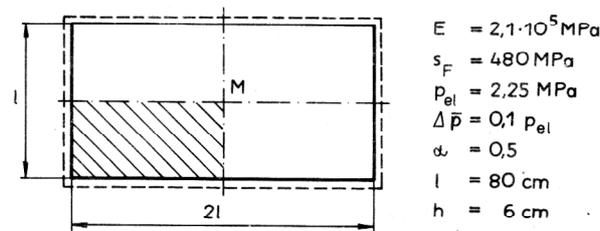
Da zu Beginn eines Lastschrittes  $\lambda$  die Matrix  $\underline{\underline{K}}^{(p)}$  nicht bekannt ist, wird in einer Voraussetzung mit einer gewissen Teillast  $\alpha \Delta \underline{\underline{r}}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , zunächst

$$\Delta \underline{\underline{v}}^\lambda = \underline{\underline{K}}^{-1} \alpha \Delta \underline{\underline{r}} \quad (3.11)$$

und damit ein Zustandsvektorkrement  $\Delta \underline{\underline{h}}^\lambda$  bestimmt, das zur Berechnung von  $\underline{\underline{B}}^{(p)}$  bzw.  $\underline{\underline{K}}^{(p)}$  verwendet wird.

#### 4. Anwendungen des Programms NLP 80

Die in Bild 1 gezeigte Rechteckplatte mit dem Seitenverhältnis 2 : 1 ist allseitig freiaufliegend gelagert und durch eine konstante Flächenkraft  $\bar{p} = 2 p_{el}$  belastet. Für ela-



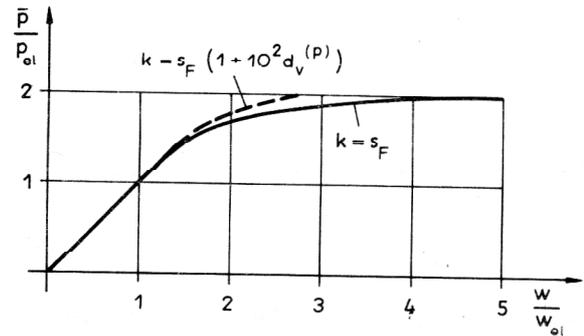
**Bild 1**  
Allseitig freiaufliegende Rechteckplatte

stisch-idealplastisches und elastisch-plastisches, linear verfestigendes Materialverhalten sowie zwei Vernetzungen wurde eine Berechnung bis in die Nähe der Traglast durchgeführt. Die Vernetzung kann wegen der Symmetrie auf ein Viertel der Platte beschränkt bleiben.

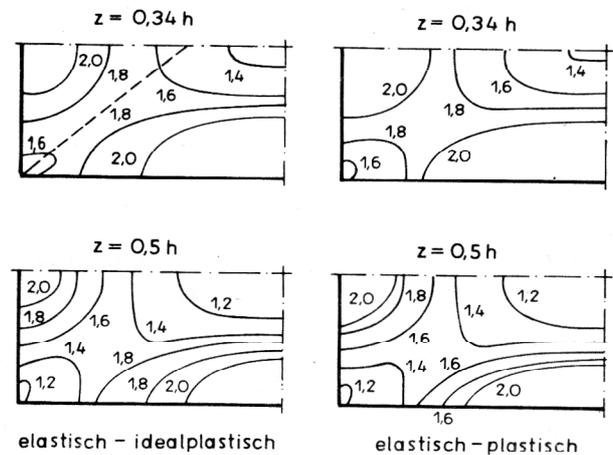
Den Verlauf der Verschiebung in der Plattenmitte zeigen Tabelle 1 und Bild 2.

**Tabelle 1**  
Verschiebung in der Plattenmitte

$\frac{\bar{p}}{p_{el}}$	$w_M$ [cm]			
	$k = s_F$		$k = s_F (1 + 10^2 d_v^{(p)})$	
	8 EL.	32 EL.	8 EL.	32 EL.
1,0	0,758	0,765	0,758	0,765
1,2	0,919	0,925	0,916	0,923
1,4	1,126	1,132	1,101	1,110
1,6	1,440	1,448	1,340	1,352
1,8	2,029	2,074	1,639	1,656
2,0	3,713	3,842	2,034	2,056



**Bild 2**  
Bezogene Verschiebung  $\frac{w}{w_{el}}$  in der Plattenmitte

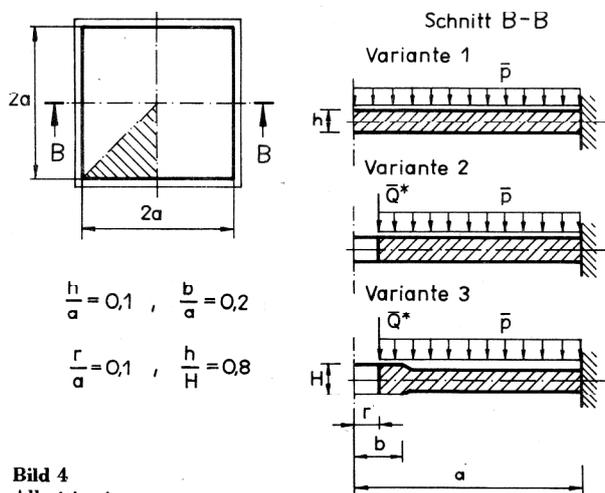


**Bild 3**  
Plastische Zonen bei steigender Belastung  $\frac{\bar{p}}{p_{el}}$

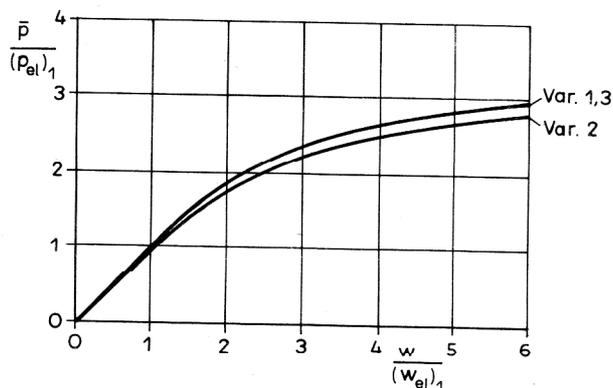
Der Einfluß der Verfestigung des Materials auf den Verschiebungszustand ist deutlich zu erkennen. Die Unterschiede zwischen beiden Vernetzungsvarianten sind kleiner als 4 %, so daß die relativ grobe Vernetzung für technische Zwecke ausreichend genau ist.

In Bild 3 sind die Grenzlinien der plastischen Zonen an der Plattenoberfläche ( $z = \pm 0,5 h$ ) und im Inneren ( $z = \pm 0,34 h$ ) in Abhängigkeit vom Belastungszustand

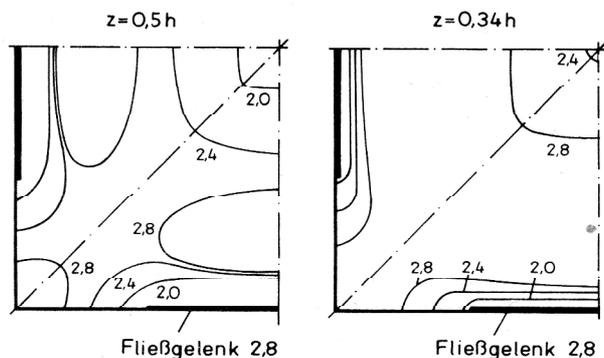
$\frac{\bar{p}}{p_{el}}$  gczeigt.



**Bild 4**  
Allseitig eingespannte  
Quadratplatte



**Bild 5**  
Bezogene Verschiebung  $\frac{w}{(w_{el})_1}$  nahe der Plattenmitte



**Bild 6**  
Plastische Zonen bei steigender Belastung  $\frac{\bar{p}}{p_{el}}$

Die plastische Verformung beginnt in den Ecken der Platte, etwas später auch in der Plattenmitte. Von hier aus breiten sich die plastischen Gebiete an der Oberfläche und zur Plattenmittelfläche hin aus. Während an den Plattenlaibungen nur geringfügige Unterschiede zwischen den beiden verschiedenen Materialgesetzen sichtbar werden, findet man für  $z = \pm 0,34 h$  deutliche Abweichungen voneinander. Die lineare Verfestigung des Werkstoffes bewirkt, daß die Plastizierung in Richtung zur Mittelfläche langsamer fortschreitet. Dies wird an den Linien  $\frac{\bar{p}}{p_{el}} = 1,8$  sehr deutlich sichtbar. Sie sind im Falle

des elastisch-idealplastischen Verhaltens bereits zusammengewachsen, und es ist zu vermuten, daß sich etwa entlang der gestrichelten Linie ein Fließgelenk ausbildet. Ein zweites Beispiel soll den Einfluß einer Bohrung auf das Tragvermögen einer Platte zeigen. Dabei wurde elastisch-idealplastisches Materialverhalten angenommen. Als Variante 1 wird die ungelochte Quadratplatte unter konstanter Flächenbelastung untersucht. Die Varianten 2 und 3 enthalten ein Loch in der Plattenmitte. In Variante 3 wurde die Platte in der Mitte verstärkt. Das zusätzlich aufgebrachte Material entspricht gerade dem Volumen der Bohrung, d. h. die beiden Platten nach Variante 1 und 3 besitzen das gleiche Volumen. Um auch die Belastung vergleichen zu können, werden die beiden gelochten Platten zusätzlich zur konstanten Flächenlast am Lochrand mit einer Randkraft  $\bar{Q} = 0,5 \bar{p}$  belastet (Bild 4). Die Durchbiegung eines Punktes in der Nähe der Bohrung ist in Bild 5 dargestellt. Während die Varianten 1 und 3 etwa gleiches Tragverhalten aufweisen, ergibt sich für Variante 2 eine verminderte Traglast. Die für Variante 1 ermittelten plastischen Zonen in der Platte (Bild 6) stimmen mit den von Kiesewetter [7] angegebenen Ergebnissen sehr gut überein.

#### LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente; VEB Fachbuchverlag: Leipzig, 1975.
- [2] Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press; Oxford, New York, Toronto, Sydney, Braunschweig, 1975.
- [3] Sawczuk, A.; Jaeger, T.: Grenztragfähigkeitstheorie der Platten, Springer Verlag; Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1972.
- [4] Moan, T.: Experiences with orthogonal Polynomials and „Best“ Numerical Integration Formulas on a Triangle; Withe Reference to Finite Element Approximations, ZAMM 54 (1974), S. 501 – 508.
- [5] Landgraf, G.; Weber, D.: Numerische Berechnung elastisch-plastischer Scheiben mit Hilfe der Reduktionsmethode, Maschinenbautechnik 26 (1977), S. 492 – 504.
- [6] Bergander, H.: Eine verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung von Anfangs-Randwertproblemen, ZAMM 58 (1978), S. 489 – 499.
- [7] Kiesewetter, N.: Die Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes dünner Rechteckplatten im elastisch-plastischen Materialbereich unter Berücksichtigung kleiner Verformungen, Dissertation, TU Dresden, 1975.
- [8] Argyris, J. H. u. a.: The Tuba Family of Plate Elements for the Matrix Displacement Method; Journal of the Royal Aeronautical Society, 72 (1968), S. 701 – 708.

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. techn. Hans-Georg Recke  
Bergakademie Freiberg, Sektion Maschinen- und Energietechnik  
9200 Freiberg, PSF 47