

# Grundlagen der nichtlinearen Festkörpermechanik - eine methodische Einführung

C. Reißmann

## 0. Einleitung

Die Beschäftigung mit nichtlinearen Problemen der Festkörpermechanik hat in den zurückliegenden Jahren international bedeutend zugenommen. Diese Entwicklung wird durch folgende Faktoren beeinflusst: a) der aus materialökonomischen Forderungen immer gezielter betriebene Leichtbau bei möglichst voller Ausschöpfung der Tragreserven, b) die Verwendung neuer Werkstoffe mit großem Verformungsvermögen und besonderen rheologischen Eigenschaften, c) der erreichte Entwicklungsstand der auf phänomenologischer Betrachtungsweise beruhenden Kontinuumsmechanik, d) der Stand der elektronischen Datenverarbeitung auf der Grundlage einer sehr leistungsfähigen Computertechnik.

Durch die bereits erzielten Ergebnisse wird das Interesse der Ingenieure an den theoretischen Grundlagen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik spürbar stärker. Da jedoch im Rahmen der traditionellen Ausbildung auf den Gebieten der Technischen Mechanik kaum noch Raum hierfür vorhanden ist, bleibt häufig nur die Möglichkeit einer postgradualen, nicht selten autodidaktischen Einarbeitung in diese Problematik. Dabei sind neben dem Tensorkalkül als notwendige Arbeitsgrundlage neue Betrachtungsweisen, Begriffe und Beziehungen zur Behandlung von Körpern mit endlichen Deformationen und komplizierterem Werkstoffverhalten sowie auch besondere numerische Lösungsmethoden erforderlich.

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, die nicht ganz einfache Theorie der nichtlinearen Verzerrungen im Lichte ihrer Anwendung auf elastische Stabprobleme in methodisch einfacher Weise darzustellen.

## 1. Die grundlegenden Beziehungen beim räumlichen Problem

### 1.1. Problemdarstellung und Schreibweise

Es wird ein elastischer Körper in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem in der Konfiguration 0 (unbelastet) und in der Konfiguration M (belastet) betrachtet, Bild 1.

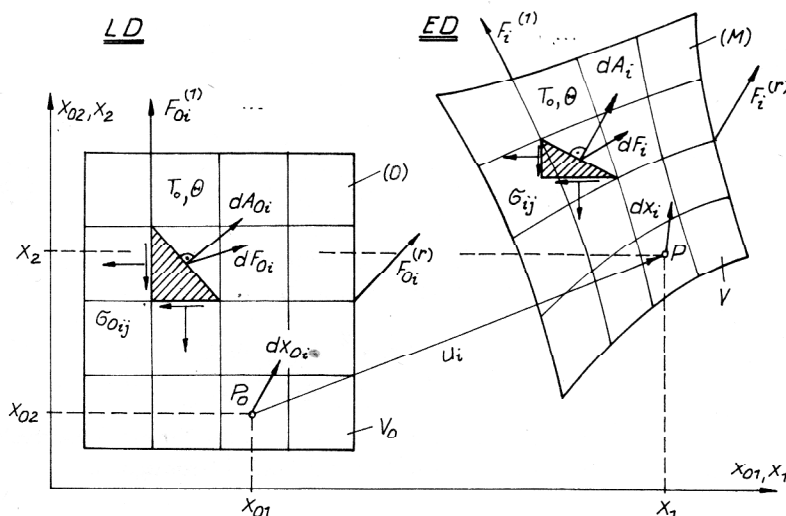
Zur Darstellung des Ortsvektors, der Verschiebungen, Kräfte, Verzerrungen und Spannungen wird die Indexschreibweise verwendet:  $x_i, u_i, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \dots$  [1].

Als Koordinatenindizes werden zugelassen:  $i, j, k, l, m, n, p, q$ . Diese können unabhängig voneinander die Werte 1, 2 oder 3 annehmen (freie Indizes).

Das Kronecker-Symbol  $\delta_{ij}$  nimmt den Wert 1 für  $i=j$  und den Wert 0 für  $i \neq j$  an, z. B.:  $\delta_{22} = 1, \delta_{31} = 0$ .

Über zweifach auftretende Indizes wird summiert von 1 bis 3 (stumme Indizes), z. B.:  $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \delta_{ii} = 3$

Ein und derselbe materielle Punkt des Körpers habe in der 0-Konfiguration, die Bezeichnung  $P_0$  und seine Lage wird mit den Lagrangeschen Koordinaten  $x_{0i}$  angegeben.



**Bild 1**  
Körper mit endlichen Verschiebungen und Verzerrungen

In der M-Konfiguration habe er die Bezeichnung P und seine Lage wird durch die Eulerschen Koordinaten  $x_i$  beschrieben. Zwischen diesen Koordinaten bestehen stets eindeutig umkehrbare Beziehungen:

$$x_i = x_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = x_{0i} + u_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}), \quad (1a)$$

$$x_{0i} = x_{0i}(x_1, x_2, x_3) = x_i - u_i(x_1, x_2, x_3). \quad (1b)$$

Hierbei sind  $u_i$  die Koordinaten der Verschiebung  $\overline{P_0P}$ . Die Darstellung dieser Feldgrößen als Funktionen von  $x_{0i}$  innerhalb des Volumens  $V_0$  der 0-Konfiguration heißt Lagrangesche Darstellung (LD), während die Beschreibung  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$  im Gebiet V der M-Konfiguration als Eulersche Darstellung (ED) bezeichnet wird.

Für die drei Verschiebungen  $u_i$  werden in ein und demselben materiellen Punkt in den Konfigurationen „0“ und „M“ gleiche Werte

$$u_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = u_i(x_1, x_2, x_3)$$

gemessen.

Es ist leicht einzusehen, daß z. B. die ersten Ableitungen dieser Funktionen a) nach den Lagrangeschen Koordinaten in  $V_0$  und b) nach den Eulerschen Koordinaten in V verschieden voneinander sind, z. B.:

$$\frac{\partial u_i(x_{01}, x_{02}, x_{03})}{\partial x_{0j}} = U_{0ij} + U_{ij} = \frac{\partial u_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j}.$$

Deshalb werden die in der Konfiguration 0 gemessenen (die in der LD beschriebenen) Zustandsgrößen mit dem Index 0 vor den Koordinatenindizes i, j, k, ... geschrieben, während die in der aktuellen Konfiguration M gemessenen (die in der ED beschriebenen) Zustandsgrößen lediglich mit den Koordinatenindizes geschrieben werden, siehe Bild 1.

Über die in Betracht kommenden Größen gibt Tabelle 1 Auskunft. Zur Umrechnung dieser Größen (z. B. der Spannungen) von einer Konfiguration in die andere sind eindeutige Beziehungen zwischen ihnen erforderlich.

Tabelle 1

Zeile Nr.	Name der geometrischen und Zustandsgrößen	Bezeichnung	
		LD	ED
1	Koordinate, Länge	$x_{0i}, L_{0i}$	$x_i, L_i$
2	Fläche	$A_{0i}$	$A_i$
3	Volumen	$V_0$	$V$
4	Dichte	$\rho_0$	$\rho$
5	Elastizitätsmodul,	$E_{0ijkl}$	$E_{ijkl}$
6	Verschiebung	$u_i$	$u_i$
7	Verformung	$\epsilon_{0ij}$	$\epsilon_{ij}$
8	Spannung	$\sigma_{0ij}$	$\sigma_{ij}$
9	Schnittkraft	$S_{0i}$	$S_i$
10	Äußere Einzelkraft	$(F_{0i})$	$F_i$
11	Äußere Flächenlast	$(t_{0i})$	$t_i$
12	Äußere Volumenkraft	$(p_{0i})$	$p_i$
13	Temperatur, -differenz	$T_{0\cdot}, \Theta$	$T_{\cdot}, \Theta$
14	Temperatur-Spannungs-Koeffiz.	$\beta_{0ij}$	$\beta_{ij}$

## 1.2. Transformationsbeziehungen zwischen den Größen der LD und ED

Eine wichtige Grundlage zur Herleitung von eindeutigen Beziehungen zwischen den Größen der LD und der ED, [2], [3], sind die Gleichungen (1), mit denen sich für infinitesimale geometrische Elemente folgende Transformationen ergeben:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} dx_{0m} = (\delta_{im} + \frac{\partial u_i}{\partial x_{0m}}) dx_{0m} \quad (2a)$$

$$dx_{0i} = \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_m} dx_m = (\delta_{im} - \frac{\partial u_i}{\partial x_m}) dx_m. \quad (2b)$$

Für ein Volumenelement  $dV$ , das von der Konfiguration 0 in die Konfiguration M transportiert worden ist, gilt [2]:

$$dV = J dV_0 \quad (3a)$$

$$dV_0 = \frac{1}{J} dV \quad (3b)$$

mit der Jacobi-Determinante

$$J = \det \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial x_{01} & \partial x_2 / \partial x_{01} & \partial x_3 / \partial x_{01} \\ \partial x_1 / \partial x_{02} & \partial x_2 / \partial x_{02} & \partial x_3 / \partial x_{02} \\ \partial x_1 / \partial x_{03} & \partial x_2 / \partial x_{03} & \partial x_3 / \partial x_{03} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Die Massebilanzgleichung

$$\rho dV = \rho_0 dV_0 \quad (5)$$

liefert mit (3) die Beziehung

$$J = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad (6)$$

Ebenfalls aus (5) folgt mit

$$\rho dV = \rho dA_i dx_i = \rho_0 dV_0 = \rho_0 dA_{0i} dx_{0i} = \rho_0 dA_{0m} \frac{\partial x_{0m}}{\partial x_i} dx_i$$

die Transformationsbeziehung für die Flächenkoordinaten

$$dA_i = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial x_{0m}}{\partial x_i} dA_{0m} \quad (7a)$$

und analog

$$dA_{0i} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_m}{\partial x_{0i}} dA_m. \quad (7b)$$

Für die Transformation eines Oberflächenelementes  $dA$  folgt unter Beachtung von (7)

$$dA^2 = dA_i dA_i = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \frac{\partial x_{0m}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{0n}}{\partial x_i} dA_{0m} dA_{0n}$$

und daraus mit den Koordinaten des Normaleinheitsvektors auf der Oberfläche der Ausgangskonfiguration

$$\frac{dA_{0i}}{dA_0} = \nu_{0i} \quad (8)$$

die Beziehung

$$dA = \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{\frac{\partial x_{0m}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{0n}}{\partial x_i} \nu_{0m} \nu_{0n}} dA_0 = \tilde{J} dA_0 \quad (9a)$$

und analog

$$dA_0 = \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{\frac{\partial x_m}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_n}{\partial x_{0i}} \nu_m \nu_n} dA = \frac{1}{\tilde{J}} dA \quad (9b)$$

Bei einer Starrkörperverschiebung gilt  $J = \tilde{J} = 1$ . Liegen trotz großer Verschiebungen nur kleine Verzerrungen vor, so dürfen die Werte  $J, \tilde{J}$  gleich eins gesetzt werden. Die Verformung an der Stelle eines materiellen Punktes kann durch verschiedene Verzerrungstensoren ausgedrückt werden [2]. Bei einer Differenzbildung der Quadrate infinitesimaler Strecken nach und vor der Belastung lassen sich folgende Verzerrungstensoren definieren:

a) in der LD der Greensche Verzerrungstensor  $\epsilon_{0ij}$ :

$$\begin{aligned} dx_k dx_k - dx_{0k} dx_{0k} &= 2\epsilon_{0ij} dx_{0i} dx_{0j} \\ \epsilon_{0ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{0j}} - \delta_{ij} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{0i}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_{0i}} \frac{\partial u_k}{\partial x_{0j}} \right) \end{aligned} \quad (10a)$$

b) in der ED der Almansische Verzerrungstensor  $\epsilon_{ij}$ :

$$\begin{aligned} dx_k dx_k - dx_{0k} dx_{0k} &= 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (10b)$$

Aus

$$\epsilon_{ij} dx_i dx_j = \epsilon_{0ij} dx_{0i} dx_{0j} = \epsilon_{0mn} \frac{\partial x_{0n}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{0n}}{\partial x_j} dx_i dx_j$$

folgen die Transformationsbeziehungen für die Verzerrungen  $\epsilon_{ij}$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial x_{0m}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{0n}}{\partial x_j} \epsilon_{0mn} \quad (11a)$$

und analog

$$\epsilon_{0ij} = \frac{\partial x_m}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_n}{\partial x_{0j}} \epsilon_{mn} \quad (11b)$$

Unter der Voraussetzung infinitesimal kleiner Verschiebungen  $u_i$  können die Quadrate der Ableitungen der Verschiebungen in (10) vernachlässigt werden. Der Unterschied zwischen  $x_i$  und  $x_{0i}$  verschwindet und somit auch der Unterschied zwischen Almansischem und Greenschem Verzerrungstensor:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{0ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (12)$$

Die wahren Spannungen  $\sigma_{ij}$  in einem Punkt P der verformten Konfiguration M heißen Eulersche oder Cauchy'sche Spannungen. Da bei endlichen Verschiebungen und Verformungen in beiden Konfigurationen verschiedene Verzerrungen  $\epsilon_{ij}$  und  $\epsilon_{0ij}$  gemessen werden, werden

sich i. a. auch verschiedene Spannungstensoren in der ED und in der LD ergeben [2].

Ein plausibler Spannungstensor im entsprechenden Punkt  $P_0$  der Ausgangskonfiguration ergibt sich, wenn zusätzlich zur Massegleichheit auch die Gleichheit der Deformationsenergie W in beiden Konfigurationen gefordert wird:

$$dW = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \sigma_{0ij} \epsilon_{0ij} dV_0 = dW_0 \quad (13)$$

Aus (13) folgt mit (11b), (3b) und (6)

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \sigma_{0mn} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0n}} \epsilon_{ij} \right) \left( \frac{\rho}{\rho_0} dV \right)$$

und somit die Transformationsbeziehung zwischen den Spannungen zu

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0n}} \sigma_{0mn}, \quad (14a)$$

und analog, unter Verwendung von (11a), (3a), (6) in (13),

$$\sigma_{0ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_m} \frac{\partial x_{0j}}{\partial x_n} \sigma_{mn}. \quad (14b)$$

Die Spannungskordinaten  $\sigma_{0ij}$  stellen den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor dar. Er ist ebenso wie der Cauchy'sche Spannungstensor symmetrisch.

Die Tatsache, daß er die Energieäquivalenz (13) gewährleistet, ist für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit von Bedeutung.

Werden ferner die Spannungen über das Stoffgesetz

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{in der ED}, \quad (15a)$$

$$\sigma_{0ij} = E_{0ijkl} \epsilon_{0kl} \quad \text{in der LD} \quad (15b)$$

durch die Verzerrungen ausgedrückt, so folgt ebenfalls aus der Energieäquivalenz (13) die Transformationsbeziehung für die Koordinaten des Elastizitätstensors:

$$E_{ijkl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0n}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{0p}} \frac{\partial x_l}{\partial x_{0q}} E_{0mnpq} \quad (16a)$$

$$E_{0ijkl} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_m} \frac{\partial x_{0j}}{\partial x_n} \frac{\partial x_{0k}}{\partial x_p} \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_q} E_{mnpq} \quad (16b)$$

Liegt ein quasistatisches Temperaturspannungsproblem vor, so ist es sinnvoll, die Äquivalenz der freien Energie F in beiden Konfigurationen zu fordern. Nach [4] gilt:

$$dF = \left( \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{kl} \epsilon_{ij} - \beta_{ij} \epsilon_{ij} \Theta - \frac{c\epsilon}{2T_0} \Theta^2 \right) dV \quad (17)$$

$$= \left( \frac{1}{2} E_{0ijkl} \epsilon_{0kl} \epsilon_{0ij} - \beta_{0ij} \epsilon_{0ij} \Theta - \frac{c\epsilon_0}{2T_0} \Theta^2 \right) dV_0,$$

wobei die absolute Temperatur  $T_0$  sowie die Temperaturänderung  $\Theta = T - T_0$  in den zugeordneten materiellen Punkten der beiden Konfigurationen gleichwertig sind. Unter Beachtung von (5) und (11) ergeben sich aus (17) als Transformationsbeziehungen

– für die Temperaturspannungskoeffizienten  $\beta_{ij}$

$$\beta_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0n}} \beta_{0mn}, \quad (18a)$$

$$\beta_{0ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_m} \frac{\partial x_{0j}}{\partial x_n} \beta_{mn} \quad (18b)$$

– für die spezifische Wärmekapazität  $c_\epsilon$

$$c_\epsilon = \frac{\rho}{\rho_0} c_{\epsilon 0}, \quad (19a)$$

$$c_{\epsilon 0} = \frac{\rho_0}{\rho} c_\epsilon. \quad (19b)$$

Diese Transformationen gewährleisten ebenfalls die Gleichwertigkeit der Entropie in beiden Konfigurationen

$$dS = \left( \beta_{ij} \epsilon_{ij} + c_\epsilon \frac{\Theta}{T_0} \right) dV = \left( \beta_{0ij} \epsilon_{0ij} + c_{\epsilon 0} \frac{\Theta}{T_0} \right) dV_0.$$

Die Frage, welchen Transformationen Kräfte unterworfen sind, kann an Hand der Gleichgewichtsbedingungen in den Punkten der Oberfläche eines beliebigen Teilmolumens des Körpers untersucht werden. Es wird lediglich verlangt, daß die Gleichgewichtsbedingungen in beiden Konfigurationen erfüllt sind:

$$dF_j = dA_i \sigma_{ij} \quad (20a)$$

$$dF_{0j} = dA_{0i} \sigma_{0ij}. \quad (20b)$$

Die Transformationsbeziehungen (7a) und (14a) in (20a) eingesetzt,

$$\begin{aligned} dF_j &= dA_i \sigma_{ij} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial x_{0m}}{\partial x_i} dA_{0m} \right) \left( \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0n}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0p}} \right) \sigma_{0np} \\ &= \delta_{mn} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0p}} dA_{0m} \sigma_{0np} = \frac{\partial x_j}{\partial x_{0p}} dA_{0m} \sigma_{0mp} = \\ &= \frac{\partial x_j}{\partial x_{0p}} dF_{0p}, \text{ liefert } dF_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} dF_{0m} \quad (21a) \end{aligned}$$

und analog

$$dF_{0i} = \frac{\partial x_{0i}}{\partial x_m} dF_m. \quad (21b)$$

Ein Vergleich mit (2) zeigt, daß die Kräfte den gleichen Transformationen unterliegen wie die geometrischen Elemente  $dx_i$ ,  $dx_{0i}$ . Diese Transformation ist im Hinblick auf die Übertragung von Schnittkräften  $S_i$ ,  $S_{0i}$  von einer Konfiguration in die andere von Bedeutung.

Bei der Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit ist keine Transformation der äußeren, am verformten Bauteil angreifenden Kräfte erforderlich, wenn beachtet wird, daß auch das Gesamtpotential  $\Pi$  des Systems äquivalent sein soll.

Für den Fall, daß z. B. nur Einzelkräfte  $F_i^{(\alpha)}$  an einem Körper angreifen, gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} \Pi = W - U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \sum_{(\alpha)} F_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \sigma_{0ij} \epsilon_{0ij} dV_0 - \sum_{(\alpha)} F_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Treten Volumenkräfte  $p_i$  und Oberflächenkräfte  $t_i$  auf, so kann das Potential dieser Kräfte

$$U = \int_V p_i u_i dV + \int_A t_i u_i dA \quad (23a)$$

mittels der Beziehungen (3) und (9) durch Integrationen über  $V_0$  und  $A_0$  der Ausgangskonfiguration 0 wie folgt ermittelt werden:

$$U = \int_{V_0} J p_i u_i dV_0 + \int_{A_0} \tilde{J} t_i u_i dA_0 \quad (23b)$$

Dabei werden die Intensitäten  $p_i$ ,  $t_i$  einfach in den zugeordneten materiellen Punkten der Ausgangskonfiguration wirkend gedacht (Parallelverschiebung, Bild 2).

Im folgenden wird  $U$  symbolisch durch ein skalares Produkt von Kräften  $\underline{F}$  und Verschiebungen  $\underline{D}$  dargestellt:

$$U = \underline{F}^T \underline{D} = \underline{D}^T \underline{F}. \quad (24)$$

Es werden nur mechanische Probleme betrachtet.

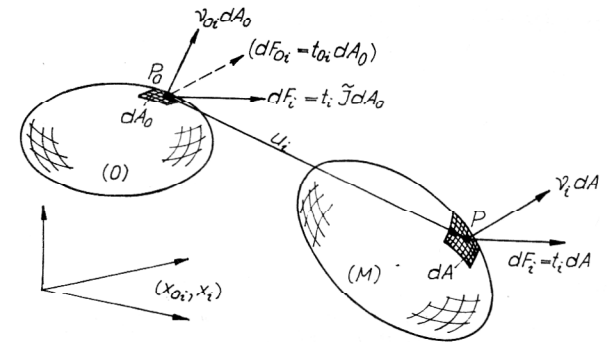


Bild 2  
Oberflächenkräfte

### 1.3. Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen

Wegen der Energieäquivalenz (13) kann das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Form

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \delta \epsilon_{0ij} \sigma_{0ij} dV_0 - \delta \underline{D}^T \underline{F} = 0 \quad (25)$$

geschrieben werden. Diese Arbeitsgleichung stellt die Gleichgewichtsbedingung für die Konfiguration M unter der Wirkung der vollen Belastung  $\underline{F}$  dar. Berechnungsverfahren, die von dieser Gleichung ausgehen, werden als „Vollastverfahren“ auf der Grundlage der „Totalen Lagrangeschen Darstellung“ (TLD) bezeichnet.

Die Gleichgewichtsbedingung für den Zustand M kann aber auch mittels der Lagrangeschen Darstellung in einer beliebigen Referenzkonfiguration R formuliert werden [5], Bild 3a. Sie lautet:

$$\int_{V_R} \delta \epsilon_{Rij} \sigma_{Rij} dV_R = \delta \tilde{\underline{D}}^T \tilde{\underline{F}}. \quad (26)$$



Dabei werden die Elemente von  $\tilde{\underline{D}}$ ,  $\tilde{\underline{F}}$  im Koordinatensystem  $x_{Ri}$  gemessen.

$\sigma_{Rij}$  sind die in der Konfiguration M wirkenden, aber in der Referenzkonfiguration R gemessenen, – oder auch die von der Konfiguration 0 in die Konfiguration R transformierten, – Zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungen

$$\sigma_{Rij} = \frac{\rho}{\rho_R} \frac{\partial x_{Ri}}{\partial x_m} \frac{\partial x_{Rj}}{\partial x_n} \sigma_{mnn} = \frac{\rho_0}{\rho_R} \frac{\partial x_{Ri}}{\partial x_{0m}} \frac{\partial x_{Rj}}{\partial x_{0n}} \tilde{\sigma}_{0mnn} \quad (27)$$

$\epsilon_{Rij}$  sind die von R aus gemessenen Greenschen Verzerrungen

$$\epsilon_{Rij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_{Ri}} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \right) \quad (28)$$

mit der Variation

$$\delta \epsilon_{Rij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \tilde{u}_i}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial \delta \tilde{u}_j}{\partial x_{Ri}} + \frac{\partial \delta \tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial \delta \tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \right) \quad (29)$$

Damit und unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaft des Spannungstensors,  $\sigma_{Rij} = \sigma_{Rji}$ , lautet die Gleichgewichtsbedingung (26) nun

$$\int_{V_R} \left( \frac{\partial \delta \tilde{u}_i}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial \delta \tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \right) \sigma_{Rij} dV_R = \delta \tilde{\underline{D}}^T \tilde{\underline{F}} \quad (30)$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_{Rij} &= E_{Rijmnn} \epsilon_{Rmnn} = \\ &= E_{Rijmnn} \left( \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_{Rn}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_{Rm}} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_{Rn}} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

und

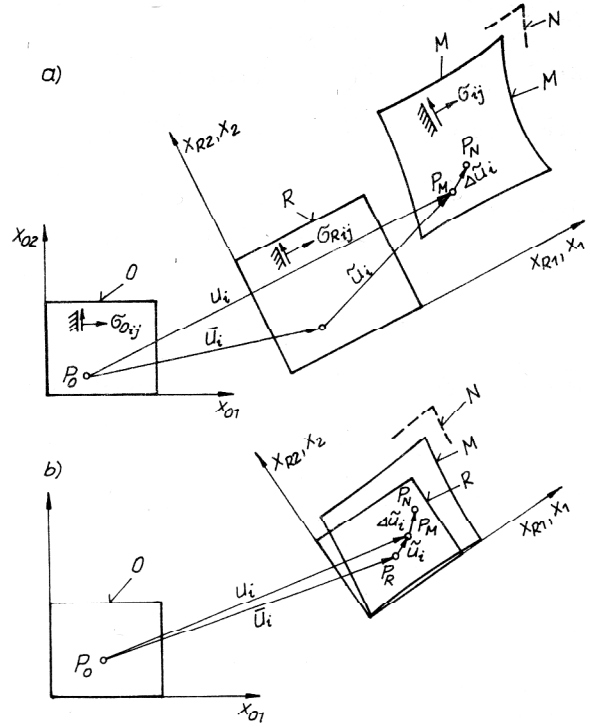
$$E_{Rijkl} = \frac{\rho_R}{\rho_0} \frac{\partial x_{Ri}}{\partial x_{0m}} \frac{\partial x_{Rj}}{\partial x_{0n}} \frac{\partial x_{Rk}}{\partial x_{0p}} \frac{\partial x_{Rl}}{\partial x_{0q}} E_{0mnpq} \quad (32)$$

Ein auf Gl. (30) aufbauendes Berechnungsverfahren ist ebenfalls ein Vollastverfahren.

Die beliebig wählbare Referenzkonfiguration R spielt aber vor allem im Zusammenhang mit einer schrittweisen Aufbringung der Belastung durch sog. Lastinkremente  $\Delta \tilde{\underline{F}}$  und der laufenden Verlegung der Referenzkonfiguration in die nach jedem Lastschritt neu berechnete Konfiguration eine große Rolle. Für diese ständige Aktualisierung hat sich der Begriff „updating“ eingebürgert.

Aus praktischen Gründen wird dabei oft die Referenzkonfiguration R nicht genau gleich der Konfiguration M nach dem m-ten Lastschritt gewählt, sondern eine für die Beschreibung besser geeignete, aber nur näherungsweise mit M zusammenfallende. Eine gerne praktizierte Möglichkeit ist in Bild 3b dargestellt, wo als Referenzkonfiguration R die an den Ort von M starrkörperverschobene Ausgangskonfiguration 0 dient.

Aus diesem Grunde soll das Gleichgewicht bei inkrementeller Belastung in einer zunächst beliebig gewählten Referenzkonfiguration R untersucht werden.



**Bild 3**  
Lagrange'sche Darstellung in verschiedenen Konfigurationen  
a) beliebige Referenzkonfiguration R  
b) R durch Starrkörperverschiebung von 0

Es sei nach dem m-ten Lastschritt die Konfiguration M bekannt. Die Gleichgewichtsbedingung (30) werde als erfüllt betrachtet. Infolge einer erneuten Lastzunahme  $\Delta \tilde{\underline{F}}$  stellt sich eine der Konfiguration M benachbarte neue Konfiguration N ein. Für diesen Zustand N lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} \int_{V_R} \delta (\epsilon_{Rij} + \Delta \epsilon_{Rij}) (\sigma_{Rij} + \Delta \sigma_{Rij}) dV_R &= \delta (\tilde{\underline{D}} \\ &+ \Delta \tilde{\underline{D}})^T (\tilde{\underline{F}} + \Delta \tilde{\underline{F}}) \end{aligned} \quad (33)$$

mit dem Verzerrungstensor

$$\begin{aligned} \epsilon_{Rij} + \Delta \epsilon_{Rij} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (\tilde{u}_i + \Delta \tilde{u}_i)}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial (\tilde{u}_j + \Delta \tilde{u}_j)}{\partial x_{Ri}} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial (\tilde{u}_k + \Delta \tilde{u}_k)}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial (\tilde{u}_k + \Delta \tilde{u}_k)}{\partial x_{Rj}} \right] \\ &= \epsilon_{Rij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta \tilde{u}_i}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial \Delta \tilde{u}_j}{\partial x_{Ri}} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial \Delta \tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \frac{\partial \Delta \tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} + \frac{\partial \Delta \tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

In der Literatur sind bei der Variation des Verschiebungs- und Verzerrungsfeldes verschiedene Argumentationen und Vorgehensweisen zu verzeichnen:

a) es wird nur die Verschiebung im Zustand M variiert [6],

$$\begin{aligned}\delta(\underline{\tilde{D}} + \Delta\underline{\tilde{D}}) &= \delta\underline{\tilde{D}}, & (\delta\Delta\underline{\tilde{D}} = 0) \\ \delta(\underline{\tilde{u}}_i + \Delta\underline{\tilde{u}}_i) &= \delta\underline{\tilde{u}}_i, & (\delta\Delta\underline{\tilde{u}}_i = 0) \\ \delta(\epsilon_{Rij} + \Delta\epsilon_{Rij}) &= \delta\epsilon_{Rij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \right)\end{aligned}$$

b) es wird nur der Verschiebungszuwachs variiert [7],

$$\begin{aligned}\delta(\underline{\tilde{D}} + \Delta\underline{\tilde{D}}) &= \delta\Delta\underline{\tilde{D}}, & (\delta\underline{\tilde{D}} = 0) \\ \delta(\underline{\tilde{u}}_i + \Delta\underline{\tilde{u}}_i) &= \delta\Delta\underline{\tilde{u}}_i, & (\delta\underline{\tilde{u}}_i = 0) \\ \delta(\epsilon_{Rij} + \Delta\epsilon_{Rij}) &= \delta\Delta\epsilon_{Rij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_i}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_j}{\partial x_{Ri}} \right. \\ &\quad + \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \frac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \\ &\quad \left. + \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \right)\end{aligned}$$

c) es ist natürlich auch möglich, gleichzeitig die Verschiebung des Zustandes M wie auch den Verschiebungszuwachs unabhängig voneinander zu variieren. Als Sonderfall ist damit auch die Gleichheit dieser Variationen zulässig:

$$\delta\underline{\tilde{D}} = \delta\Delta\underline{\tilde{D}}, \quad \delta\underline{\tilde{u}}_i = \delta\Delta\underline{\tilde{u}}_i, \quad (35)$$

womit sich für die Verzerrungen aus der Summe von a) und b) ergibt:

$$\begin{aligned}\delta(\epsilon_{Rij} + \Delta\epsilon_{Rij}) &= 2\delta\epsilon_{Rij} + \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \\ &\quad + \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}}.\end{aligned} \quad (36)$$

Unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingung (30) für M und Berücksichtigung der Symmetrie des Spannungstensors folgt mit (35) und (36) aus (33):

$$\begin{aligned}\int_{V_R} \left[ \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_i}{\partial x_{Rj}} + \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \frac{\partial(\tilde{u}_k + \Delta\tilde{u}_k)}{\partial x_{Rj}} \right] \Delta\sigma_{Rij} dV_R \\ + \int_{V_R} \frac{\partial\delta\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Ri}} \sigma_{Rij} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Rj}} dV_R = \delta\Delta\underline{\tilde{D}}^T \Delta\underline{F}.\end{aligned} \quad (37)$$

In dieser Gleichung sind  $\sigma_{Rij}$  wie auch  $\tilde{u}_i$  bekannte Größen des Zustandes M. Für den Spannungszuwachs ist der Verzerrungszuwachs mittels des Hookeschen Gesetzes

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{Rij} &= E_{Rijkl} \Delta\epsilon_{Rkl} \\ &= E_{Rijkl} \left( \frac{\partial\Delta\tilde{u}_k}{\partial x_{Rl}} + \frac{\partial\tilde{u}_m}{\partial x_{Rk}} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_m}{\partial x_{Rl}} + \frac{1}{2} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_m}{\partial x_{Rk}} \frac{\partial\Delta\tilde{u}_m}{\partial x_{Rl}} \right)\end{aligned} \quad (38)$$

einsetzen (hierbei sind die Symmetrieeigenschaften des Elastizitätstensors berücksichtigt worden).

Das zweite Integral auf der linken Seite von (37) liefert beim Übergang zur FEM-Formulierung die sog. „geometrische Steifigkeitsmatrix“ oder „Anfangsspannungsmatrix“  $\underline{K}_G$ .

Werden die  $\Delta\underline{D}$  und  $\underline{D} = \Sigma \Delta\underline{D}$  als Knotenverschiebungen in einem FEM-Netz betrachtet, so kann mit Hilfe von (37) das FEM-Gleichungssystem in der Form

$$[\underline{K}(\underline{D}, \Delta\underline{D}) + \underline{K}_G(\sigma_{Rij})] \Delta\underline{D} = \Delta\underline{F} \quad (39)$$

hergeleitet werden. Die Lösung  $\Delta\underline{D}$  führt vom Zustand M zum Zustand N.

Je nachdem, ob nun die Referenzkonfiguration R in die Ausgangskonfiguration 0 oder in die nach dem m-ten Lastschritt gefundene Konfiguration M verlegt wird, handelt es sich um eine

a) Inkrementelle Methode auf der Grundlage der Totalen Lagrangeschen Darstellung (IMTLD) bzw.

b) Inkrementelle Methode auf der Grundlage der Updated Lagrangeschen Darstellung (IMULD).

**Zu a) die IMTLD:**

R fällt mit 0 zusammen, Bild 3, es gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= u_i, \quad \Delta\tilde{u}_i = \Delta u_i, \quad \delta\Delta\tilde{u}_i = \delta\Delta u_i, \quad \delta\Delta\underline{\tilde{D}} = \delta\Delta\underline{D}, \\ \sigma_{Rij} &= \sigma_{0ij}, \quad \Delta\sigma_{Rij} = \Delta\sigma_{0ij}, \quad \Delta\underline{F} = \Delta\underline{F},\end{aligned}$$

alle Größen werden im Koordinatensystem  $x_{0i}$  gemessen. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\begin{aligned}\int_{V_0} \left( \frac{\partial\delta\Delta u_i}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial\delta\Delta u_m}{\partial x_{0i}} \frac{\partial u_m}{\partial x_{0j}} + \frac{\partial\delta\Delta u_m}{\partial x_{0i}} \frac{\partial\Delta u_m}{\partial x_{0j}} \right) \Delta\sigma_{0ij} dV_0 \\ + \int_{V_0} \frac{\partial\delta\Delta u_m}{\partial x_{0i}} \sigma_{0ij} \frac{\partial\Delta u_m}{\partial x_{0j}} dV_0 = \delta\Delta\underline{D}^T \Delta\underline{F}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{0ij} &= E_{0ijkl} \Delta\epsilon_{0kl} \\ &= E_{0ijkl} \left( \frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_{0l}} + \frac{\partial u_n}{\partial x_{0k}} \frac{\partial\Delta u_n}{\partial x_{0l}} + \frac{1}{2} \frac{\partial\Delta u_n}{\partial x_{0k}} \frac{\partial\Delta u_n}{\partial x_{0l}} \right).\end{aligned} \quad (41)$$

**Zu b) die IMULD:**

Liegt R sehr dicht bei M (z. B. starrkörperverschobene 0-Konfiguration), so kann (37) bereits als Ausgangsgleichung zur Formulierung der FEM-Gleichungen auf der Grundlage der ULD betrachtet werden.

Für den Fall, daß R genau mit M zusammenfällt, gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= 0 && \text{keine Anfangsverschiebungen} \\ \sigma_{Rij} &= \sigma_{ij} && \text{Cauchy-Spannungen in der Konfiguration M}\end{aligned}$$

$\Delta\sigma_{Rij} = \Delta\sigma_{Mij}$  2. Piola-Kirchhoff-Spannungen der Konfiguration N, gemessen in M.

Ebenso werden die Inkremente  $\Delta \tilde{u}_i, \Delta \tilde{D}, \Delta \tilde{F}$  im updated lokalen Koordinatensystem  $x_i$  der verformten Konfiguration M gemessen.  $\Delta \epsilon_{Rij} = \Delta \epsilon_{Mij}$  sind die in M gemessenen Greenschen Verzerrungsinkremente

$$\Delta \epsilon_{Mij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta \tilde{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta \tilde{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta \tilde{u}_k}{\partial x_j} \right). \quad (42)$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\int_V \left( \frac{\partial \delta \Delta \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta \Delta \tilde{u}_m}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta \tilde{u}_m}{\partial x_j} \right) \Delta \sigma_{Mij} dV \quad (43)$$

$$+ \int_V \frac{\partial \delta \Delta \tilde{u}_m}{\partial x_i} \sigma_{ij} \frac{\partial \Delta \tilde{u}_m}{\partial x_j} dV = \delta \Delta \tilde{D}^T \Delta \tilde{F}$$

mit

$$\Delta \sigma_{Mij} = E_{ijkl} \Delta \epsilon_{Mkl} = E_{ijkl} \left( \frac{\partial \Delta \tilde{u}_k}{\partial x_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \tilde{u}_n}{\partial x_k} \frac{\partial \Delta \tilde{u}_n}{\partial x_l} \right) \quad (44)$$

Im folgenden soll die Anwendung auf Stabprobleme dargestellt werden.

## 2. Anwendungsbeispiele

### 2.1. Fachwerke mit endlichen Knotenverschiebungen, einschließlich Diskussion zu einigen Lösungsalgorithmen

Bild 4 zeigt ein Fachwerk mit großen Knotenverschiebungen  $\underline{D}$  unter der Wirkung von äußeren Knotenkräften  $\underline{F}$ . Zur Anwendung des Formalismus der allgemeinen Kontinuumsgleichungen kann man sich den Einzelstab in eine fiktive, sich mitverformende Scheibe eingebettet denken.

Mit den in Bild 5 gewählten Koordinatensystemen lauten die Beziehungen zwischen den Koordinaten eines materiellen Punktes  $P_0(x_0, y_0)$  bzw.  $P(x, y)$  dieser Scheibe.

$$x = d_1 \cos \psi + d_2 \sin \psi + \lambda x_0 \quad (45)$$

$$y = -d_1 \sin \psi + d_2 \cos \psi + \lambda y_0.$$

Die sich mit Hilfe dieser Gleichungen ergebenden Transformationsbeziehungen der für den Fachwerkstab maßgebenden Größen sind in Tabelle 2 wiedergegeben:

Tabelle 2:

Allgemeine Beziehungen	Fachwerkstab
$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} dx_{0m}$	$L = \lambda L_0$
$dF_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} dF_{0m}$	$S = \lambda S_0$
$dA_i = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial x_{0m}}{\partial x_i} dA_{0m}$	$A = \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{1}{\lambda} A_0$
$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0n}} \sigma_{0mn}$	$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} \lambda^2 \sigma_0$

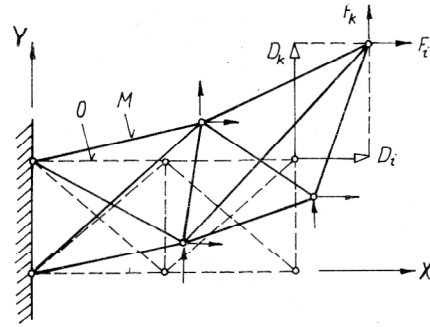


Bild 4  
Fachwerk mit endlichen Knotenverschiebungen

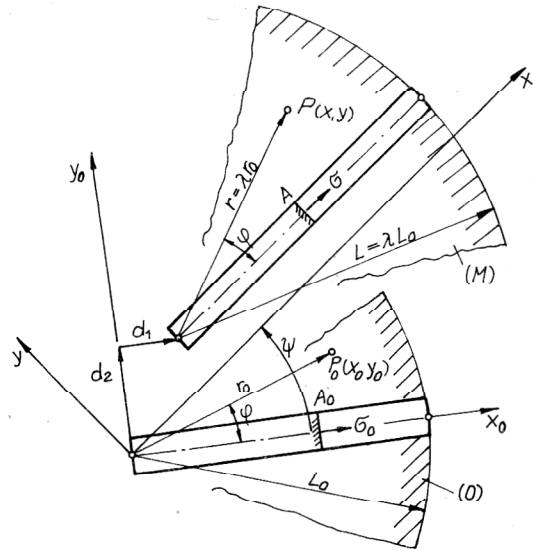


Bild 5  
Beziehungen zwischen Lagrangeschen und Eulerschen Koordinaten bei einem Fachwerkstab

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial x_{0m}}{\partial x_i} \frac{\partial x_{0n}}{\partial x_j} \epsilon_{0mn} \quad \left| \quad \epsilon = \frac{1}{\lambda^2} \epsilon_0 \right.$$

$$E_{ijkl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0m}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0n}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{0p}} \frac{\partial x_l}{\partial x_{0q}} E_{0mnpq}$$

$$E = \frac{\rho}{\rho_0} \lambda^4 E_0$$

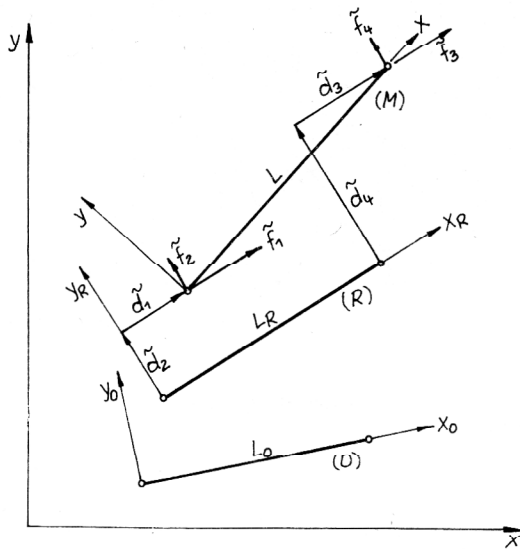
Zur Herleitung der FEM-Gleichungen wird eine beliebige Referenzkonfiguration R, Bild 6, zugrunde gelegt, die ja, falls gewünscht, in die Konfiguration 0 oder M überführt werden kann. Die im Koordinatensystem  $(x_R, y_R)$  gemessenen Elementknotenverschiebungen und -kräfte sind

$$\underline{\tilde{d}}^T = [\tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{d}_3 \tilde{d}_4], \quad \underline{\tilde{f}}^T = [\tilde{f}_1 \tilde{f}_2 \tilde{f}_3 \tilde{f}_4] \quad (46)$$

und für die von R aus gemessenen Verschiebungen  $\tilde{u}, \tilde{v}$  können folgende Funktionen verwendet werden:

$$\tilde{u} = (1 - \xi) \tilde{d}_1 + \xi \tilde{d}_3, \quad \tilde{v} = (1 - \xi) \tilde{d}_2 + \xi \tilde{d}_4, \quad (47)$$

$$\xi = \frac{x_R}{L_R}. \quad (48)$$



**Bild 6**  
Elementknotenverschiebungen und -kräfte eines Fachwerkstabes bezüglich einer beliebigen Referenzkonfiguration R

Für die Greensche Verzerrung bezüglich R gilt

$$\epsilon_R = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_R} \right)^2 \quad (49)$$

$$= \tilde{e} + \frac{1}{2} \tilde{e}^2 + \frac{1}{2} \tilde{r}^2.$$

Hierbei sind

$$\tilde{e} = \frac{1}{L_R} (\tilde{d}_3 - \tilde{d}_1) = \frac{1}{L_R} \underline{\alpha}^T \tilde{\underline{d}}, \quad (50a)$$

$$\tilde{r} = \frac{1}{L_R} (\tilde{d}_4 - \tilde{d}_2) = \frac{1}{L_R} \underline{\beta}^T \tilde{\underline{d}} \quad (50b)$$

mit den Hilfsvektoren

$$\underline{\alpha}^T = [-1 \ 0 \ 1 \ 0], \quad \underline{\beta}^T = [0 \ -1 \ 0 \ 1]. \quad (51)$$

Werden diese in (49) eingeführt, so folgt

$$\epsilon_R = \frac{1}{L_R} \left[ \left( 1 + \frac{\tilde{e}}{2} \right) \underline{\alpha}^T + \frac{\tilde{r}}{2} \underline{\beta}^T \right] \tilde{\underline{d}} \quad (52)$$

$$\delta \epsilon_R = \delta \tilde{e} (1 + \tilde{e}) + \delta \tilde{r} \tilde{r}$$

$$= \delta \tilde{\underline{d}}^T \frac{1}{L_R} \left[ \underline{\alpha} + \frac{1}{L_R} (\underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + \underline{\beta} \underline{\beta}^T) \tilde{\underline{d}} \right] \quad (53)$$

Für die in R gemessene Stabkraft gilt

$$S_R = A_R \sigma_R = E_R A_R \epsilon_R$$

$$= \frac{E_R A_R}{L_R} \left[ \left( 1 + \frac{\tilde{e}}{2} \right) \underline{\alpha}^T + \frac{\tilde{r}}{2} \underline{\beta}^T \right] \tilde{\underline{d}}. \quad (54)$$

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit entsprechend Gl. (26),

$$\delta \epsilon_R \sigma_R V_R = \delta \epsilon_R S_R L_R = \delta \tilde{\underline{d}}^T \tilde{\underline{f}}, \quad (55)$$

liefert die FEM-Gleichung für das Vollastverfahren. Für den Fall, daß R mit der Ausgangslage 0 identisch ist, folgt:

$$\left\{ \frac{E_0 A_0}{L_0} \underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + \frac{E_0 A_0}{2L_0} (e \underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + r \underline{\alpha} \underline{\beta}^T) + \frac{S_0}{L_0} (\underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + \underline{\beta} \underline{\beta}^T) \right\} \underline{d} = \underline{f} \quad (56)$$

oder

$$\left\{ \underline{k}_L + \underline{k}_{NL}^{(1)} + \underline{k}_{NL}^{(2)} \right\} \underline{d} = \underline{k}_s \underline{d} = \underline{f}. \quad (57)$$

$\underline{k}_L$  ist die lineare Steifigkeitsmatrix des elastischen Fachwerkstabes bei unendlich kleinen Knotenverschiebungen.

$\underline{k}_{NL}^{(1)}$ ,  $\underline{k}_{NL}^{(2)}$  sind mit  $e$ ,  $r$ ,  $S_0$  von  $\underline{d}$  abhängig und bilden zusammen den nichtlinearen Anteil an der Sekantensteifigkeitsmatrix  $\underline{k}_s$ . Wegen  $\underline{\alpha} \underline{\beta}^T$  in  $\underline{k}_{NL}^{(1)}$  ist diese Matrix und somit die Gesamtmatrix  $\underline{k}_s$  unsymmetrisch.  $\underline{k}_{NL}^{(2)}$  stellt die geometrische Steifigkeitsmatrix dar.

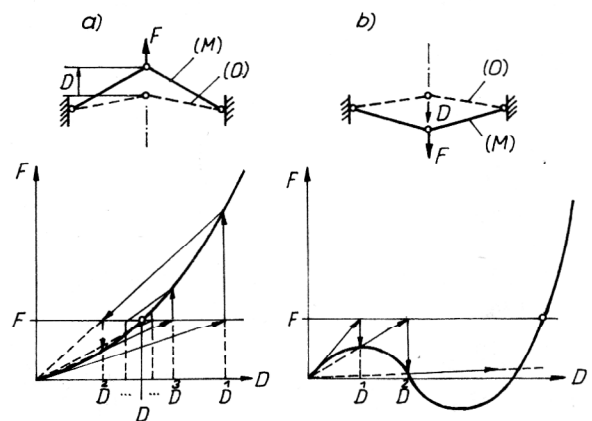
Die Aufstellung des FEM-Gleichungssystems für das gesamte Fachwerk mit den äußeren Knotenkräften  $\underline{F}$  und den unbekanntenen Knotenverschiebungen  $\underline{D}$  zum System

$$\underline{K}_s \underline{D} = \underline{F}, \quad (\underline{K}_s = \underline{K}_L + \underline{K}_{NL}^{(1)} + \underline{K}_{NL}^{(2)}) \quad (58)$$

erfolgt in üblicher Weise:

- Transformation der Elementmatrizen  $\underline{d}$ ,  $\underline{f}$ ,  $\underline{k}_s$  vom lokalen Koordinatensystem  $(x_0, y_0)$  in das globale Koordinatensystem  $(X, Y)$ .
- Erfüllung der Verträglichkeits- und Gleichgewichtsbedingungen an jedem Fachwerkknoten
- Einarbeitung der kinematischen Randbedingungen.

Zur Lösung des Gleichungssystems kann ein iteratives Verfahren Verwendung finden, bei dem die Sekantensteifigkeitsmatrix nach jeder Lösung neu berechnet wird. Die Konvergenz ist im allgemeinen nicht gesichert, Bild 7.



**Bild 7**  
Lösungsschema mittels Sekantensteifigkeitsmatrix  
a) Konvergente Einschachtelung b) Divergenz

Zur Herleitung der gegenüber dem Vollastverfahren bevorzugten inkrementellen Methoden werden die Verschiebungs- und Verformungszuwächse

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = (1 - \xi) \Delta \tilde{d}_1 + \xi \Delta \tilde{d}_3, & \Delta \tilde{v} = (1 - \xi) \Delta \tilde{d}_2 + \xi \Delta \tilde{d}_4 \\ \Delta \epsilon_R = (1 + \tilde{\epsilon}) \Delta \tilde{\epsilon} + \tilde{r} \Delta \tilde{r} + \frac{\Delta \tilde{\epsilon}^2}{2} + \frac{\Delta \tilde{r}^2}{2} \end{cases} \quad (59)$$

mit

$$\Delta \tilde{\epsilon} = \frac{\partial \Delta \tilde{u}}{\partial x_R} = \frac{1}{L_R} \underline{\alpha}^T \Delta \tilde{d}, \quad \Delta \tilde{r} = \frac{\partial \Delta \tilde{v}}{\partial x_R} = \frac{1}{L_R} \underline{\beta}^T \Delta \tilde{d} \quad (60)$$

benötigt. Aus (37) folgt damit

$$\begin{aligned} & \left\{ \delta \Delta \tilde{\epsilon} [(1 + \tilde{\epsilon} + \Delta \tilde{\epsilon}) + \delta \Delta \tilde{r} (\tilde{r} + \Delta \tilde{r})] \Delta \sigma_R \right. \\ & \left. + (\delta \Delta \tilde{\epsilon} \Delta \tilde{\epsilon} + \delta \Delta \tilde{r} \Delta \tilde{r}) \sigma_R \right\} A_R L_R - \delta \Delta \tilde{d}^T \Delta \tilde{f} \\ & = \delta \Delta \tilde{d} \left\{ [(1 + \tilde{\epsilon}) \underline{\alpha} + \tilde{r} \underline{\beta}] \Delta S_R + \frac{S_R + \Delta S_R}{L_R} \right. \\ & \left. (\underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + \underline{\beta} \underline{\beta}^T) \Delta \tilde{d} - \Delta \tilde{f} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Nach Einsetzen von

$$\begin{aligned} \Delta S_R &= E_R A_R \Delta \epsilon_R = \frac{E_R A_R}{L_R} \\ & \left\{ [(1 + \tilde{\epsilon}) \underline{\alpha}^T + \tilde{r} \underline{\beta}^T] \Delta \tilde{d} + \frac{\Delta \tilde{\epsilon}^2}{2} + \frac{\Delta \tilde{r}^2}{2} \right\} \end{aligned} \quad (62)$$

in (61) ergibt sich die Elementgleichgewichtsbedingung in folgender Form:

$$\underline{k}_{\underline{T}} \Delta \tilde{d} + \begin{bmatrix} \Delta \tilde{r}_{(i)} \end{bmatrix} = \Delta \tilde{f} \quad (63)$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \underline{k}_{\underline{T}} &= \frac{E_R A_R}{L_R} [(1 + \tilde{\epsilon})^2 \underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + (1 + \tilde{\epsilon}) \tilde{r} (\underline{\alpha} \underline{\beta}^T + \underline{\beta} \underline{\alpha}^T) \\ & + \tilde{r}^2 \underline{\beta} \underline{\beta}^T] + \frac{S_R}{L_R} (\underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + \underline{\beta} \underline{\beta}^T) \end{aligned} \quad (64)$$

die symmetrische Tangentensteifigkeitsmatrix, die zwar vom erreichten Verformungszustand, nicht aber von den noch unbekanntem Inkrementen  $\Delta \tilde{d}$  abhängt. Das zweite Glied auf der rechten Seite von (64) ist die Anfangsspannungsmatrix (geometrische Steifigkeitsmatrix).

Der in gestrichelten Rechteckklammern stehende Kraftvektor auf der linken Seite von (63)

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{r}_{(i)} &= \frac{E_R A_R}{2 L_R} (\Delta \tilde{\epsilon}^2 + \Delta \tilde{r}^2) [(1 + \tilde{\epsilon}) \underline{\alpha} + \tilde{r} \underline{\beta}] \\ & + \frac{\Delta S_R}{L_R} (\underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + \underline{\beta} \underline{\beta}^T) \Delta \tilde{d} \end{aligned} \quad (65)$$

ist ein von den zu ermittelnden Inkrementen  $\Delta \tilde{d}$  nicht-linear abhängiges Restglied der inneren Kräfte.

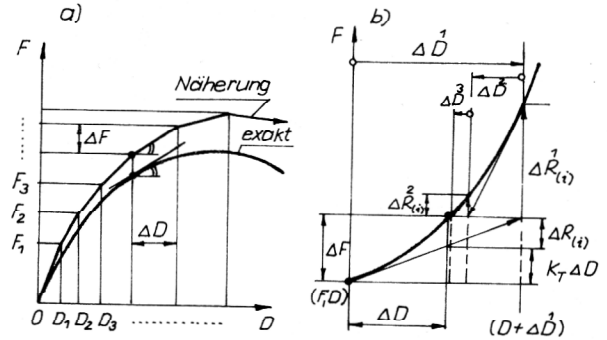
Der Zusammenbau des Gleichungssystems für die Gesamtstruktur liefert schließlich:

$$\underline{K}_{\underline{T}} \Delta \underline{D} + \begin{bmatrix} \Delta \underline{R}_{(i)} \end{bmatrix} = \Delta \underline{F} \quad (66)$$

Wird das Gleichgewichtskorrekturglied  $\Delta \underline{R}_{(i)}$  vernachlässigt, so driftet, – in Abhängigkeit von der Stärke der Nichtlinearität und der Größe der Lastschritte  $\Delta \underline{F}$  – die Näherungslösung von der wahren Lösung ab, Bild 8a.

Zur Vermeidung dieser Abdrift ist nach jedem Lastschritt (oder auch jeweils nach einigen Lastschritten) eine Gleichgewichtskorrektur sinnvoll, Bild 8b.

Über weitere Lösungsstrategien siehe [8], [9].



**Bild 8**  
Lösungsalgorithmus mittels Tangentensteifigkeitsmatrix  
a) ohne und b) mit Gleichgewichtskorrektur

Aus den Gln. (61) bis (65) können leicht die entsprechenden Gleichungen für die IMTLD und für die IMULD hergeleitet werden.

Bei der IMTLD, (40), geht R in 0 und damit

$(\tilde{d}, \tilde{\epsilon}, \tilde{r}, \Delta \tilde{d}, \Delta \tilde{\epsilon}, \Delta \tilde{r}, \Delta \tilde{f})$  in  $(d, e, r, \Delta d, \Delta e, \Delta r, \Delta f)$  über.

Bei der IMULD, (43), geht R in M über, und deshalb verschwinden wegen  $\tilde{d} = \underline{0}$  auch  $\tilde{\epsilon}$  und  $\tilde{r}$ .

Damit vereinfachen sich die Matrizen auf der linken Seite von (62):

$$\underline{k}_{\underline{T}} = \frac{EA}{L} \underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + \frac{S}{L} (\underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + \underline{\beta} \underline{\beta}^T) \quad (67)$$

$$\Delta \tilde{r}_{(i)} = \frac{EA}{2L} (\Delta \tilde{\epsilon}^2 + \Delta \tilde{r}^2) \underline{\alpha} + \frac{\Delta S_M}{L} (\underline{\alpha} \underline{\alpha}^T + \underline{\beta} \underline{\beta}^T) \Delta \tilde{d} \quad (68)$$

mit

$$\Delta S_M = \frac{EA}{L} \underline{\alpha}^T \Delta \tilde{d} + \frac{E\Lambda}{2L} (\Delta \tilde{\epsilon}^2 + \Delta \tilde{r}^2). \quad (69)$$

Das Aktualisieren (updating) der Größen E, A, L, S erfolgt entsprechend den Transformationsbeziehungen der Tabelle 2. Treten trotz großer Knotenverschiebungen nur sehr kleine Verzerrungen auf, so können die o. g. Größen in den Konfigurationen 0 und M als gleichwertig betrachtet werden. Insbesondere verschwindet dann auch der Unterschied zwischen  $S_0$  und S bzw.  $\sigma_0$  und  $\sigma$ .

## 2.2. Biegeträger mit Längskraft

Es sei vorausgesetzt, daß die Bernoullische Hypothese gilt und daß der Abstand  $z_0$  eines Punktes P zur Schwerpunktschicht während der Verformung des Trägers konstant bleibt, Bild 9.



ordnen ist, daß die von seinen Punkten aus gemessenen Verschiebungen  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{d}$  möglichst kleine Werte annehmen.

Wird z. B. die starrkörperverschobene 0-Konfiguration eines finiten Elementes entsprechend Bild 10 verwendet, so gilt für die Anfangsknotenverschiebungen

$$\tilde{d}^T = [\tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{d}_3 \tilde{d}_4 \tilde{d}_5 \tilde{d}_6] = [0 \ 0 \ \tilde{\varphi}_a \ \tilde{u}_b \ 0 \ \tilde{\varphi}_b] \quad (82)$$

mit

$$\tilde{u}_b = L - L_0, \quad \tilde{\varphi}_a = D_k - \psi, \quad \varphi_b = D_n - \psi. \quad (83)$$

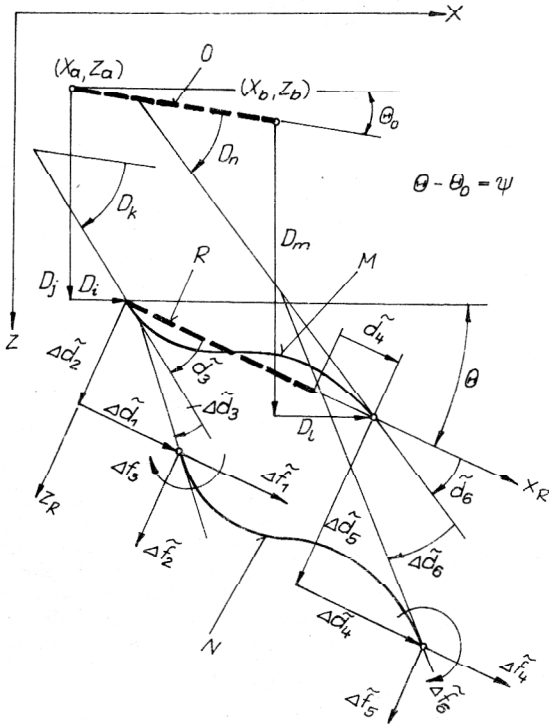


Bild 10  
Elementenknotenverschiebungen und -kräfte bei der IMULD

Die Lage dieses Referenzelementes im globalen Koordinatensystem (X, Y) ist gekennzeichnet durch seinen Anfangspunkt  $R_a$  und seinen Richtungswinkel  $\Theta$

$$R_a(X_a + D_i, Z_a + D_j), \quad \tan \Theta = \frac{Z_b + D_m - Z_a - D_j}{X_b + D_l - X_a - D_i}. \quad (84)$$

Die Arbeitsgleichung (37) liefert mit

$$\begin{cases} dV_R = dA_R dx_R, & L_R = L_0, & E_R = E_0 \\ \Delta \sigma_R = E_0 \Delta \epsilon_R = E_0 \left[ \Delta \tilde{u}' + \tilde{w}' \Delta \tilde{w}' + \frac{1}{2} (\Delta \tilde{w}')^2 \right] \end{cases} \quad (85)$$

nach Integration über den Querschnitt  $A_R = A_0$  folgende Ausgangsgleichung für die FEM-Formulierung:

$$\begin{aligned} & E_0 A_0 \int_{L_0} [\delta \Delta \tilde{u}' (\Delta \tilde{u}' + \tilde{w}' \Delta \tilde{w}') + \delta \Delta \tilde{w}' (\tilde{w}' \Delta \tilde{u}' + \tilde{w}'^2 \Delta \tilde{w}')] dx_R \\ & + E_0 I_0 \int_{L_0} \delta \Delta \tilde{\varphi}' \Delta \tilde{\varphi}' dx_R + S_R \int_{L_0} \delta \Delta \tilde{w}' \Delta \tilde{w}' dx_R = \delta \Delta \tilde{d}^T \Delta \tilde{f} \\ & - \left[ E_0 A_0 \int_{L_0} \delta \Delta \tilde{u}' \frac{\Delta \tilde{w}'^2}{2} + \delta \Delta \tilde{w}' \Delta \tilde{w}' (\Delta \tilde{u}' + \tilde{w}' \Delta \tilde{w}') \right. \\ & \left. + \frac{\Delta \tilde{w}'^2}{2} \right] dx_R, \quad \text{mit } I_0 = \int_{A_0} z_0^2 dA_0, \end{aligned}$$

die nach Einführung geeigneter Koordinatenfunktionen  $h_i$  für die Verschiebungen,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= [h_1 \ h_4] [\Delta \tilde{d}_1 \ \Delta \tilde{d}_4]^T \\ \Delta \tilde{w} &= [h_2 \ h_3 \ h_5 \ h_6] [\Delta \tilde{d}_2 \ \Delta \tilde{d}_3 \ \Delta \tilde{d}_5 \ \Delta \tilde{d}_6]^T \\ \tilde{w} &= [h_2 \ h_3 \ h_5 \ h_6] [0 \ \varphi_a \ 0 \ \varphi_b]^T, \end{aligned}$$

zu folgenden FEM-Gleichungssystem für ein Stabelement führt

$$\begin{bmatrix} \underline{k}_{uu} & \underline{k}_{uww} \\ \underline{k}_{wuu} & \underline{k}_{www} + \underline{k}_{ww} + \underline{k}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{d}_u \\ \Delta \tilde{d}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \tilde{f}_u \\ \Delta \tilde{f}_w \end{bmatrix} \quad \left[ \begin{array}{l} \Delta \tilde{f}_{Ru} \\ \Delta \tilde{f}_{Rw} \end{array} \right]$$

Hierbei ist  $\underline{k}_{wuu} = \underline{k}_{uww}^T$ .

Ein analoger Aufbau der FEM-Gleichungen ergibt sich für das Plattenproblem [10].

Der beschriebene Algorithmus wurde an Hand einfacher Fachwerke sowie eines Kragträgers mit Endmoment erfolgreich erprobt [10].

#### LITERATUR

- [1] Schultz-Piszachich, W.: Tensoralgebra und -analysis. Reihe „Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen, Landwirte“, Heft 11. B.G. Teubner - Leipzig 1979
- [2] Prager, W.: Einführung in die Kontinuumsmechanik, Birkhäuser Verlag Basel 1961
- [3] Becker, E./Bürger, W.: Kontinuumsmechanik. B.G. Teubner Stuttgart 1975
- [4] Nowacki, W.: Teorija uprugosti Moskau 1975
- [5] Cescotto, S., Frey, F. and Fonder, G.: „Total and updated Lagrangian description in nonlinear structural analysis: a unified approach“ in: Energy methods in finite element analysis. Ed. by R. Glowinski, E.Y. Rodin, O.C. Zienkiewicz, John Wiley & Sons Ltd. 1979.
- [6] Nordsve, N.T.: Finite element collapse analysis of structural members considering imperfektions and stresses due to fabrication. Report UR-79-04, Univ. Trondheim 1979
- [7] Washizu, K.: „Complementary variational principles in elasticity and plasticity“ in: Duality and complementarity in mechanics of solids. Polska Akademia Nauk, Warszawa 1979



- [ 8 ] Stricklin, J.A., Haisler, W.E., v. Riesenmann, W.A.: Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically nonlinear structural analysis by the direct stiffness method. AIAA/ASME 13 the Structures Conference, San Antonio 1972
- [ 9 ] Ramm, E.: „Strategies for tracing the nonlinear responds near limit points” in: Nonlinear finite element analysis in structural mechanics. Ed. by W. Wunderlich et. al., Berlin, Heidelberg, New York 1981
- [10] Reißmann, C.: Theoretische Grundlagen zur Ermittlung des nichtlinearen Verhaltens dünnwandiger Schiffskonstruktionen. Weiterbildungsseminar „Schiffsfestigkeit” Nienhagen 25. bis 29. Oktober 1982 (Veröffentlichungen 1983 vorgesehen).