

# Die Grundgleichungen einer linearen Theorie für dünne, elastische Platten und Scheiben mit inhomogenen Materialeigenschaften in Dickenrichtung

Holm Altenbach

## 0. Einleitung

Konstruktionen mit inhomogenen Materialeigenschaften in Dickenrichtung werden seit ca. 50 Jahren erfolgreich in der Technik angewendet. Der verstärkte Einsatz dieser Materialien in letzter Zeit erfordert eine kritische Durchsicht der bisher geschaffenen Theorien für Platten und Scheiben. Die verwendeten Berechnungsmodelle führten teilweise auf ungenaue Lösungen bzw. auf Lösungen, die mit erheblichem Rechenaufwand verbunden sind. In dieser Arbeit wird ein Berechnungsmodell vorgestellt, welches aus der Theorie einfacher Schalen von P.A. Shilin abgeleitet ist [1], [2].

Dabei werden jedem Punkt einer zweidimensionalen Fläche mechanisch sinnvolle Freiheitsgrade zugeordnet. Eine solche „direkte“ Vorgehensweise bei der Formulierung der Grundgl. stützt sich auf die Theorie der Cosserat-Flächen [3]. Die spezifischen Elastizitätsmoduli in den konstitutiven Gln. bestimmt man durch Vergleich mit einfachen Testaufgaben einer dreidimensionalen Theorie. In der Arbeit wird die lineare Elastizitätstheorie als Grundlage genommen, wobei der Spannungstensor  $\underline{\tau}$  symmetrisch sein soll. Mögliche Testaufgaben zur Ermittlung der spezifischen Elastizitätsmoduli sind z. B. in [4] beschrieben. Die dort gewonnenen Aussagen lassen sich leicht auf beliebiges inhomogenes Material erweitern.

Die hier gewählte Vorgehensweise unterscheidet sich wesentlich von den von Grigoljuk, Bolotin, Ambarcumjan u. a. vorgeschlagenen Lösungswegen [5], [6], [7]. Die „direkte“ Ableitung der Grundgl. ist einfacher. Die Ordnung der zu lösenden Gleichungssysteme bei mehrschichtigen Konstruktionen ist wesentlich niedriger, fordert jedoch eine genauere Bestimmung der spezifischen Elastizitätsmoduli. Neben der Herleitung der Grundgl. enthält die Arbeit eine Reihe von Beispielen. Dabei werden ausschließlich dreischichtige Platten mit symmetrischer Querschnittsstruktur betrachtet, da diese in der Literatur ausführlich beschrieben werden und somit die Möglichkeit zum Vergleich gegeben ist.

## 1. Die kinematischen und dynamischen Gleichungen

Als Modell der Platte oder Scheibe wird eine zweidimensionale, ebene Cosseratfläche betrachtet. Da bei der Formulierung der Grundgl. die Platten- und Scheibenwirkung gleichzeitig berücksichtigt werden, wird im

weiteren nur noch von einer Platte gesprochen. Die Bewegungen der Cosseratfläche werden durch den Verschiebungsvektor

$$\underline{u} = u \underline{e}_1 + v \underline{e}_2 + w \underline{n} \quad (1.1)$$

und den Verdrehungsvektor

$$\underline{a} \cdot \underline{\tilde{\varphi}} = \underline{\varphi} = -\varphi_2 \underline{e}_1 + \varphi_1 \underline{e}_2 \quad (1.2)$$

beschrieben. Die Komponenten beider Vektoren sind auf Bild 1 für ein x,y,z-Koordinatensystem an einer Rechteckplatte gezeigt. u und v sind die Verschiebungen in der Cosseratfläche, w ist die normal zur Cosserat-

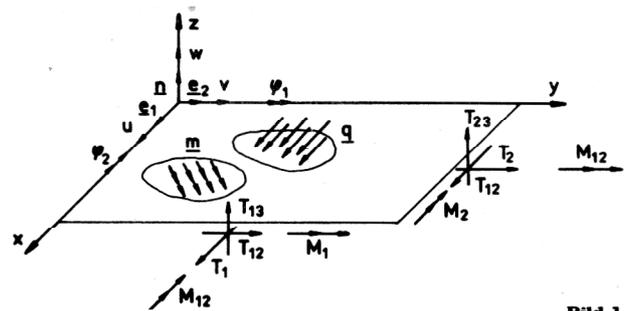


Bild 1

fläche gerichtete Verschiebung,  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind die Verdrehwinkel um die Einheitsvektoren  $\underline{e}_2$  und  $\underline{e}_1$ ,  $\underline{n}$  ist der Einheitsvektor in Richtung der Normalen zur Cosseratfläche. Mit  $\underline{\varphi}$  wird der ebene Anteil des Verdrehungsvektors  $\underline{\tilde{\varphi}}$  bezeichnet,  $\underline{a} = \underline{e}_1 \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \underline{e}_2$  ist der erste Metriktenor der Cosseratfläche. Damit besitzt jeder Punkt der Cosseratfläche 5 Freiheitsgrade und die hier vorgestellte Theorie entspricht der Timoschenko-Reissner-Theorie [8] für homogene und inhomogene in Dickenrichtung Platten.

Der Spannungszustand wird durch zwei Kraftgrößen-tensoren beschrieben

$$\underline{\underline{T}} = T_1 \underline{e}_1 \underline{e}_1 + T_{12} \underline{e}_1 \underline{e}_2 + T_{21} \underline{e}_2 \underline{e}_1 + T_2 \underline{e}_2 \underline{e}_2 + T_{13} \underline{e}_1 \underline{n} + T_{23} \underline{e}_2 \underline{n},$$

$$\underline{\underline{M}} = M_1 \underline{e}_1 \underline{e}_2 + M_{21} \underline{e}_2 \underline{e}_2 - M_2 \underline{e}_2 \underline{e}_1 - M_{12} \underline{e}_1 \underline{e}_1. \quad (1.3)$$

Dabei sind  $T_1, T_2$  die Zug/Druckkräfte in der Ebene,  $T_{12}, T_{21}$  die Scherkräfte in der Ebene,  $T_{13}, T_{23}$  die Querkräfte,  $M_1, M_2$  die Biegemomente und  $M_{12}, M_{21}$  die Drillmomente. Die Komponenten des Kräftetensors  $\underline{\underline{T}}$  und des Momententensors  $\underline{\underline{M}}$  stellen physikalisch ge-

sehen Schnittkräfte und Schnittmomente dar. Auf Grund der Transformationsformeln zwischen dem Spannungstensor  $\underline{\tau}$  und den Kraftgrößentensoren  $\underline{T}$  und  $\underline{M}$  [2]<sup>1)</sup>

$$\underline{T} = \langle \underline{a} \cdot \underline{\tau} \rangle, \quad (1.4)$$

$$\underline{M} = \langle \underline{a} \cdot \underline{\tau} \rangle \cdot \underline{c},$$

mit  $\underline{c} = \underline{e}_1 \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \underline{e}_1$  als Diskriminantentensor,

folgen die Symmetriebeziehungen  $T_{12} = T_{21}$ ,  $M_{12} = M_{21}$ . Die Komponenten der Kraftgrößentensoren sind auf Bild 1 gezeigt.

Wenn  $\underline{\nu}$  der Vektor der Normalen zum Rand C des zweidimensionalen Kontinuums ist, so gelten folgende Beziehungen

$$T_{(\nu)} = \underline{\nu} \cdot \underline{T}, \quad M_{(\nu)} = \underline{\nu} \cdot \underline{M}. \quad (1.5)$$

Die Gln. (1.5) entsprechen den Cauchyschen Beziehungen der Elastizitätstheorie. Folgende Flächenbelastungen werden eingeführt:

$$\text{Flächenkräfte: } \underline{q} = q_1 \underline{e}_1 + q_2 \underline{e}_2 + q_3 \underline{n}, \quad (1.6)$$

$$\text{Flächenmomente: } \underline{m} = -m_2 \underline{e}_1 + m_1 \underline{e}_2.$$

Die Bewegungsgln. werden mit Hilfe des Impulserhaltungssatzes und des Drehimpulserhaltungssatzes formuliert. Wenn  $\rho_*$  die Dichte des dreidimensionalen Kontinuums ist, so läßt sich die Dichte der Cosseratfläche wie folgt berechnen [2]

$$\rho = \langle \rho_* \rangle. \quad (1.7)$$

Die Massenverteilung innerhalb jedes Punktes der Cosseratfläche wird durch die Trägheitstensoren  $\rho \underline{\Theta}_1$  und  $\rho \underline{\Theta}_2$  gekennzeichnet

$$\rho \underline{\Theta}_1 = -\langle \rho_* \underline{z} \rangle \underline{c}, \quad \rho \underline{\Theta}_2 = \langle \rho_* \underline{z}^2 \rangle \underline{a}. \quad (1.8)$$

Die Gln. (1.7) und (1.8) gelten für Platten konstanter Dicke. Homogenität des Querschnitts wird nicht gefordert. Unter Beachtung der Gln. (1.7), (1.8) und der eingeführten kinematischen Größen (1.1), (1.2) lautet die vollständige kinematische Energie (die Punkte über den kinematischen Größen bezeichnen die Ableitungen nach der Zeit)

$$K = \iint \rho \left( \frac{1}{2} \dot{\underline{u}} \cdot \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{\varphi}} \cdot \underline{\Theta}_1 \cdot \dot{\underline{u}} + \frac{1}{2} \dot{\underline{\varphi}} \cdot \underline{\Theta}_2 \cdot \dot{\underline{\varphi}} \right) dA. \quad (1.9)$$

Für den Impuls und den Drehimpuls erhält man entsprechend [2]

$$\underline{K}_1 = \iint \rho (\dot{\underline{u}} + \underline{\Theta}_1^T \cdot \dot{\underline{\varphi}}) dA, \quad (1.10)$$

$$\underline{K}_2 = \iint \rho [\underline{r} \times (\dot{\underline{u}} + \underline{\Theta}_1^T \cdot \dot{\underline{\varphi}}) + \underline{\Theta}_1 \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{\Theta}_2 \cdot \dot{\underline{\varphi}}] dA.$$

Unter Beachtung der Gln. (1.10) und der Flächen- und Randbelastungen (1.5), (1.6) erhält man den Impuls- und den Drehimpulserhaltungssatz in folgender Form

1) Unter  $\langle \rangle$  ist das Integral  $\int_{-H}^H ( ) dz$  über die Plattendicke 2H zu verstehen.

$$\frac{d}{dt} \underline{K}_1 = \iint \underline{q} dA + \int \underline{T}_{(\nu)} ds, \quad (1.11)$$

$$\frac{d}{dt} \underline{K}_2 = \iint (\underline{m} + \underline{r} \times \underline{q}) dA + \int (\underline{M}_{(\nu)} + \underline{r} \times \underline{T}_{(\nu)}) ds.$$

Dabei ist  $\underline{r}$  der Radiusvektor der Cosseratfläche. Die Kurvenintegrale in den Gln. (1.11) lassen sich nach dem Satz von Green in die entsprechenden Flächenintegrale umformen [9]

$$\int \underline{T}_{(\nu)} ds = \int \underline{\nu} \cdot \underline{T} ds = \iint \nabla \cdot \underline{T} dA, \quad (1.12)$$

$$\int (\underline{M}_{(\nu)} + \underline{r} \times \underline{T}_{(\nu)}) ds = \int [\underline{\nu} \cdot \underline{M} - (\underline{\nu} \cdot \underline{T}) \times \underline{r}] ds = \iint [\nabla \cdot \underline{M} + (\underline{r} \times \nabla \cdot \underline{T}) + \underline{T}_x] dA.$$

$$\text{Dabei ist } \underline{T}_x = T_{13} \underline{e}_1 \times \underline{n} + T_{23} \underline{e}_2 \times \underline{n} = -T_{13} \underline{e}_2 + T_{23} \underline{e}_1,$$

$$\nabla = \underline{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2).$$

Da der Flächenausschnitt der betrachteten Cosseratfläche beliebig ist, lassen sich die Bewegungsgln. in der lokalen Form aus den Gln. (1.11) unter Beachtung von (1.12) ableiten

$$\nabla \cdot \underline{T} + \underline{q} = \rho (\ddot{\underline{u}} + \underline{\Theta}_1^T \cdot \ddot{\underline{\varphi}}) \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \underline{M} + \underline{T}_x + \underline{m} = \rho (\underline{\Theta}_1 \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{\Theta}_2 \cdot \ddot{\underline{\varphi}}).$$

## 2. Ableitung der Grundgleichungen für Rechteckplatten

Die Gln. (1.13) beschreiben die Bewegungen beliebiger in Dickenrichtung homogener und inhomogener Platten. Die Bewegungsgln. lassen sich für den Fall, daß die geometrische Mittelfläche mit der Symmetrieebene der Platte zusammenfällt, entkoppeln. In diesem Fall wird der Trägheitstensor  $\rho \underline{\Theta}_1 = 0$ . Im weiteren werden nur solche Platten betrachtet.

Für Rechteckplatten werden die Gln. (1.13) zu<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} T_{1,x} + T_{12,y} + q_1 &= \rho \ddot{u}, \\ T_{12,x} + T_{2,y} + q_2 &= \rho \ddot{v}, \\ T_{13,x} + T_{23,y} + q_3 &= \rho \ddot{w}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$M_{12,x} + M_{2,y} + m_2 - T_{23} = \langle \rho_* \underline{z}^2 \rangle \ddot{\varphi}_2,$$

$$M_{1,x} + M_{12,y} + m_1 - T_{13} = \langle \rho_* \underline{z}^2 \rangle \ddot{\varphi}_1.$$

In der Arbeit soll nur isotropes Material betrachtet werden. Entsprechend [2], [4] gelten dann folgende konstitutive Gln.

2)  $( )_{,x}$  und  $( )_{,y}$  bezeichnen die Ableitungen nach x und y.

$$\begin{aligned}
T_1 &= (C_1^{11} + C_1^{22}) u_{,x} + (C_1^{11} - C_1^{22}) v_{,y} , \\
T_2 &= (C_1^{11} - C_1^{22}) u_{,x} + (C_1^{11} + C_1^{22}) v_{,y} , \\
T_{12} &= C_1^{22} (u_{,y} + v_{,x}) , \\
T_{13} &= \Gamma (\varphi_1 + w_{,x}) , \\
T_{23} &= \Gamma (\varphi_2 + w_{,y}) , \\
M_1 &= (C_3^{33} + C_3^{44}) \varphi_{1,x} + (C_3^{33} - C_3^{44}) \varphi_{2,y} , \\
M_2 &= (C_3^{33} - C_3^{44}) \varphi_{1,x} + (C_3^{33} + C_3^{44}) \varphi_{2,y} , \\
M_{12} &= C_3^{44} (\varphi_{1,y} + \varphi_{2,x}) ,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei die spezifischen Elastizitätsmoduli  $C_1^{11}$ ,  $C_1^{22}$ ,  $C_3^{33}$ ,  $C_3^{44}$ ,  $\Gamma$  für jedes isotrope Material gelten. Nach Einsetzen der konstitutiven Gln. (2.2) in die Bewegungsgln. (2.1) erhält man zwei Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
(C_1^{11} + C_1^{22}) u_{,xx} + (C_1^{11} - C_1^{22}) v_{,yx} + C_1^{22} (u_{,yy} + v_{,xy}) + q_1 &= \rho \ddot{u} , \\
(C_1^{11} + C_1^{22}) v_{,yy} + (C_1^{11} - C_1^{22}) u_{,xy} + C_1^{22} (u_{,xy} + v_{,xx}) + q_2 &= \rho \ddot{v} ,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma (\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y} + w_{,xx} + w_{,yy}) + q_3 &= \rho \ddot{w} , \\
(C_3^{33} + C_3^{44}) \varphi_{1,xx} + (C_3^{33} - C_3^{44}) \varphi_{2,yx} + C_3^{44} (\varphi_{1,yy} + \varphi_{2,xy}) + m_1 \\
- \Gamma (\varphi_1 + w_{,x}) &= \langle \rho_* z^2 \rangle \ddot{\varphi}_1 ,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
(C_3^{33} - C_3^{44}) \varphi_{1,xy} + (C_3^{33} + C_3^{44}) \varphi_{2,yy} + C_3^{44} (\varphi_{1,yx} + \varphi_{2,xx}) + m_2 \\
- \Gamma (\varphi_2 + w_{,y}) &= \langle \rho_* z^2 \rangle \ddot{\varphi}_2 .
\end{aligned}$$

Die Gln. (2.3) beschreiben die Bewegungen in der Ebene oder den sogenannten verallgemeinerten ebenen Spannungszustand. Die Gln. (2.4) kennzeichnen die Transversalbewegungen, wobei die Biege- und die Schubschwingungen gekoppelt sind. Damit sind die Gln. für die Rechteckplatte bekannt.

### 3. Differentialgl. der Transversalschwingungen für Rechteckplatten

Bei Einführung des Laplaceoperators

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = (\ )_{,xx} + (\ )_{,yy}$$

und einer Hilfsfunktion

$$\phi = \varphi_{1,x} + \varphi_{2,y}$$

folgt aus den Gln. (2.4)

$$\begin{aligned}
C_3^{44} \Delta \varphi_1 + C_3^{33} \phi_{,x} - \Gamma (\varphi_1 + w_{,x}) + m_1 &= \langle \rho_* z^2 \rangle \ddot{\varphi}_1 , \\
C_3^{44} \Delta \varphi_2 + C_3^{33} \phi_{,y} - \Gamma (\varphi_2 + w_{,y}) + m_2 &= \langle \rho_* z^2 \rangle \ddot{\varphi}_2 , \\
\Gamma (\phi + \Delta w) + q_3 &= \rho \ddot{w} .
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Diese fallen für homogene (einschichtige) Platten mit den aus der Literatur bekannten Gln. [8] zusammen, wobei die Gln. (3.1) zusätzlich Flächenmomente enthalten. Für in Dickenrichtung inhomogene Platten haben die Gln. (3.1) die gleiche Struktur. Der Unterschied tritt in den konkreten Ausdrücken für die spezifischen Elastizitätsmoduli, die Dichtefunktion und den Trägheitstensor auf.

Nach einfachen Umformungen lassen sich aus (3.1) die Verdrehungen eliminieren. Mit Einführung der Hilfsfunktion

$$M = m_{1,x} + m_{2,y}$$

erhält man die allgemeine Gl. für die Transversalschwingungen

$$\begin{aligned}
(\Delta - \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) [(C_3^{33} + C_3^{44}) \Delta - \langle \rho_* z^2 \rangle \frac{\partial^2}{\partial t^2}] w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
= (1 - \frac{C_3^{33} + C_3^{44}}{\Gamma} \Delta + \frac{\langle \rho_* z^2 \rangle}{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) q_3 + M .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Hieraus lassen sich wichtige Sonderfälle ableiten:

– Vernachlässigung der Drehträgeit ( $\langle \rho_* z^2 \rangle = 0$ )

$$\begin{aligned}
(\Delta - \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) (C_3^{33} + C_3^{44}) \Delta w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
= (1 - \frac{C_3^{33} + C_3^{44}}{\Gamma} \Delta) q_3 + M ,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

– Vernachlässigung des Querschubs ( $\Gamma \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned}
\Delta [(C_3^{33} + C_3^{44}) \Delta - \langle \rho_* z^2 \rangle \frac{\partial^2}{\partial t^2}] w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_3 + M , \\
- \text{klassische Gl. nach der Kirchhoff-Theorie}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

( $\langle \rho_* z^2 \rangle = 0, \Gamma \rightarrow \infty$ )

$$(C_3^{33} + C_3^{44}) \Delta \Delta w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_3 + M , \tag{3.5}$$

– Eigenschwingungen (Transversalschwingungen):

$$q_3 = 0, m_1 = m_2 = 0$$

$$(\Delta - \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) [(C_3^{33} + C_3^{44}) \Delta - \langle \rho_* z^2 \rangle \frac{\partial^2}{\partial t^2}] w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 , \tag{3.6}$$

– statische Biegegleichung nach der Reissnertheorie (Unabhängigkeit von der Zeit)

$$(C_3^{33} + C_3^{44}) \Delta \Delta w = (1 - \frac{C_3^{33} + C_3^{44}}{\Gamma} \Delta) q_3 + M . \tag{3.7}$$

### 4. Die allseitig gelagerte Rechteckplatte

Zunächst sollen die Transversalschwingungen einer allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ) untersucht werden, wobei von der Gl. (3.6) ausgegangen wird. Wenn  $\underline{\nu}$  die Normale zum Rand C der

Platte kennzeichnet, so müssen am Plattenrand C folgende Randbedingungen erfüllt sein

$$w|_C = 0, \quad \nu \cdot M|_C = 0.$$

Folgende Funktion erfüllt offensichtlich die Gl. (3.6) und die erste Randbedingung

$$w(x, y, t) = W(x, y) e^{i\omega t} = \sum_{m, n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y e^{i\omega_{mn} t}, \quad (4.1)$$

wobei  $\omega_{mn}$  die Eigenfrequenz ist. Ferner gilt  $\lambda_m = \frac{\pi m}{a}$ ,  $\mu_n = \frac{\pi n}{b}$  ( $m, n=1, 2, \dots, \infty$ ). Man kann leicht überprüfen,

daß bei geeigneter Wahl der Funktionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Funktion (4.1) gemeinsam mit diesen die zweite Randbedingung erfüllt.

Im Falle der Kirchhoff-Theorie (Vernachlässigung von Querschub und Drehträchtigkeit) erhält man nach Einsetzen von Gl. (4.1) in die modifizierte Gl. (3.6) oder (3.5) folgende Eigenfrequenz für die Transversalschwingungen

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}^K = \sqrt{\frac{C_3^{33} + C_3^{44}}{\rho}} (\lambda_m^2 + \mu_n^2). \quad (4.2)$$

Diese und die nachfolgenden Ergebnisse sind für homogene und inhomogene Platten gültig. Bei alleiniger Vernachlässigung des Querschubs erhält man folgende Eigenfrequenz

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}^K \sqrt{\frac{1}{1 + \beta_{mn}^{R2}}} \quad (4.3)$$

mit

$$\beta_{mn}^{R2} = \frac{\langle \rho_* z^2 \rangle}{\rho} (\lambda_m^2 + \mu_n^2), \quad (4.4)$$

bei alleiniger Vernachlässigung der Drehträchtigkeit ergibt sich die Eigenfrequenz mit

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}^K \sqrt{\frac{1}{1 + \beta_{mn}^{Q2}}}, \quad (4.5)$$

wobei

$$\beta_{mn}^{Q2} = \frac{C_3^{33} + C_3^{44}}{\Gamma} (\lambda_m^2 + \mu_n^2)$$

ist.

Im allgemeinen Fall erhält man nach dem Einsetzen der Durchbiegungen (4.1) in die Gl. (3.6) bei Beachtung der Ausdrücke für die Korrekturfaktoren  $\beta_{mn}^{R2}$  und  $\beta_{mn}^{Q2}$  (4.4), (4.6) folgende Bestimmungsgl. für die Eigenfrequenzen

$$\omega_{mn}^{K2} - \omega_{mn}^2 (1 + \beta_{mn}^{R2} + \beta_{mn}^{Q2}) + \omega_{mn}^4 \frac{\langle \rho_* z^2 \rangle}{\Gamma} = 0. \quad (4.7)$$

Bei Beachtung der Identität

$$\frac{\langle \rho_* z^2 \rangle}{\Gamma} = \frac{\beta_{mn}^{R2}}{\omega_{mn}^{K2} \beta_{mn}^{Q2}}$$

ergibt sich die Lösung der Gl. (4.7) mit

$$\omega_{mn} = \omega_{mn}^K \frac{1}{\sqrt{2} \beta_{mn}^R \beta_{mn}^Q} \quad (4.8)$$

$$\sqrt{1 + \beta_{mn}^{Q2} + \beta_{mn}^{R2}} \pm \sqrt{(1 + \beta_{mn}^{Q2} + \beta_{mn}^{R2})^2 - 4\beta_{mn}^{Q2} \beta_{mn}^{R2}}$$

Die Lösung ist gültig, wenn  $\beta_{mn}^{R2} \beta_{mn}^{Q2} \neq 0$  ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so ist statt der biquadratischen Gl. (4.7) die entsprechende quadratische Gl. zu betrachten. Die Lösung der quadratischen Gl. führt dann in Abhängigkeit vom betrachteten Sonderfall auf die bereits angeführten Eigenfrequenzen (4.3) und (4.5).

Für den Ingenieur ist es wichtig zu wissen, welche Größenordnung die Korrekturfaktoren (4.4) und (4.6) haben. Zunächst wird der Fall homogener (einschichtiger) Platten betrachtet. Wenn  $L$  ein charakteristisches Längenmaß der Platte ist, so sind  $\lambda_m^2$  und  $\mu_n^2 L^2$  proportional. Ist  $2H$  die Dicke der Platte, dann folgt

$$\rho = \langle \rho_* \rangle = 2H\rho_*,$$

$$\langle \rho_* z^2 \rangle = \frac{2}{3} \rho_* H^3$$

Die spezifischen Elastizitätsmoduli erhält man entsprechend [1], [2] mit

$$C_3^{33} + C_3^{44} = \frac{2}{3} \frac{EH^3}{1 - \nu^2},$$

$$\Gamma = \frac{\pi^2}{6} GH,$$

wobei  $E, G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ ,  $\nu$  Elastizitäts-, Schubmodul und

Querkontraktionszahl des Plattenmaterials sind. Damit haben die Korrekturfaktoren (4.4), (4.6) folgende Größenordnung

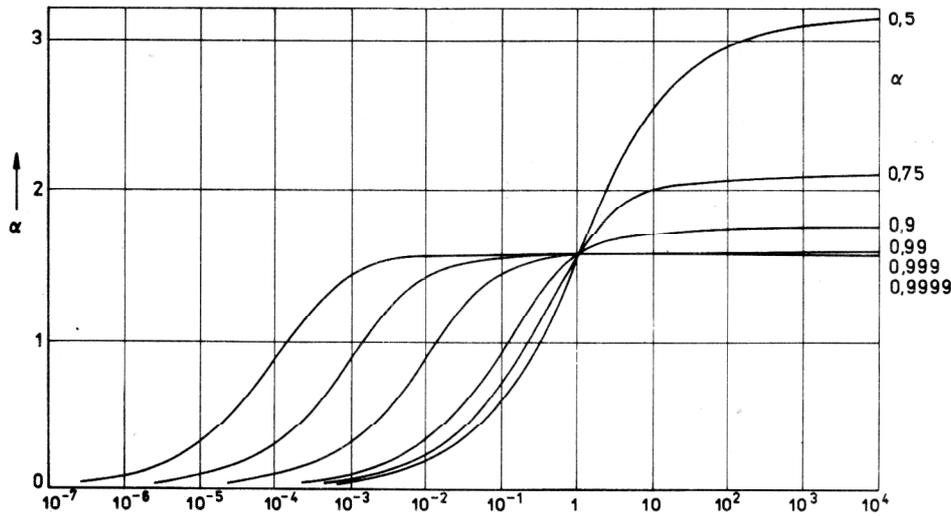
$$\beta_{mn}^{R2} \sim \frac{H^2}{3L^2} = 0\left(\frac{H^2}{L^2}\right),$$

$$\beta_{mn}^{Q2} \sim \frac{8H^2}{\pi^2(1 - \nu)} = 0\left(\frac{H^2}{L^2}\right).$$

Die beiden Korrekturfaktoren haben die gleiche Größenordnung, wobei analog wie bei der Analyse von Balken  $\beta_{mn}^{Q2}$  dreimal so groß ist wie  $\beta_{mn}^{R2}$  (bei  $\nu = 0$ ) [8]. Im Falle dünner, homogener Platten ( $\frac{H^2}{L^2} \ll 1$ )

sind beide Korrekturfaktoren für die ersten Eigenfrequenzen vernachlässigbar. Damit genügt es, die Eigenfrequenzen entsprechend der klassischen Kirchhoff-Theorie nach Gl. (4.2) zu berechnen.

Bild 2



Im Falle inhomogener Platten erhält man bereits für  $\frac{H^2}{L^2} \ll 1$  ein anderes Bild. Für  $\beta_{mn}^R$  kann man zeigen, daß dieser Korrekturfaktor die gleiche Größenordnung wie für homogene Platten besitzt.  $\beta_{mn}^{Q^2}$  kann dagegen die Größenordnung  $O(1)$  haben. Entsprechend [4] ist

$$\Gamma = \frac{\gamma^2}{H^2} C_3^{44}$$

Damit erhält man für  $\beta_{mn}^{Q^2}$  folgende Abschätzung der Größenordnung

$$\beta_{mn}^{Q^2} \sim O\left(\frac{H^2}{\gamma^2 L^2}\right)$$

$\gamma^2$  kann für inhomogenen Platten sehr klein werden, womit der Korrekturfaktor  $\beta_{mn}^{Q^2}$  die Größenordnung  $O(1)$  z. B. für reale Sandwichkonstruktionen haben kann. Auf Bild 2 sind die Werte für  $\gamma$  in Abhängigkeit vom Verhältnis der Schichtdicken  $\alpha = \frac{h}{H}$  und vom Verhältnis der Schubmoduli  $\mu = \frac{G^K}{G^D}$  für den auf Bild 3 gezeigten symmetrischen Sandwichquerschnitt dargestellt.

Auf Grund der getroffenen Abschätzungen kann gesagt werden, daß die ersten Eigenfrequenzen bei Platten mit stark inhomogenen Querschnitt nach der Gl. (4.5) berechnet werden können. In diesem Fall darf die Querschubsteifigkeit in den Rechnungen nicht vernachlässigt werden. Diese Einschätzung wird auch in der Literatur bestätigt.

## 5. Der verallgemeinerte ebene Spannungszustand

Im Rahmen der hier betrachteten linearen Theorie führt die Einbeziehung von Drehträgeit und Querschub bei der Analyse des verallgemeinerten ebenen Spannungszustandes zu keinen von der klassischen Theorie abweichenden Ergebnissen. Hier soll gezeigt werden, daß auch im Rahmen einer direkt formulierten Theorie das Ein-

führen einer Spannungsfunktion möglich ist, wobei der Begriff Spannung nicht wörtlich zu nehmen ist. In den Gln. (2.3) werden die dynamischen Glieder Null gesetzt. Wenn  $q_1 = q_2 = 0$  ist, so kann man folgende Funktionen einführen

$$T_1 = G_{,y} \quad , \quad T_{12} = -G_{,x} \quad , \quad T_2 = -H_{,x} \quad , \quad T_{21} = H_{,y}$$

Die Funktionen  $G$  und  $H$  erfüllen die ersten beiden Gln. (2.1). Entsprechend der Symmetriebeziehung  $T_{12} = T_{21}$  gilt  $-G_{,x} = H_{,y}$ . Diese Beziehung wird von folgender Spannungsfunktion  $F$  erfüllt

$$G = F_{,y} \quad , \quad H = -F_{,x}$$

Im Falle konstanter Flächenkräfte erfüllt die gleiche Spannungsfunktion die Gleichgewichtsbeziehungen, wobei für

$$T_{12} = -F_{,xy} - q_1 y - q_2 x$$

gesetzt werden muß.

Ausgehend von den Verträglichkeitsbedingungen

$$\nabla \cdot \left\{ \underline{\underline{c}} \cdot [\nabla \cdot (\underline{\underline{c}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}})] \right\} = 0$$

mit  $\underline{\underline{c}} = \frac{1}{2} [\nabla \underline{\underline{u}} + (\nabla \underline{\underline{u}})^T]$  als Deformationstensor

erhält man im betrachteten Fall der Rechteckscheibe bei Beachtung der konstitutiven Gln. [4] dann folgende Gl. für die Spannungsfunktion  $F$

$$F_{,xxxx} + 2F_{,xxyy} + F_{,yyyy} = 0$$

oder bei Verwendung des Laplaceoperator

$$\Delta \Delta F = 0$$

Für in Dickenrichtung homogene und inhomogene Scheiben erhält man somit die bekannte Bipotentialgl. der klassischen Scheibentheorie. Es treten also im Rahmen der linearen Theorie keine neuen Effekte auf, so daß hier auf weitere Ausführungen verzichtet werden kann.

## 6. Plattenbiegung

In diesem Abschnitt wird folgender Sonderfall der Gl. (3.7) betrachtet:  $M = 0$ . Die Belastung  $q_3 = q \neq 0$  wird in eine Fourierreihe entwickelt

$$q = \sum_{m,n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (6.1)$$

mit

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \, dx \, dy.$$

Für die Durchbiegungen enthält man entsprechend einer Arbeit von Reissner [11]

$$w = \frac{1}{C_3^{33} + C_3^{44}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \left[ 1 + \frac{C_3^{33} + C_3^{44}}{\Gamma} (\lambda_m^2 + \mu_n^2) \right] \sin \lambda_m x \sin \mu_n y \quad (6.2)$$

Die Lösung (6.2) geht bei  $\Gamma \rightarrow \infty$  (Vernachlässigung der Querschubsteifigkeit) gegen die klassische Lösung nach der Kirchhoff-Theorie. Die entsprechenden Verdrehwinkel sind

$$\varphi_1 = -\frac{1}{C_3^{33} + C_3^{44}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \lambda_m}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \cos \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad (6.3)$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{C_3^{33} + C_3^{44}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \mu_n}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} \sin \lambda_m x \cos \mu_n y.$$

Die entsprechenden Kräfte und Momente erhält man mit Hilfe der konstitutiven Gln. (2.2). Die Lösungen für die anderen Sonderfälle  $q_3 = 0$ ,  $M \neq 0$  lassen sich analog ableiten.

## 7. Beispiele

### 7.1. Ermittlung der ersten Frequenz der Transversalschwingungen

Betrachtet wird eine dreischichtige quadratische Platte mit dem auf Bild 3 gezeigten Querschnittsaufbau. Die entsprechenden Elastizitätsmoduli werden in der in [1], [4] beschriebenen Form verwendet:

$$C_3^{33} + C_3^{44} = \frac{2}{3} \left[ \frac{E_D (H^3 - h^3)}{1 - \nu_D^2} + \frac{E_K h^3}{1 - \nu_K^2} \right]$$

$$\Gamma = \gamma^2 \left[ \frac{E_D (H^3 - h^3)}{3(1 + \nu_D)} + \frac{E_K h^3}{3(1 + \nu_K)} \right] / H^2$$

mit  $\gamma^2$  als kleinster positiver Wurzel folgender Gl.

$$G_D \sin \gamma (1 - \alpha) \sin \gamma \alpha - G_K \cos \gamma (1 - \alpha) \cos \gamma \alpha = 0.$$

Im betrachteten Beispiel sei  $\nu_D = \nu_K = 0,3$ ,  $\alpha = \frac{h}{H} = 0,8$ ,

$$\left( \frac{2\pi H}{a} \right)^2 + \left( \frac{2\pi H}{b} \right)^2 = 0,02 \pi^2.$$

In der Tabelle 1 sind die Ergebnisse nach Gl. (4.2) und Gl. (4.7) mit den Ergebnissen einer Theorie höherer Ord-

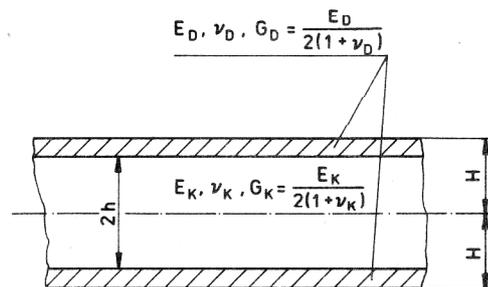


Bild 3

Tabelle 1

Erste Eigenfrequenz (Transversalschwingungen) einer quadratischen 3-Schicht-Rechteckplatte

$\frac{\rho_D}{\rho_K}$	$\frac{G_D}{G_K}$	Gl. (4.2)	[13]-3D-Theorie	[12] Theorie höherer Ordnung	Gl. (4.5)
$\lambda_{11} = \omega_{11} \sqrt{\frac{\rho_K 4H^2}{G_K}}$					
1	1	0,09632	0,09315	0,09300	0,09368
1	2	0,11749	0,11248	0,11234	0,11311
1	5	0,16549	0,15384	0,15371	0,15461
1	15	0,26955	0,22958	0,22957	0,23623
2	15	0,24607	0,20947	0,20937	0,21017
3	15	0,22781	0,19385	0,19369	0,19458

**Tabelle 2**

Größe der Korrekturfaktoren  $\beta_{11}^{R^2}$  und  $\beta_{11}^{Q^2}$

$\frac{\rho_D}{\rho_K}$	$\frac{G_D}{G_K}$	$\beta_{11}^{R^2}$	$\beta_{11}^{Q^2}$
1	1	0,02350	0,05714
1	2	0,02350	0,07888
1	5	0,02350	0,14567
1	15	0,02350	0,37071
2	15	0,02914	0,37071
3	15	0,03317	0,37071

nung für mehrschichtige Platten [12] und der dreidimensionalen Theorie [13] gegenübergestellt. In Tabelle 2 sind die Werte der Korrekturfaktoren  $\beta_{11}^{R^2}$  und  $\beta_{11}^{Q^2}$  angegeben.

**7.2. Ermittlung der Durchbiegungen**

Das zweite Beispiel illustriert die Berechnungen der Durchbiegungen. Die quadratische Platte sei analog wie im ersten Beispiel aufgebaut. Die Belastung  $q_3 = q$  sei eine konstante Flächenlast. In der Tabelle 3 werden die Berechnungen nach Abschnitt 6 mit Berechnungen aus der Literatur [14], [15] und experimentellen Resultaten [15] verglichen.

**Tabelle 3**

Durchbiegungen von 3-Schicht-Rechteckplatten bei konstanter Flächenbelastung

Nr.	h cm	a=b cm	Kennwerte der Platte H-h = 0,081 cm E <sub>D</sub> = 6,87 · 10 <sup>6</sup> N/cm <sup>2</sup> G <sub>K</sub> = 4,03 · 10 <sup>3</sup> N/cm <sup>2</sup>	q N/cm <sup>2</sup>	Durchbiegung im Zentrum der Platte		
					Experi- ment[15]	nach den Gln. aus [15]	nach Gl. (6.2)
1	0,959	112,3	0,4974	2,794	3,294	3,15	3,106
2	0,809	112,3	0,4974	4,013	4,426	4,25	4,209
3	0,954	96,6	0,4974	1,829	1,940	1,841	1,812
4	0,8025	96,6	0,4974	2,210	2,597	2,46	2,451
5	0,995	81,4	0,4974	1,041	1,069	0,993	0,981
6	0,8025	81,4	0,4974	1,372	1,418	1,34	1,326
7	0,9565	71,2	0,4974	0,684	0,684	0,64	0,623
8	0,804	71,2	0,4974	0,762	0,898	0,83	0,829
9	0,8075	55,8	1,491	0,935	1,210	1,12	1,099
10	0,9575	55,8	1,991	0,993	1,260	-	1,126

**8. Abschließende Bemerkungen**

In der Arbeit wurde eine einheitliche Betrachtungsweise für in Dickenrichtung homogene und inhomogene Scheiben und Platten vorgestellt. Für den Fall, daß die Platte eine Inhomogenität in Dickenrichtung (z. B. Mehrschichtigkeit) besitzt, erweist sich die vorgeschlagene direkte Betrachtungsweise als effektiv. Wenn die spezifischen Elastizitätsmoduli richtig bestimmt sind, dann genügt es, die bekannten klassischen Lösungen nach der Kirchhoff- oder Reissner-Timoschenko-Theorie für homogene Platten mit den entsprechenden spezifischen Elastizitätsmoduli zu versehen. Die richtige Bestimmung der spezifischen Elastizitätsmoduli ist besonders wichtig bei inhomogenen Platten. Wenn sich der Elastizitätsmodul des Plattenmaterials über die Dicke stark ändert (stetig oder unstetig), wird der Einfluß der Querschubdeformation für die Einschätzung des mechanischen Gesamtverhaltens wesentlich. Auf Grund der Probleme bei der richtigen Bestimmung der Querschubsteifigkeit kommen viele Autoren zu einer skeptischen Einschätzung der direkten Betrachtungsweise.

Im Gegensatz zu vielen Theorien höherer Ordnung, aber auch zur dreidimensionalen Elastizitätstheorie erhält man bei einfachen Beispielen, von denen einige in der Arbeit angeführt sind, bei der direkten Betrachtungsweise geschlossene Lösungen. Weiterhin zeigten die vorgestellten Ergebnisse eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen nach Theorien höherer Ordnung, nach der dreidimensionalen Elastizitätstheorie und mit dem Experiment. Damit haben die sogenannten zweidimensionalen, direkt formulierten Theorien bei der globalen Einschätzung des Verhaltens von Platten auch

in Zukunft große Bedeutung, zumal sich in Dickenrichtung homogene und inhomogene Objekte gleichartig behandeln lassen. Bei der Betrachtung lokaler Effekte versagt die Theorie wie jede andere zweidimensionale Theorie, da die lokalen Effekte vielfach dreidimensionalen Charakter besitzen.

In dem Artikel wurde teils die allgemeine Tensorschreibweise (vgl. z. B. [9]), teils die Komponentenschreibweise verwendet. Das Problem der Bestimmung der Materialkonstanten ist in [4] beschrieben und wird in einer folgenden Arbeit in verallgemeinerter Form dargestellt werden. Es wurde daher hier auf eine ausführliche Darstellung verzichtet.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Altenbach, H., Shilin, P.: Eine nichtlineare Theorie dünner Dreischichtschalen und ihrer Anwendung auf die Stabilitätsuntersuchung eines dreischichtigen Streifens, *Technische Mechanik* 3 (1982), 2, 23 – 30.
- [ 2 ] Жилин, П. А.: Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек, Ленинград, Труды ЛПИ № 386, 1982, 29 – 46.
- [ 3 ] Ericksen, J.L., Truesdell, C.: Exact theory of stress and strain in rods and shells, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1, 1950, 295 – 323.
- [ 4 ] Altenbach, H., Shilin, P.A.: Die Bestimmung der Deformationsenergie für dreischichtige, orthotrope, dünne Schalen konstanter Dicke, *Wiss. Z., Techn. Hochsch. Magdeburg*, 26 (1982) 4, 7 – 10.
- [ 5 ] Григолюк, Э. И., Коган, Ф. А.: Современное состояние теории многослойных оболочек, *Прикл. механика*, 8 (1972), 6, 3 – 17.
- [ 6 ] Болотин, В. В., Новичков, Ю. Н.: Механика многослойных конструкций, Москва, Машиностроение, 1980.
- [ 7 ] Амбарцумян, С. А.: Теория анизотропных пластин, Москва, Наука, 1967.
- [ 8 ] Григолюк, Э. И., Селезов, И. П.: Неклассические теории клеобаний стержней, пластин и оболочек, *Механика твердых деформируемых тел*, т. 5, Москва, ВИНТИ, 1973.
- [ 9 ] Лурье, А. И.: Нелинейная теория упругости, Москва, Наука, 1980.
- [10] Варвак, П. М., Рябов, А. Ф., Пискунов, В. Г., Рассказов, А. О., Сидиков, А. С., Федоренко, Ю. М.: Задачи о колебаниях многослойных оболочек и пластин, Харьков, Динамика и прочность машин, вып. 23, 1976, 5 – 10.
- [11] Reissner, E.: Small bending and stretching of Sandwich-Type shells, *NACA-Report* 975, 1950.
- [12] Рассказов, А. О., Соколовская, И. И., Шульга, Н. А.: Расчет собственных частот шарнирно-опертых слоистых оболочек на прямоугольном плане, Харьков, Динамика и прочность машин, вып. 36, 1982, 85 – 89.
- [13] Сприниваз, З., Йога Рао, С. В., Рао, А. К.: Некоторые результаты точного расчета толстых многослойных плит при колебаниях и выпучивании. *Прикладная механика /Мир/*, 1970, 3, 295 – 297.
- [14] Пикуль, В. А.: Общая техническая теория тонких упругих пластин и пологих оболочек, Москва, Наука, 1977.
- [15] Александров, А. Я., Брюккер, Л. Е., Куршин, Л. М., Пруссаков, А. П.: Расчет трехслойных панелей, Москва, Оборонгиз, 1960.

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Ing. H. Altenbach  
Technische Hochschule „Otto von Guericke“  
Sektion Dieselmotoren, Pumpen und Verdichter  
3010 Magdeburg  
PSF 124