

Mathematische und numerische Modellierung der Wärmebilanz von rotationssymmetrischen Elektroden

Günter Bärwolff, Helmar Krahl

0. Einleitung

Bei dem Bau von Lampen mit hohen Qualitätsparametern sind die Dimensionierung der Elektroden, d. h. Anode und Katode, sowie die optimale Stromversorgung von großer Bedeutung. Da es nicht möglich ist, die Bestimmung geeigneter Parameter allein durch experimentelle Untersuchungen zu erhalten, wird es erforderlich, ein mathematisches Modell für die Lampe oder einen Teil davon aufzustellen und auszuwerten. Ein Modell für die gesamte Lampe aufzustellen, erweist sich als sehr kompliziert. Es hat sich gezeigt, daß die Modellierung der Energiebilanz einer Elektrode der Lampe wichtige Hinweise für den Lampenbau liefern kann (vgl. dazu [1] und [2]).

In der vorliegenden Arbeit, die einige Ergebnisse der mehrjährigen Zusammenarbeit der Autoren zusammenfaßt, soll die Energiebilanz einer Elektrode aufgestellt werden. Des weiteren wird ein numerisches Verfahren zur Bestimmung der Temperaturverteilung über der Elektrode und damit zur Auswertung des mathematischen Modells entwickelt.

Für in der Entwicklung befindliche Lampen werden Beispielrechnungen durchgeführt. Aufgrund der Rechnungen konnten Schlußfolgerungen hinsichtlich des Einflusses von geometrischen und elektrischen Parametern auf die Temperaturfelder über den Elektroden der interessierenden Lampen gezogen werden.

1. Mathematische Modellierung

Die einfachste Möglichkeit der Beschreibung der Energieverhältnisse von Stabelektroden ist die eindimensionale Modellierung, die im folgenden kurz beschrieben werden soll. Es wird davon ausgegangen, daß die Elektrode an der Spitze mit der Heizleistung q beheizt wird. Am Schaft (Fußpunkt) sei eine konstante Temperatur T_F bekannt. Als wichtige Voraussetzung für die eindimensionale Modellierung wird $l \gg d$ gefordert, wobei l die Länge und d der Durchmesser der Elektrode sind. Damit kann die Wärmeleitung in radialer Richtung vernachlässigt werden. Eine wesentliche Modellkomponente ist die Strahlung des Elektrodenmaterials nach dem Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetz

$$q_s = \sigma_\nu T^\nu \quad (1)$$

ν hat in der Regel den Wert 4. Untersuchungen an verschiedenen Materialien zeigten jedoch, daß es Metalle gibt, bei denen die Abstrahlung durch das Gesetz (1) mit

$\nu = 5$ besser erfaßt wird (vgl. dazu [1]). σ_ν ist die Stefan-Boltzmannsche Konstante, die für das jeweilige ν angepaßt werden muß. Für $\nu = 5$ findet man in [1] $\sigma_\nu = 6,27 \cdot 10^{-16} \text{ W}/(\text{cm}^2\text{K}^5)$. Auf Bild 1 ist die Wärme-

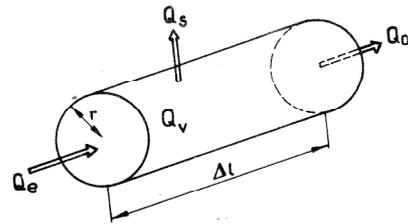


Bild 1

bilanz eines Volumenelementes skizziert. Q_s ist der abgestrahlte Wärmestrom über die Mantelfläche. Q_e ist der in das Volumenelement eintretende Wärmestrom über die Eintrittsfläche. Q_a ist der aus dem Volumenelement austretende Wärmestrom (in axialer Richtung). Q_v steht für die Wärmestromänderung im Inneren der Elektrode (z. B. Ohmsches Gesetz). Als Wärmestrombilanz ergibt sich

$$Q_a = Q_e - Q_s - Q_v \quad (2)$$

Die Berücksichtigung des Fourierschen Gesetzes ergibt mit T als Temperatur und λ als Wärmeleitfähigkeit

$$-A_a \lambda \frac{dT}{dx} = -A_e \lambda \frac{dT}{dx} - A_m q_s - A_v q_v \quad (3)$$

A_e , A_a und A_m sind die Grund-, Deck- bzw. Mantelfläche des Volumenelements und A_v ist das Volumen. Führt man den Grenzübergang $\Delta l \rightarrow 0$ durch, ergibt sich schließlich unter Berücksichtigung des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes

$$-\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + \frac{2 \sigma_\nu}{r} T^\nu = -q_v \quad (4)$$

Mit der Differentialgleichung (4) liegt eine Bilanzgleichung für die Energieverhältnisse eines Stabes für $x \in (0, L)$ vor. Mit der Randbedingung (Heizung)

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (5)$$

an der Spitze des Stabes ($x = L$) und der Bedingung

$$T = T_F \quad (6)$$

am Fußpunkt ($x = 0$) liegt ein eindimensionales mathematisches Modell einer Stabelektrode vor. In [3] wurde für (4), (5), (6) ein Differenzenverfahren zur Lösung

konstruiert und begründet. Das eindimensionale Modell erwies sich für eine Reihe von Aufgabenstellungen als ausreichend. Bei der Herleitung der Gleichung (4) kann man auch Stäbe (Elektroden) berücksichtigen, bei denen der Radius in Abhängigkeit von x veränderlich ist. Wenn $r(x)$ eine stetig-differenzierbare Funktion ist, dann ergibt sich statt (4) die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx}(\lambda r^2 \frac{dT}{dx}) + 2r \sigma_\nu T^\nu = r^2 q_\nu. \quad (7)$$

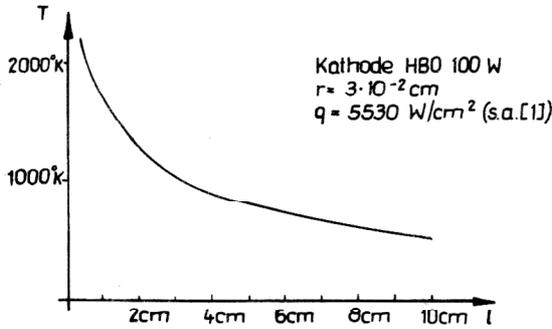


Bild 2

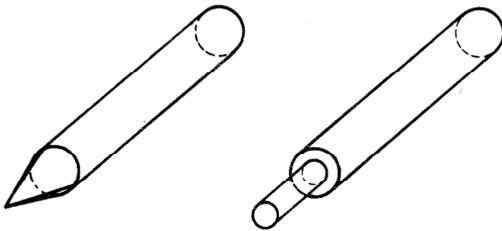


Bild 3

Bild 2 zeigt den berechneten Temperaturverlauf einer „dünnen“ Wolframelektrode auf der Basis des eben dargestellten eindimensionalen Modells. Bei komplizierter gestalteten Elektroden, wie sie im Bild 3 zu sehen sind, und bei der Verletzung der Bedingung $l \gg d$ muß man zur räumlichen Betrachtung übergehen. Im folgenden soll ein räumliches Modell entwickelt werden. Die oben bei der eindimensionalen Modellierung praktizierte Vorgehensweise führt im Inneren der Elektrode ($\Omega \subset R^3$) zur Wärmeleitungsgleichung für einen festen Körper. Wenn $f(T)$ ein Glied zur Beschreibung von Wärmestromänderungen im Inneren ist (z. B. die Berücksichtigung des Ohmschen Gesetzes, vgl. dazu [2]), hat die Wärmeleitungsgleichung die Form

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = f(T). \quad (8)$$

Die Abstrahlung von der Oberfläche, die im eindimensionalen Modell als Senkenglied in der Differentialgleichung erscheint, wird im räumlichen Fall als Randbedingung

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \sigma_\nu T^\nu \quad (9)$$

auf der Mantelfläche (Γ_1) formuliert. An der Elektrodenspitze (Randfläche Γ_0) liegt die Heizleistung q an, so daß sich die Randbedingung

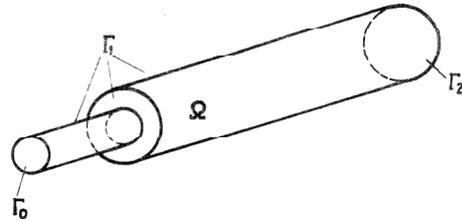


Bild 4

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q$$

auf Γ_0 ergibt. An der Elektrodengrundfläche Γ_2 wird von einem gegebenen Temperaturfeld

$$T = T_F \quad (10)$$

ausgegangen. Das Bild 4 zeigt das Beispiel einer realen Elektrode und die Position von Ω , Γ_0 , Γ_1 und Γ_2 . Mit dem Randwertproblem (8) – (11) liegt ein räumliches Modell zur Beschreibung der stationären Energieverhältnisse einer Elektrode vor. Da im wesentlichen rotationsymmetrische Elektroden beschrieben werden sollen, wird die Aufgabe (8) bis (11) im folgenden quasieben in Zylinderkoordinaten betrachtet. Da sich das Randwertproblem nicht geschlossen lösen läßt, ist es erforderlich, ein numerisches Verfahren zur Lösung zu konstruieren.

2. Numerische Lösung der räumlichen Randwertaufgabe

Für die Aufgabe (8) bis (11) soll ein Galerkin-Differenzenverfahren konstruiert werden. Dabei wird wie in [4] vorgegangen. Grundlage für die Herleitung des Differenzenverfahrens ist die sogenannte schwache oder funktionalanalytische Formulierung der Randwertaufgabe. Als Voraussetzung für dieses Vorgehen ist die Homogenisierung der Aufgabe, d. h. die Einführung einer geeigneten Funktion T' mit $T' = T_F$ auf Γ_2 , so daß die für $T = T - T'$ umformulierte Randwertaufgabe (8) bis (11) bzgl. der wesentlichen Randbedingung (11) homogen wird, erforderlich. Aus Gründen der Übersichtlichkeit und ohne die Allgemeinheit einzuschränken wird im weiteren mit $T_F = 0$ und $T' = 0$ gearbeitet. An der praktischen Herleitung des Differenzenverfahrens ändert diese Annahme nichts. Aus (8) bis (11) ergibt sich wie in [4] die schwache Aufgabenstellung in Zylinderkoordinaten

$$\int_{\Omega_M} \lambda \nabla T \nabla h r dr dz + \int_{S_0} q h r d\gamma_0 + \int_{S_1} \sigma_\nu T^\nu h r d\gamma_1 = \int_{\Omega_M} f(T) h r dr dz. \quad (12)$$

Ω_M ist dabei die Schnittfläche von Ω und einer Meridianfläche. S_0 , S_1 und S_2 sind Schnittlinien der Randflächen Γ_0 , Γ_1 und Γ_2 mit einer Meridianfläche. h ist eine Testfunktion, die auf dem Rand S_2 verschwindet. Die theoretischen Grundlagen für die weitere Herleitung des Galerkin-Differenzenverfahrens sind in [5] sowie in [4] für die vorliegende Aufgabe dargelegt. Grund-

lage für die Diskretisierung ist die Zerlegung des R^2 in achsenparallele Rechtecke durch

$$R_h^2 = \left\{ (r_i, z_j) \mid r_i = \sum_{k=1}^i \Delta r_K \text{ für } i > 0, \right. \\ r_i = - \sum_{k=i}^{-1} \Delta r_K \text{ für } i < 0, \\ z_j = \sum_{k=1}^j \Delta z_K \text{ für } j > 0, \\ z_j = - \sum_{k=j}^{-1} \Delta z_K \text{ für } j < 0, r_0 = z_0 = 0, \\ \left. i, j \text{ ganze Zahlen, } \Delta r_i, \Delta z_j > 0 \right\}$$

Die Diskretisierung des R^2 sei dabei so gewählt, daß für

$$\Omega_h = R_h^2 \cap \Omega_M, S_{oh} = R_h^2 \cap S_o, S_{1h} = R_h^2 \cap S_1, \\ S_{2h} = R_h^2 \cap S_2$$

gilt, daß die Nachbarpunkte in r - oder z -Richtung eines Netzpunktes aus Ω_h entweder wieder aus Ω_h sind oder Elemente von S_{1h} , S_{2h} oder S_{oh} sind. Diese Voraussetzung an die Diskretisierung kann bei den praktisch relevanten Elektrodengeometrien immer realisiert werden, ist aber nicht unbedingt erforderlich. Im Bild 5 ist eine mögliche Diskretisierung des Gebietes dargestellt.

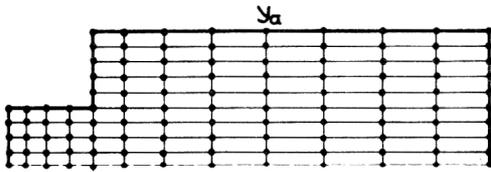


Bild 5

Für die gesuchte Funktion T werden nun Reihenansätze in der Form

$$u = \sum_{y \in \Omega_h \cup S_{oh} \cup S_{1h}} T_y \varphi_y \quad (13)$$

bzw.

$$w = \sum_{y \in \Omega_h \cup S_{oh} \cup S_{1h}} T_y \lambda_y \quad (14)$$

gemacht.

φ_y und λ_y sind spezielle Basisfunktionen des mehrbasigen Galerkindifferenzenverfahrens (vgl. dazu [5]) und wie folgt definiert,

$$\varphi_y(x) = \begin{cases} 1 - |w_1 + w_2|, & \text{falls } w_1 w_2 \geq 0 \text{ und } |w_1 + w_2| < 1, \\ 1 - |w_2|, & \text{falls } w_1 w_2 < 0 \text{ und } |w_1| < |w_2| < 1, \\ 1 - |w_1|, & \text{falls } w_1 w_2 < 0 \text{ und } |w_2| < |w_1| < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lambda_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \leq |w_j| < 1/2, j = 1, 2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für w_1 und w_2 gilt

$$w_1 = \begin{cases} (r-r_i)/\Delta r_{i+1} & \text{für } r > r_i \\ (r-r_i)/\Delta r_i & \text{für } r < r_i \end{cases}, \\ w_2 = \begin{cases} (z-z_j)/\Delta z_{j+1} & \text{für } z > z_j \\ (z-z_j)/\Delta z_j & \text{für } z < z_j \end{cases}$$

mit $x = (r, z) \in R^2$ und $y = (r_i, z_j) \in R_h^2$.

Die Bilder 6 und 7 zeigen die Träger $\text{supp } \varphi_y$ und $\text{supp } \lambda_y$ der Basiselemente φ_y und λ_y .

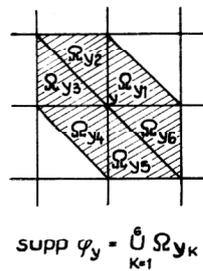


Bild 6

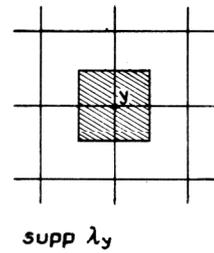


Bild 7

Mit den Reihenansätzen (13) und (14) sowie den Basiselementen φ_y und λ_y wird ausgehend von (12) das Galerkin-Differenzenverfahren

$$\int_{\Omega_M} \lambda \nabla u \nabla \varphi_y r dr dz + \int_{S_o} q \lambda_y r d\gamma_o \\ + \int_{S_1} \sigma_p w^p \lambda_y r d\gamma_1 = \int_{\Omega_M} f(w) \lambda_y r dr dz \quad (15)$$

für $y \in \Omega_h \cup S_{oh} \cup S_{1h}$. In [4] ist ausführlich auf die Auswertung der Gleichung (15) eingegangen worden. Hier soll die Gleichung (15) zur Demonstration für einen inneren Punkt $y \in \Omega_h$ und einen Randpunkt $y_R \in S_{1h}$ ausgewertet werden. Für den inneren Punkt $y \in \Omega_h$ folgt aufgrund der Eigenschaften der Basiselemente aus (15)

$$\int_{\text{supp } \varphi_y} \lambda \nabla u \nabla \varphi_y r dr dz = \int_{\text{supp } \lambda_y} f(w) \lambda_y r dr dz$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^6 \int_{\Omega_{y_k}} \lambda \nabla u \nabla \varphi_y r dr dz = \int_{\text{supp } \lambda_y} f(w) \lambda_y r dr dz$$

Die Auswertung der Integrale

$$\int_{\Omega_{y_k}} r dr dz, \quad \int_{\text{supp } \lambda_y} r dr dz$$

und die Eigenschaften der Basiselemente ergab schließlich für eine konstante Wärmeleitfähigkeit λ

$$\begin{aligned}
& -\lambda T_{y_z z} \hat{\left(\frac{1}{2} \frac{r_{i+1/3}}{r_i} \frac{\Delta r_{i+1}}{\Delta r m_i} + \frac{1}{2} \frac{r_{i-1/2}}{r_i} \frac{\Delta r_i}{\Delta r m_i} \right)} \\
& -\lambda \frac{1}{r_i} \left(\frac{1}{2} (T_{y_r} r_{i+1/3})_{\bar{r}} \frac{\Delta z_{j+1}}{\Delta z m_j} + \frac{1}{2} (T_{y_r} r_{i+2/3})_{\bar{r}} \frac{\Delta z_j}{\Delta z m_j} \right) = f(T_y)
\end{aligned} \tag{16}$$

als Differenzgleichung für den inneren Punkt y . Dabei wurden die Konventionen

$$T_{y_z} = \frac{T_{y+2} - T_y}{\Delta z_{j+1}}, \quad T_{y_{\bar{z}}} = \frac{T_y - T_{y-2}}{\Delta z_j}, \quad T_{y_z z} = \frac{T_{y_z} - T_{y_{\bar{z}}}}{\Delta z m_j}$$

$$\Delta z m_j = (\Delta z_j + \Delta z_{j+1})/2, \quad \Delta r m_i = (\Delta r_i + \Delta r_{i+1})/2, \quad r_{i+a} = r_i + a \Delta r_{i+1},$$

$$r_{i-b} = r_i - b \Delta r_i, \quad \bar{r}_i = r_i + (\Delta r_{i+1} - \Delta r_i)/4, \quad \bar{y}^{+2} = (r_i, z_{j+1}), \quad \bar{y}^{-2} = (r_i, z_j - 1)$$

verwendet. Die Differenzenableitungen in r -Richtung werden analog gebildet.

Für den Randpunkt y_R (vgl. Bild 6) ergibt sich aus der Gleichung (15)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_M \cap \text{supp } \varphi_{y_R}} \lambda \nabla u \cdot \nabla \varphi_{y_R} r \, dr dz + \int_{S_1 \cap \text{supp } \lambda_{y_R}} \sigma_\nu w^\nu \lambda_{y_R} r \, d\gamma_1 \\
& = \int_{\Omega_M \cap \text{supp } \lambda_{y_R}} f(w) \lambda_{y_R} r \, dr dz,
\end{aligned}$$

und die weitere Auswertung der Integrale ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
& -\lambda T_{y_{\bar{r}}} \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta z_{j+1}}{\Delta z m_j} \frac{r_{N-2/3}}{r_N} + \frac{1}{2} \frac{\Delta z_j}{\Delta z m_j} \frac{r_{N-1/3}}{r_N} \right) \\
& = \sigma_\nu T_y^\nu + \frac{\Delta r_N}{2} (f(T_y) \frac{r_{N-1/4}}{r_N} - \lambda T_{y_z z} \frac{r_{N-1/3}}{r_N}).
\end{aligned} \tag{17}$$

Es sei hier erwähnt, daß (16) und (17) Differenzenapproximationen zweiter bzw. erster Ordnung der Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = f(T)$$

und der Randbedingung

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \sigma_\nu T^\nu$$

sind. Die Auswertung der Gleichung (15), die in [4] für ein Richtungs-äquidistantes Netz für alle anderen typischen Randpunkte des diskreten Randes vorgenommen wurde, ist zwar nicht sehr kompliziert, aber insgesamt recht mühselig. Es hat sich als sinnvoll erwiesen, die Implementierung des Galerkinverfahrens so auf dem Rechner vorzunehmen, daß die Zusammenstellung der Differenzgleichungen für einzelne Netzpunkte durch die Bereitstellung von Baustein-Programmen von einem geeigneten Verfahrens-Generierungs-Programm vorgenommen wird. Die Integration der Gleichung (15) für alle $y \in \Omega_h \cup S_{oh} \cup S_{1h}$ ergibt schließlich ein algebraisches Gleichungssystem, das durch die Hinzunahme der

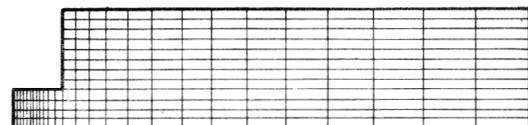
gegebenen Werte von $T_y = T_F$ für $y \in S_{2h}$ abgeschlossen wird. Zur Berechnung der T_y für $y \in \Omega_h \cup S_{oh} \cup S_{1h}$ wird ein Iterationsverfahren nach [6] für nichtlineare Differenzgleichungen verwendet. Bei dem Iterationsverfahren wird pro Schritt eine Gauß-Seidel-Iteration mit einer lokalen Newton-Korrektur ausgeführt.

3. Praktische Anwendung des numerischen Modells

Mit dem eben beschriebenen numerischen Modell wurden eine Reihe von Variantenrechnungen für spezielle Elektroden (Wolfram) durchgeführt. Zum einen wurden die geometrischen Parameter der Elektrode variiert und die Auswirkungen auf die Temperaturverhältnisse untersucht. Andererseits wurde der Einfluß der elektrischen Parameter auf die Ergebnisse untersucht. Darüber hinaus wurde die Relevanz einiger Komponenten des mathematischen Modells geprüft und es zeigte sich, daß z. B. die Joule'sche Wärme nur einen sehr geringen Einfluß auf den Temperaturverlauf hat. Der Vergleich der numerischen Ergebnisse mit einer analytischen Lösung für eine spezielle Aufgabe (vgl. dazu [1]) fiel positiv aus. Die Übereinstimmung der berechneten Temperaturfelder mit Messungen aus [2] war ebenfalls recht gut. Bei der Vorgabe steiler Gradienten (große Heizleistungen) an der Spitze der Elektrode wurde eine feine Diskretisierung in Normalen-Richtung notwendig, um die Randbedingung möglichst genau zu approximieren. Bei groben Diskretisierungen an dieser Stelle zeigte sich eine merkbare Abhängigkeit der Maximaltemperatur an der Spitze von der jeweils gewählten Diskretisierung. Für das beschriebene numerische Verfahren wurde ein FORTRAN-Programm entwickelt. Statt der Randbedingung (11) an der Elektroden-Grundfläche wurde auch mit einer Randbedingung der Form

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \beta (T - T_o) \tag{18}$$

gearbeitet. Dabei wurde der Koeffizient β durch Vorwärtsrechnungen anhand eines gemessenen Temperaturverlaufs identifiziert. T_o ist eine Umgebungstemperatur. Die Randbedingung (18) hat den Vorteil, daß keine Temperaturwerte auf Γ_2 vorgegeben werden müssen. Die Verwendung von (18) statt (11) bedeutet für die Gleichung (15) die Hinzunahme eines Randintegrals über S_2 , das die Bedingung (18) realisiert. In den folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse der Testrechnungen zur Lösung der Randwertaufgabe (8) bis (11) dargelegt.



25 × 13 Netzpunkte

Bild 8
Gewählte Diskretisierung

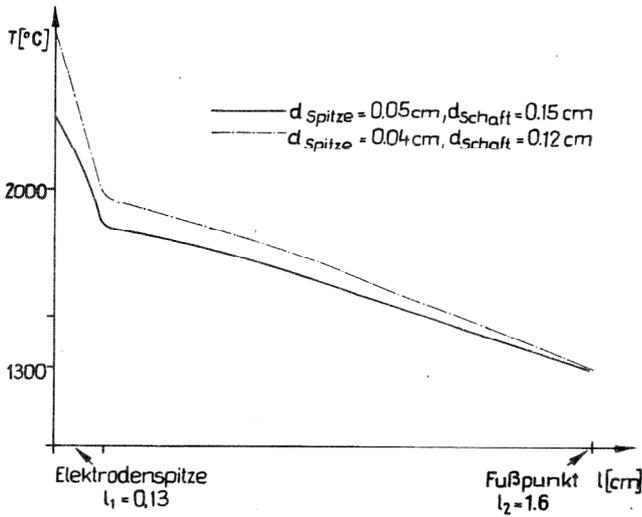


Bild 9
Randtemperaturverlauf für verschiedene Durchmesser

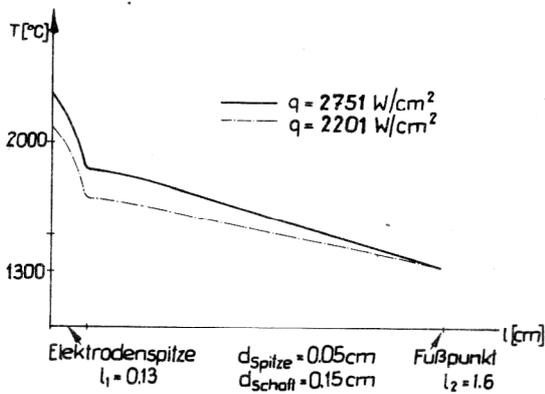


Bild 10
Randtemperaturverlauf für verschiedene Heizleistungen

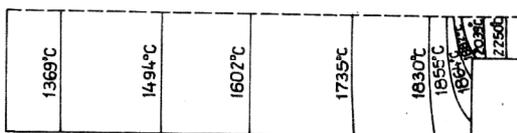


Bild 11
Isothermenfeld in einem radialsymmetrischen Schnitt

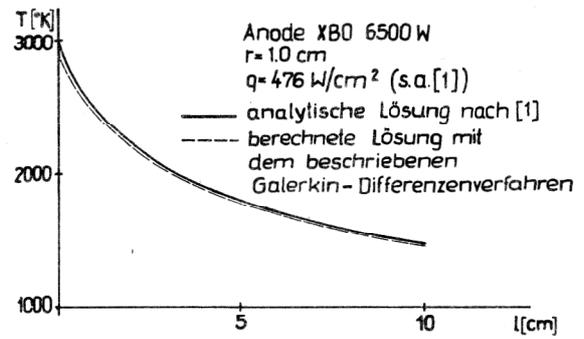


Bild 12
Vergleich der Randtemperaturkurve einer „dünnen“ Stabelektrode mit konstantem Durchmesser mit einer analytischen Lösung aus [1]

LITERATUR

- [1] Schlegel, H.: Zur Temperaturverteilung stabförmiger Bogenelektroden, Z. Physik (1972).
- [2] Neumann, U.: Diplom-Arbeit an der Sektion Physik der Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin 1981.
- [3] Bärwolff, G.: Bestimmung der Temperaturverteilung eines einseitig aufgeheizten Stabes unter Beachtung der Abstrahlung von der Oberfläche, Preprint des ZIMM der AdW der DDR, P-28/79, Berlin 1979.
- [4] Bärwolff, G.: Konstruktion eines Galerkin-Differenzenverfahrens zur Lösung einer rotationsymmetrischen nichtlinearen Wärmeleitungsaufgabe, Preprint des ZIMM der AdW der DDR, P-33/80, Berlin 1980.
- [5] Prochnow, D.: Dissertation B an der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt (1981).
- [6] Dey, S. K.: Perturbed iterative solution of nonlinear equations with applications to fluid dynamics, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 3, no 1, 1977.

Anschrift der Verfasser:

Dr. rer. nat. Günter Bärwolff
Institut für Mechanik der Akademie der
Wissenschaften der DDR
1199 Berlin, Rudower Chaussee,

Dipl.-Phys. Helmar Krahl
VEB Kombinat NARVA
Berliner Glühlampenwerk
1017 Berlin, Rudolfstraße