

Berechnung verbesserter Spannungswerte für dreidimensionale finite Elemente

Harald Berger, Johannes Altenbach

1. Einleitung

Bei Finite-Elemente-Modellen auf der Grundlage von Verschiebungsansätzen weisen die berechneten Spannungen infolge des notwendigen Differentiationsprozesses einen geringeren Genauigkeitsgrad auf als die Verschiebungen. Setzt man Konvergenz für die Verschiebungen und die Spannungen voraus, erfordert die Spannungsberechnung wegen der niedrigeren Konvergenzordnung eine wesentlich feinere Elemententeilung als die Verschiebungsberechnung, wenn für beide die gleiche Genauigkeit gefordert wird. Praktisch sind jedoch hierfür enge Grenzen gesetzt. Insbesondere bei 3D-Aufgaben ist bereits eine geringfügige Netzverfeinerung mit einer entscheidenden Aufwandserhöhung, sowohl hinsichtlich der Datenaufbereitung als auch der Rechenzeiten, verbunden. Man beschränkt sich daher für die Spannungsberechnung vielfach auf einige ausgewählte Bereiche und versucht durch Anwendung der Substrukturtechnik oder durch Ausführung von nachträglichen Ausschnittsrechnungen den Mehraufwand in Grenzen zu halten. Diese Vorgehensweise kann bei 3D-Aufgaben jedoch nur bedingt befriedigen.

Es wurden vielfältige Anstrengungen unternommen, mit Hilfe geeigneter Algorithmen Spannungswerte zu ermitteln, die etwa den gleichen Genauigkeitsgrad aufweisen wie die Knotenverschiebungen ([1] bis [5]). Theoretische und numerische Untersuchungen haben ergeben, daß es für bestimmte isoparametrische Elemente Punkte im Elementinnern gibt, in denen die Spannungswerte die gleiche Konvergenzordnung haben wie die Knotenverschiebungen [6].

Da jedoch in der Regel die Knotenpunkte die entscheidenden Kommunikationsstellen zwischen Anwender und FEM-Modell darstellen, ist die Bereitstellung der Spannungsergebnisse an diesen Stellen wünschenswert, zumal im allgemeinen die Randspannungen von besonderem Interesse sind.

Unter diesem Gesichtspunkt sind eine Reihe von Überlegungen angestellt worden, mit Hilfe geeigneter Verfahren aus Spannungswerten höherer Genauigkeit an inneren Elementpunkten Knotenspannungen ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust zu erzeugen. Hierbei lassen sich zwei Wege unterscheiden:

1. Die Spannungsverbesserung erfolgt „elementlokal“, d. h. für jedes Element separat (Spannungsextrapolation [1], [2], Integrale Spannungsmethode [3]).
2. Die Spannungsverbesserung wird „global“ durchgeführt, d. h. durch gleichzeitige Einbeziehung aller Elemente bzw. der Elemente eines Teilgebietes (Methode der konjugierten Spannungen [4], [5]).

Während bei der elementlokalen Spannungsverbesserung die Spannungssprünge an den Elementgrenzen erhalten bleiben und erst durch eine Mittelung eindeutige Knotenspannungen entstehen, liefert das globale Verfahren sofort stetige Spannungsfelder für das Gesamtgebiet.

Im vorliegenden Beitrag werden die aus der Literatur bekannten Verfahren ([1] bis [5]), die auf sehr unterschiedliche Elementtypen und vorwiegend auf zweidimensionale Probleme angewendet wurden, auf die im Programmsystem COSAR/E80 ([7], [8]) eingesetzten dreidimensionalen Verschiebungselemente mit quadratischen Ansätzen übertragen. Es werden die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Verfahren dargestellt und es wird eine Bewertung hinsichtlich der Brauchbarkeit der einzelnen Algorithmen vorgenommen [9].

2. Algorithmen zur Berechnung von Spannungswerten erhöhter Genauigkeit

Den Ausgangspunkt der Überlegungen bilden die in bekannter Weise ermittelten Spannungen. Für die im Programmsystem COSAR/E80 verwendeten 3D-Elemente (Bild 1) lassen sich die Spannungen aus den berechneten Knotenverschiebungen elementweise in jedem beliebigen Elementpunkt $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ entsprechend der Beziehung

$$\underline{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{E}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) [\mathbf{D}_G(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mathbf{v} - \underline{\bar{\epsilon}}_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] \quad (1)$$

bestimmen. Darin bedeuten

- $\underline{\sigma}$ – Spannungsvektor
- \mathbf{E} – Hookesche Matrix
- \mathbf{D}_G – Differentialoperator, angewendet auf die Matrix der Ansatzfunktionen G
- \mathbf{v} – Elementknotenverschiebungsvektor
- $\underline{\bar{\epsilon}}_0$ – Vektor der Anfangsverzerrungen.

Die nach (1) gewonnenen Werte werden im folgenden als konventionell berechnete Spannungen bezeichnet. Alle hier dargestellten Verfahren greifen in irgendeiner Weise auf diese Spannungen zurück.

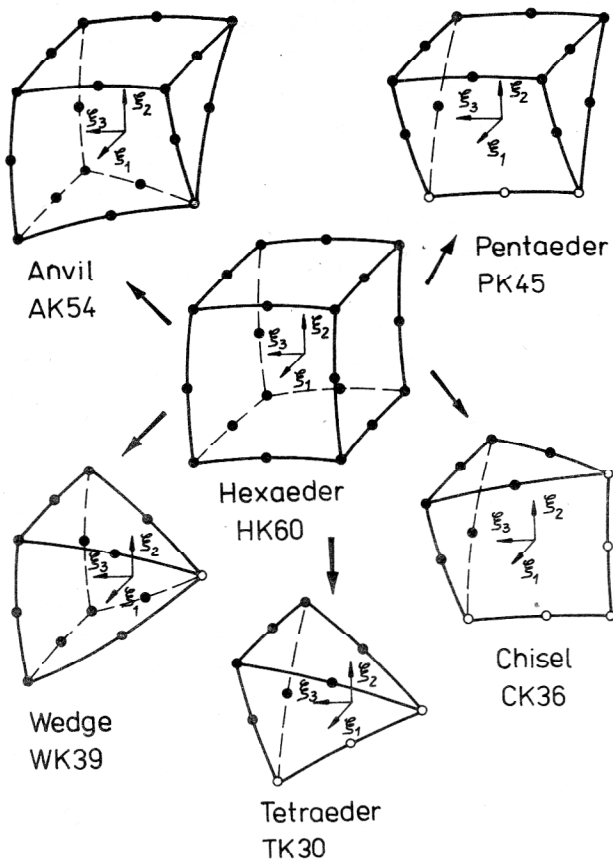


Bild 1
Vollkörperelemente des Programmsystems COSAR/E80
o degenerierte Knoten

2.1. Spannungsextrapolation

Die einfachste Möglichkeit, verbesserte Knotenspannungen zu erhalten, besteht in der Extrapolation der Spannungen erhöhter Genauigkeit in ausgewählten inneren Elementpunkten auf den Elementrand. Nach [6] eignen sich als Stützstellen für das Extrapolationsschema bei den hier betrachteten 3D-Elementen am besten die Gauß-Integrationspunkte. Für eine zu extrapolierende Spannungskomponente $\tilde{\sigma}_{ij}$ wird ein Polynomansatz der Form

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \mathbf{a} \quad (2)$$

gewählt. $\tilde{\sigma}_{ij}$ bedeutet die verbesserte Spannungsverteilung, \mathbf{p} enthält die N_s Glieder des verwendeten Polynoms (N_s -Anzahl der Stützstellen) und \mathbf{a} beinhaltet die N_s freien Parameter. Durch Einsetzen der Stützstellenkoordinaten sowie der konventionell berechneten Stützstellenspannungen in (2) ergibt sich ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Freiwerte in \mathbf{a}

$$\mathbf{P}_s \mathbf{a} = \underline{\sigma}_{ijs} \quad (3)$$

Damit läßt sich für jeden beliebigen Elementpunkt eine verbesserte Spannung über

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathbf{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \mathbf{P}_s^{-1} \cdot \underline{\sigma}_{ijs} \quad (4)$$

berechnen.

Da als Stützstellen sinnvoll nur die Gauß-Integrationspunkte in Frage kommen, liegt in jedem Fall ein regelmäßiges Stützstellenraster vor. Führt man nun ein neues lokales Koordinatensystem $\bar{\xi}_1$ so ein, daß die $\bar{\xi}_i$ an den Eckpunkten des Stützstellenrasters die Werte -1 oder $+1$ annehmen (vgl. Bild 3), dann ist der Ausdruck $\mathbf{p} \mathbf{P}^{-1}$ identisch mit einer Matrix von Ansatzfunktionen $\bar{\mathbf{G}}(\bar{\xi}_i)$, die sich aus Lagrangeschen Interpolationspolynomen entsprechender Ordnung ergeben. Somit läßt sich (4) durch

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) = \bar{\mathbf{G}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) \cdot \underline{\sigma}_{ijG} \quad (5)$$

ersetzen. $\underline{\sigma}_{ijG}$ enthält die konventionell berechneten Werte der betrachteten Spannungskomponente in den Gauß-Punkten G .

Bei Zugrundelegung unterschiedlicher Gauß-Integrationspunkte ergeben sich verschiedene Extrapolationsschemen, wobei für die betrachteten Elemente nur die $2 \times 2 \times 2$ - und die $3 \times 3 \times 3$ -Gauß-Punkte Bedeutung haben.

Lineare Extrapolation (Bild 2)

Es werden 8 Stützstellen ($2 \times 2 \times 2$ -Gauß-Punkte) verwendet (Bild 3). Der Ansatz ergibt sich dann aus einem vollständigen trilinearen Polynom, das auf die bekannten Ansatzfunktionen

$$\bar{G}_G = \frac{1}{8} (1 + \bar{\xi}_{1G} \bar{\xi}_1) (1 + \bar{\xi}_{2G} \bar{\xi}_2) (1 + \bar{\xi}_{3G} \bar{\xi}_3) \quad (6)$$

$$G = 1, 2, \dots, 8$$

($\bar{\xi}_{iG}$ – Koordinaten an den Gauß-Punkten G) führt.

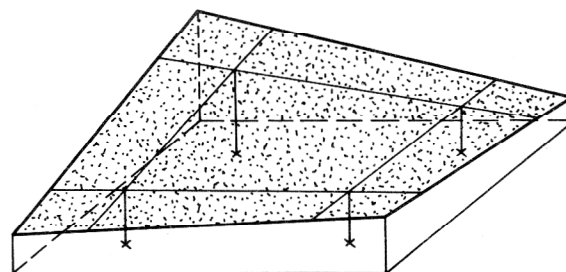


Bild 2
Lineares Extrapolationsschema
x Gauß-Integrationspunkte

Um mit Hilfe von (5) die Spannungen in den Knotenpunkten zu berechnen, müssen für jeden Knoten die $\bar{\xi}_i$ ermittelt werden. Dabei ist es vorteilhaft, die $\bar{\xi}_i$ durch die ξ_i zu ersetzen. Entsprechend Bild 3 ergibt sich folgende Transformation

$$\bar{\xi}_i = \frac{1}{a_G} \xi_i \quad (7)$$

Für a_G ist der aus der 2-Punkte-Gauß-Formel herrührende Stützstellenwert $\frac{1}{\sqrt{3}}$ einzusetzen. Damit lassen sich

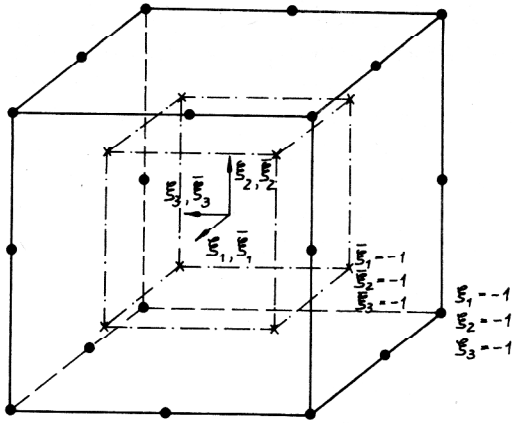


Bild 3
Hexaederelement mit 2x2x2-Gauß-Punkten und Koordinatensystemen für die lineare Extrapolation

die verbesserten Knotenspannungen unter Verwendung der bekannten lokalen Knotenkoordinaten ξ_{iL} (L-Knotenindex) mit Hilfe von (5) berechnen.

Quadratische Extrapolation (Bild 4)

Es werden 27 Stützstellen (3x3x3-Gauß-Punkte) verwendet. Als Ansatz dient ein vollständiges triquadratisches Polynom. Die Ansatzfunktionen ergeben sich durch multiplikative Verknüpfung Lagrangescher Interpolationspolynome 2. Grades

$$\bar{G}_{jkl} = L_j(\bar{\xi}_1) \cdot L_k(\bar{\xi}_2) \cdot L_l(\bar{\xi}_3) \quad (8)$$

mit

$$L_1(\bar{\xi}_i) = -\frac{1}{2} \bar{\xi}_i(1-\bar{\xi}_i); \quad L_2(\bar{\xi}_i) = 1-\bar{\xi}_i^2; \quad L_3(\bar{\xi}_i) = \frac{1}{2} \bar{\xi}_i(1+\bar{\xi}_i).$$

Ein Gauß-Punkt wird dabei durch das Tripel jkl beschrieben (j, k, l = 1, . . . , 3).

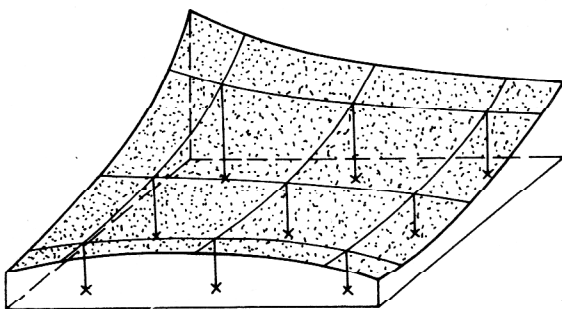


Bild 4
Quadratisches Extrapolationsschema
x Gauß-Integrationspunkte

Zur Berechnung der Knotenspannungen ist es auch hier sinnvoll, die Transformation (7) anzuwenden, wobei jetzt für a_G der aus der 3-Punkte-Gauß-Formel herührende Stützstellenwert $\sqrt{\frac{3}{5}}$ einzusetzen ist.

Multilineare Extrapolation (Bild 5)

Dieses Verfahren erfordert für jeden Oktanten eine lineare Extrapolation, wobei letztendlich die 3x3x3-Gauß-Punkte als Stützstellen zugrunde gelegt werden (Bild 6).

Es kommen dabei die in (6) definierten Interpolationspolynome zur Anwendung. Für jeden Oktanten wird ein gesondertes Koordinatensystem $\bar{\xi}_i^{(J)}$ (J = I, II, . . . , VIII) definiert (vgl. Bild 6b).

Wählt man die Koordinatensysteme so, daß die Achsen für alle Oktanten die gleiche Orientierung aufweisen wie die Achsen des Koordinatensystems ξ_i , dann ergeben sich folgende Transformationsbeziehungen

$$\bar{\xi}_i^{(J)} = \frac{2}{a_G} \xi_i - \xi_{iL} \quad (9)$$

ξ_{iL} sind die Koordinaten desjenigen Elementeckknotens, der zu dem entsprechenden Oktanten J gehört. a_G enthält entsprechend der 3-Punkte-Gauß-Formel den

$$\text{Wert } \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

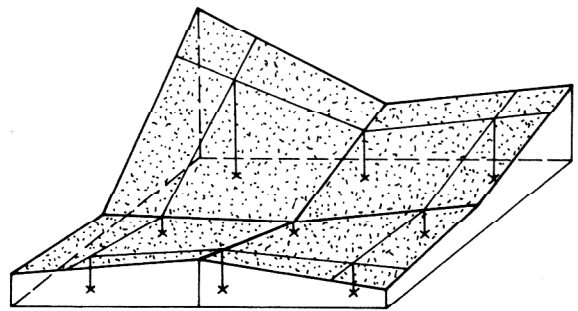


Bild 5
Multilineares Extrapolationsschema
x Gauß-Integrationspunkte

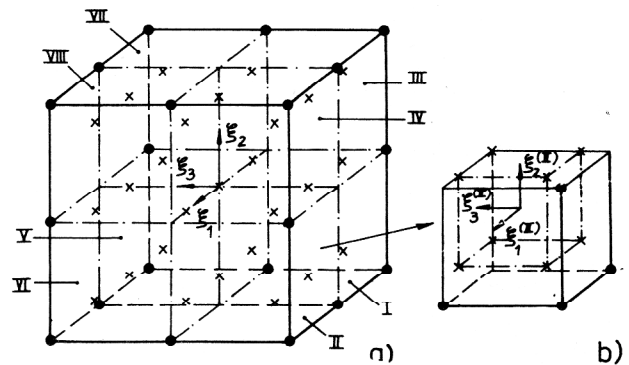


Bild 6
Hexaederelement mit 3x3x3-Gauß-Punkten und Koordinatensystemen für die multilineare Extrapolation

Die gewählte Extrapolationsvorschrift gewährleistet, daß an gemeinsamen Kanten, die zu mehreren Oktanten gehören, eindeutige Spannungswerte entstehen (vgl. Bild 5).

Da für alle Vollkörperelemente des Elementkataloges von COSAR/E80 (vgl. Bild 1) die gleichen Integrationsformeln verwendet werden, lassen sich die oben angegebenen Extrapolationsalgorithmen formal auch auf die degenerierten Elemente [8] anwenden. Die Extrapolationsformeln liefern jedoch an Stellen, wo sich die Parameterlinien der lokalen Koordinaten schneiden, d. h. in den durch Degeneration entstandenen Knotenpunkten, keine eindeutigen Funktionswerte mehr. Bild 7 zeigt diesen Sachverhalt aus Gründen der Anschaulichkeit am Beispiel eines ebenen degenerierten Elementes. Um auch in den degenerierten Knoten zu eindeutigen Spannungswerten zu gelangen, ist es sinnvoll, für die an diesen Knoten nicht eindeutig definierten Koordinaten den Wert Null einzusetzen. Im Fall der linearen Extrapolation erhält man dann gerade den Mittelwert aus den Spannungen σ_1 und σ_3 , die sich durch Einsetzen von -1 und $+1$ ergeben würden (vgl. Bild 7).

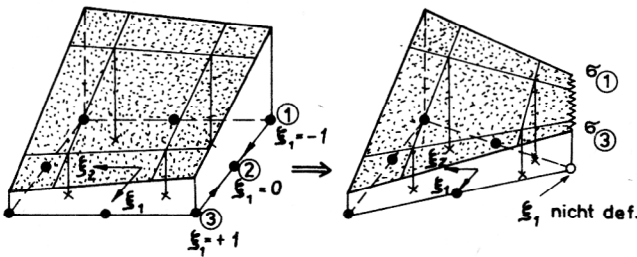


Bild 7
Spannungsextrapolation auf einen degenerierten Knoten am Beispiel eines ebenen Elementes

Für die quadratische und multilineare Extrapolation ergibt sich nicht dieser Mittelwert. Numerische Untersuchungen haben jedoch gezeigt, daß die Spannungswerte σ_1 , σ_2 und σ_3 , die man durch Einsetzen von -1 , 0 bzw. $+1$ erhält, bei diesen Extrapolationsschemen ohnehin nur wenig voneinander differieren. Es ist deshalb für praktische Belange auch hier sinnvoll, für die an den degenerierten Knoten nicht eindeutig definierten Koordinaten den Wert Null einzusetzen, um zu repräsentativen Spannungswerten zu gelangen.

Unter Beachtung dieser Überlegungen sind die drei Extrapolationsschemen eindeutig auf alle 3D-Elemente des Programmsystems COSAR/E80 anwendbar.

2.2. Integrale Spannungsmethode

Der Grundgedanke dieses Verfahrens besteht darin, eine geglättete verbesserte Elementspannungsverteilung $\tilde{\sigma}$ zu erzeugen, die der lokalen, konventionell ermittelten Spannungsverteilung $\underline{\sigma}$ im Element im Integralsinn äquivalent ist. Im Sinne der Galerkinschen Methode läßt sich die lokale Spannungsverteilung $\underline{\sigma}$ so durch eine verbesserte Spannungsverteilung ersetzen, daß die Spannungsfehlerfunktion $(\tilde{\sigma} - \underline{\sigma})$ durch eine Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{(v)} G^T (\tilde{\sigma} - \underline{\sigma}) dV = 0 \quad (10)$$

minimiert wird.

Approximiert man das verbesserte Spannungsfeld $\tilde{\sigma}$ im Element durch

$$\tilde{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = G(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \tilde{\tau} \quad (11)$$

mit $\tilde{\tau}$ als verbesserter Elementknotenspannungsvektor, dann erhält man durch Einsetzen in (10)

$$\int_{(v)} G^T (G\tilde{\tau} - \underline{\sigma}) = 0 \quad (12)$$

und nach Umformen

$$\int_{(v)} G^T G dV \cdot \tilde{\tau} = \int_{(v)} G^T \underline{\sigma} dV. \quad (13)$$

Der gesuchte Knotenspannungsvektor ergibt sich somit als Lösung eines linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$C = \int_{(v)} G^T G dV. \quad (14)$$

Primär entsteht ein Gleichungssystem mit $6N$ Gleichungen (N -Anzahl der Elementknotenpunkte). Da jedoch zwischen den zu einem Knoten gehörenden Gleichungen keine Kopplung besteht, läßt sich (13) in ein Gleichungssystem mit N Gleichungen und 6 rechten Seiten umformen. Dabei entspricht jede rechte Seite einer Spannungskomponente.

Es läßt sich zeigen, daß die über (13) gewonnenen Elementknotenspannungen auch einer verbesserten Spannungsverteilung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate entsprechen.

Dazu ist das Funktional

$$\chi = \int_{(v)} (\tilde{\sigma} - \underline{\sigma})^2 dV \quad (15)$$

zu minimieren. Unter Verwendung des Ansatzes (11) ergibt sich

$$\chi = \int_{(v)} (G\tilde{\tau} - \underline{\sigma})^2 dV \quad (16)$$

und durch Differentiation nach den Freiwerten in $\tilde{\tau}$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\tau}} = 0 \quad (17)$$

erhält man

$$\int_{(v)} G^T G dV \tilde{\tau} - \int_{(v)} G^T \underline{\sigma} dV = 0 \quad (18)$$

was mit (13) identisch ist.

Bei der Anwendung der integralen Spannungsmethode entsteht die Frage nach der Wahl geeigneter Ansatzfunktionen in G . Für die im Programmsystem COSAR/E80 verwendeten quadratischen Verschiebungselemente bieten sich als Ansatzfunktionen lineare oder quadratische Lagrangesche Interpolationspolynome an. Als quadratische Ansätze kommen dabei sinnvoll die gleichen Ansatzfunktionen wie für die Verschiebungsapproximation in Betracht (Serendipity-Typ).

Bedingt durch die Geometrie der Elemente muß die Integration über das Elementvolumen numerisch ausgeführt werden. Dazu lassen sich vorteilhaft die Gaußschen Quadraturformeln verwenden, die auch zur Integration der Elementsteifigkeitsmatrix benutzt werden. Bei quadratischen Ansätzen sind zur Gewährleistung der positiven Definitheit von C $3 \times 3 \times 3$ Integrationspunkte und bei linearen Ansätzen mindestens $2 \times 2 \times 2$ Integrationspunkte erforderlich.

Die Integrale werden damit in Summen überführt, so daß zur Berechnung der rechten Seite in (13) letztendlich die konkreten konventionell berechneten Spannungswerte in den entsprechenden Gauß-Punkten benötigt werden.

Bezüglich der Anwendung dieses Verfahrens auf degenerierte Elemente ergeben sich keine Probleme, da die auf diese Elemente zugeschnittenen Ansatzfunktionen verwendet werden und somit von vornherein eindeutige Spannungswerte in den degenerierten Knoten entstehen.

Methode der konjugierten Spannungen

Die Berechnung konjugierter Spannungen basiert auf der Verwendung konjugierter Approximationsfunktionen zur Erzeugung kontinuierlicher Spannungsfelder, d. h. eindeutiger Knotenspannungen. Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Ansatzfunktionen, die im allgemeinen nur für ein Element definiert sind, besitzen die konjugierten Funktionen globalen Charakter, d. h. sie sind über das gesamte Gebiet oder über ein betrachtetes Teilgebiet definiert. Die Matrix der konjugierten Ansatzfunktionen G^* läßt sich aus der Matrix der gewöhnlichen Ansatzfunktionen G über die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{(\Omega)} G^T G^* d\Omega = I \quad (19)$$

(Ω – betrachtetes Gebiet) gewinnen [5]. Für G^* ergibt sich damit

$$G^* = G \left[\int_{(\Omega)} G^T G d\Omega \right]^{-1} = G \cdot C^{-1} \quad (20)$$

Bei der Anwendung des Verfahrens geht man davon aus, daß sich eine gegebene Spannungsverteilung in einem Element, z. B. die auf konventionelle Weise ermittelte, sowohl im Originalraum als auch im konjugierten Raum darstellen läßt

$$\underline{\sigma} = G \underline{\tau} \quad (21)$$

bzw.

$$\underline{\sigma} = G^* \underline{\tau}^* \quad (22)$$

Unter Verwendung von (19) kann aus (22) der Knotenvektor $\underline{\tau}^*$ ermittelt werden

$$\underline{\tau}^* = \int_{(v)} G^T \underline{\sigma} dV \quad (23)$$

Gleichsetzen von (21) und (22) liefert unter Berücksichtigung von (20) schließlich die Elementbeziehung

$$\underline{\tau} = \left[\int_{(v)} G^T G dV \right]^{-1} \cdot \int_{(v)} G^T \underline{\sigma} dV \quad (24)$$

bzw.

$$C \cdot \underline{\tau} = \underline{\tau}^* \quad (25)$$

Aus den Elementbeziehungen läßt sich unter Beachtung der Elementverknüpfungen analog zum Steifigkeitsverfahren ein Gleichungssystem für das Gesamtgebiet oder ein betrachtetes Teilgebiet aufbauen,

$$C_s \cdot \underline{\tau}_s = \underline{\tau}_s^* \quad (26)$$

dessen Lösung eindeutige Knotenspannungswerte $\underline{\tau}_s$ und somit ein kontinuierliches Spannungsfeld liefert. Verwendet man in (24) die gleichen Ansatzfunktionen wie für die Verschiebungsapproximation, dann spricht man von einem verschiebungskonsistenten Spannungsfeld.

Die Beziehung (26) führt primär auf ein System mit $6 \cdot N_k$ Gleichungen (N_k – Anzahl der Knoten des betrachteten Gebietes). Da jedoch zwischen den zu einem Knoten gehörenden Gleichungen keine Kopplung besteht, läßt sich (26) umformen in ein System mit N_k Gleichungen und 6 rechten Seiten. Im Unterschied zur Verschiebungsberechnung ergibt sich hierbei eine wesentlich geringere halbe Bandweite von

$$ibw = d_{max} + 1$$

(d_{max} – größte auftretende Knotendifferenz innerhalb eines Elementes).

2.4. Vergleichende Betrachtungen

Eine genauere Analyse zeigt, daß zwischen den vorgestellten Verfahren enge Zusammenhänge bestehen, die wesentliche Konsequenzen für die sinnvolle Implementierung in ein Programm haben.

Der Vergleich von (13) und (24) zeigt deutlich, daß die im Rahmen der integralen Spannungsmethode abgeleitete Formel gerade die Elementbeziehung für die Berechnung konjugierter Spannungen darstellt. Insofern ist die Methode der konjugierten Spannungen eine Art gewichtete Glättung der über die integrale Methode bzw. die Methode der kleinsten Quadrate gewonnenen diskontinuierlichen Spannungsverteilung.

Eine weitere Untersuchung zeigt, daß wiederum zwischen der integralen Methode und der Spannungsextrapolation ein enger Zusammenhang besteht. Durch die numerische Integration werden zur Berechnung der rechten Seite in (13) die konventionell berechneten Spannungswerte in den Gauß-Punkten benötigt, die auch die Grundlage für die Extrapolation bilden. Es läßt sich nachweisen, daß bei Verwendung gleicher Ansatzfunktionen in \bar{G} (Gl. (5)) und G (Gl. (11)) und gleicher Stützstellen beide Verfahren identische Ergebnisse liefern. Für HK60-Elemente liefern lineare Ansätze damit in jedem Fall die gleichen Knotenspannungswerte. Bei quadratischen Ansätzen ergeben sich geringfügige Unterschiede, da einmal der Lagrangesche Typ (Extrapolation) und einmal der Serendipity-Typ (integrale Methode) zur Anwendung kommt. Ebenfalls unterschiedliche Ergebnisse ergeben sich bei degenerier-

ten Elementen, da in (11) die für diese Elemente abgeleiteten Ansatzfunktionen benutzt werden.

Ein weiterer wesentlicher Aspekt ergibt sich bei der quadratischen Extrapolation. Diese liefert für unverzerrte HK60-Elemente (konstante Jacobische Determinante) die gleichen Knotenspannungen wie die nach der konventionellen Methode ermittelten. Die Ursache liegt darin, daß sich infolge der verwendeten Verschiebungsansätze, die neben den quadratischen auch noch Glieder höherer Ordnung enthalten, Spannungsverläufe ergeben, die einem Polynom 2. Grades entsprechen. Eine genaue Analyse zeigt, daß die Glieder dieses Polynoms gerade eine Untermenge der Glieder des zur Extrapolation verwendeten Polynoms darstellen, d. h. die quadratische Extrapolation spiegelt denselben Spannungsverlauf wider wie er auf konventionelle Weise gewonnen wird. Abweichungen ergeben sich dagegen bei verzerrten HK60-Elementen und degenerierten Elementen.

Aus diesen Betrachtungen ist zu erkennen, daß die integrale Spannungsmethode kaum Vorteile gegenüber der weniger aufwendigen Spannungsextrapolation bringt. Außerdem wird deutlich, daß sich bei einer Spannungsmanipulation mit quadratischen Ansätzen bei den verwendeten Elementen keine wesentliche Ergebnisverbesserung erzielen läßt. Offen bleibt zunächst die Frage, ob die Ergebnisse, die sich aus der Berechnung konjugierter Spannungen ergeben, den hohen Aufwand, der insbesondere bei 3D-Problemen zum Tragen kommt, rechtfertigen.

Alle vorgestellten Verfahren wurden unter Berücksichtigung ihrer Modifikationen in das Programmsystem COSAR/E80 implementiert und an einer Reihe von Berechnungsbeispielen hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit überprüft. Im folgenden Abschnitt sind an zwei ausgewählten Beispielen Ergebnisse dargestellt.

3. Numerische Tests

Aus Gründen der Genauigkeitseinschätzung der Ergebnisse wurden vorwiegend solche Beispiele gewählt, für die analytische Lösungen zur Verfügung stehen.

Untersucht wurde eine Kreisringscheibe mit Innen- und Außendruck, von der aus Symmetriegründen nur ein Sektor mit 4 HK60-Elementen vernetzt wurde (Bild 8).

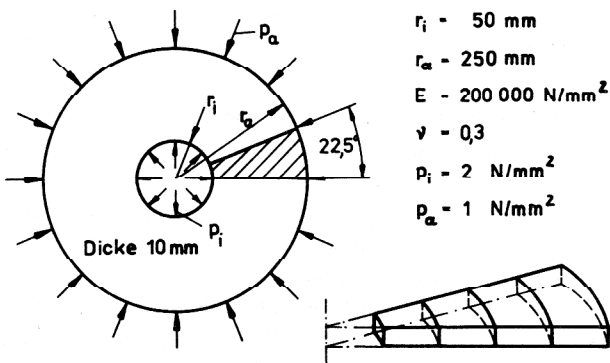


Bild 8
Kreisringscheibe unter Innen- und Außendruck mit Vernetzung eines Sektors

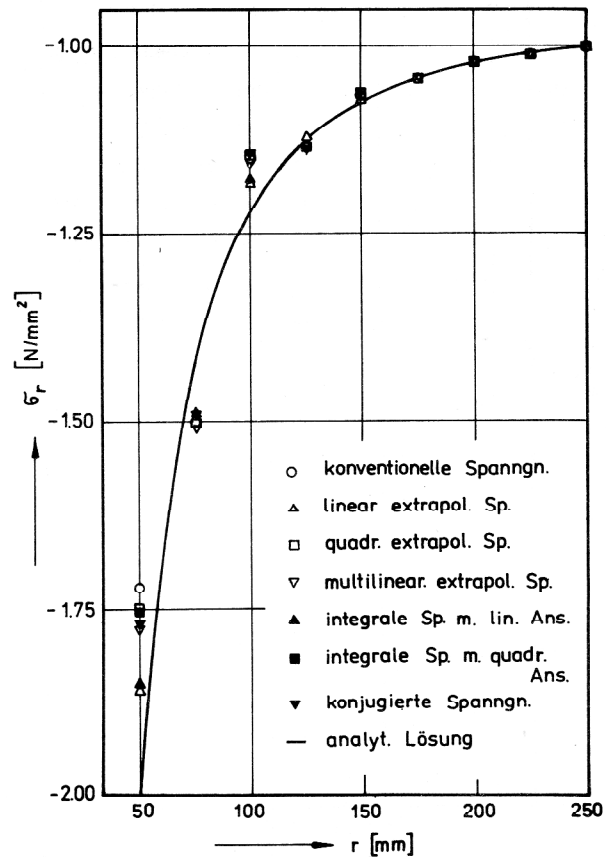


Bild 9
Radialspannungen in der Kreisringscheibe für verschiedene Varianten der Spannungsverbesserung

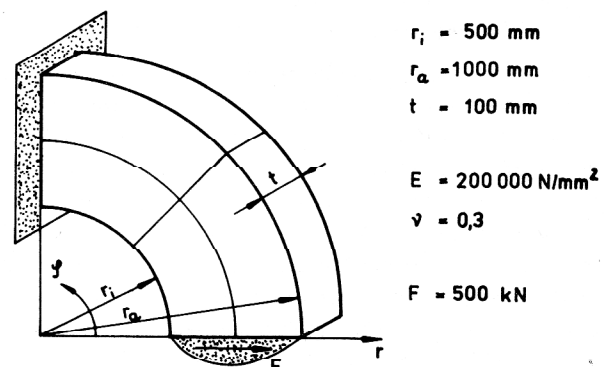


Bild 10
Eingespannter Kreisbogenträger unter Querkraftbelastung mit Elementnetz

Des Weiteren wurde ein Kreisbogenträger mit Querkraftbelastung berechnet (Bild 10). Die Einteilung erfolgte ebenfalls in 4 HK60-Elemente. In den Bildern 9 und 11 sind die mit Hilfe der unterschiedlichen Algorithmen ermittelten Ergebnisse jeweils für die entscheidende Spannungskomponente dargestellt. Für Knotenpunkte, an denen mehrere Elemente zusammentreffen, wurden die gemittelten Spannungen angegeben. Zu beachten ist, daß für die Berechnung integraler Spannungen mit linearen Ansätzen die numerische Integration auf der Grundlage der $3 \times 3 \times 3$ -Gauß-Punkte ausgeführt wurde. Die Ermittlung konjugierter Spannungen er-

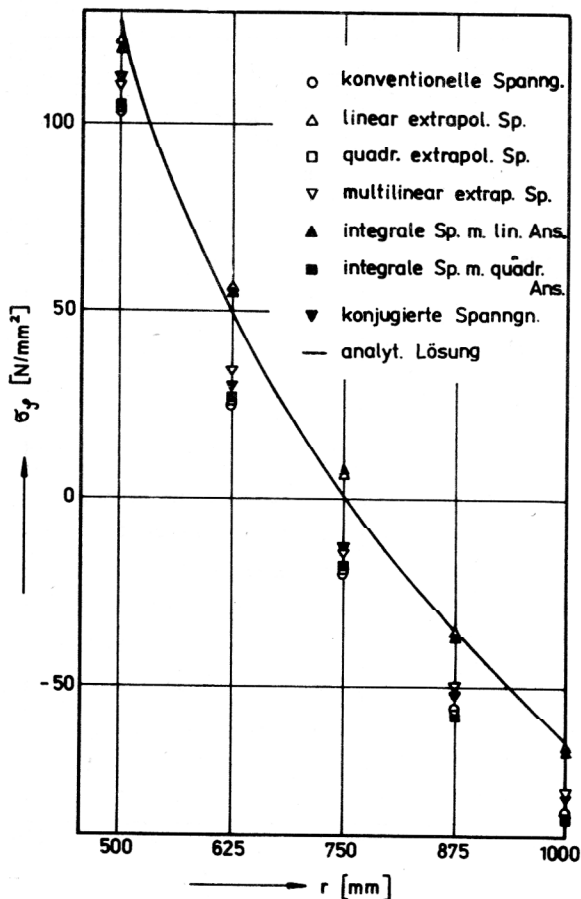


Bild 11
Biegespannungen am Einspannquerschnitt des Kreisbogenträgers für verschiedene Varianten der Spannungsverbesserung

folgte auf der Basis der gleichen Ansätze wie sie für die Verschiebungsapproximation verwendet werden.

Bei der Kreisringscheibe liefert die konventionelle Spannungsberechnung vor allem im Bereich des Innenradius infolge des großen Spannungsgradienten unbefriedigende Ergebnisse. Der Fehler für die Radialspannung beträgt am Innenrand bezogen auf den analytischen Wert an dieser Stelle 13,9 %. Dagegen kann mit dem gewählten Netz der Verschiebungszustand ausreichend genau erfaßt werden (maximaler Fehler in den Radialverschiebungen: 1,01 %). Die größte Genauigkeitssteigerung wird durch Anwendung der linearen Extrapolation erreicht, wodurch sich der Fehler auf 7,2 % reduziert. Entsprechend den Ergebnissen aus den theoretischen Untersuchungen liefern die quadratischen Extrapolation sowie die integrale Methode mit quadratischen Ansätzen keine entscheidende Verbesserung. Außerdem ist zu erkennen, daß die integrale Methode mit linearen Ansätzen auch bei Anwendung der 3x3x3-Punkte-Integration etwa die gleichen Werte wie die lineare Spannungsextrapolation liefert. Die Ergebnisse der multilinen Extrapolation liegen zwischen denen, die durch lineare und quadratische Ansätze erzielt wurden. Von besonderer Bedeutung ist die Tatsache, daß trotz des höheren Aufwandes die Methode der konjugierten Spannungen nicht notwendig die besten Knotenwerte liefern muß. Am Beispiel der Kreisringscheibe wird weiterhin deutlich, daß eine Spannungsverbesserung vor allem in Bereichen mit großen Spannungsgradienten sinnvoll ist.

Für $r > 150$ mm liefern bereits alle Verfahren etwa die gleichen Werte wie die konventionelle Spannungsberechnung.

Beim Kreisbogenträger wird der maximale Fehler in den Ringspannungen am Finspannquerschnitt durch Anwendung der linearen Extrapolation von 19,5 % auf 5,2 % gesenkt. Bei einer Netzverfeinerung mit 4 Elementen in φ -Richtung ergibt sich nach der konventionellen Methode ein Fehler von 3,7 %. Durch die nachgeschaltete Spannungsverbesserung wird somit ein ähnlicher Effekt erzielt wie durch eine feine Diskretisierung, die jedoch mit einem wesentlich höheren Aufwand verbunden ist. Bezüglich der anderen Verfahren lassen sich aus Bild 11 analoge Aussagen ableiten wie für die Kreisringscheibe.

4. Zusammenfassung

Wie die Ausführungen im vorliegenden Beitrag zeigen, stehen für Verschiebungselemente eine Reihe von Möglichkeiten zur Verfügung, aus dem konventionell berechneten Spannungsfeld mit Hilfe eines nachgeschalteten Prozessors verbesserte Knotenspannungen zu erzeugen. Deutlich wird aber gleichzeitig, daß zwischen den einzelnen Verfahren enge Zusammenhänge bestehen, so daß die Palette der sinnvoll einzusetzenden Algorithmen doch sehr beschränkt ist. Aus zahlreichen numerischen Untersuchungen hat sich ergeben, daß für die in COSAR/E80 verwendeten Elemente mit quadratischen Verschiebungsansätzen die lineare Extrapolation auf der Grundlage der in den 2x2x2-Gauß-Punkten berechneten konventionellen Spannungen das geeignetste Verfahren für eine Spannungsverbesserung darstellt [9]. Diese Tatsache ist insofern von besonderer Bedeutung, da gerade diese Variante mit dem geringsten Rechenaufwand verbunden ist.

Vielfach würde es ausreichen, die Spannungsverbesserung auf kritische Beanspruchungsbereiche zu beschränken. Es bereitet jedoch im allgemeinen Schwierigkeiten, derartige Bereiche entweder von vornherein zu bestimmen oder aber geeignete Kriterien zu finden, die eine automatische Lokalisierung ermöglichen.

Der geringe Rechenaufwand bei der linearen Extrapolation erlaubt diese Schwierigkeiten zu umgehen, indem die Spannungsverbesserung auf alle Elemente des Gesamtgebietes angewendet wird.

Betont sei noch, daß sich für die anderen untersuchten Verfahren bei allen durchgeführten Testrechnungen ähnliche Tendenzen wie bei den angegebenen Berechnungsbeispielen zeigten [9].

Die in diesem Beitrag zusammengestellten Algorithmen basieren auf dem konventionell berechneten Spannungsfeld, beseitigen also nicht prinzipiell den Genauigkeitsverlust infolge des Differentiationsprozesses. Es gibt jedoch auch Überlegungen, die Spannungen über das Prinzip der virtuellen Arbeiten direkt aus den Knotenkräften ohne Differentiation zu berechnen.

Diese in [10] vorgeschlagene Vorgehensweise wurde im Rahmen des Programmsystems COSAR/E80 noch nicht näher untersucht, so daß keine eigenen Erfahrungen mitgeteilt werden können.

LITERATUR

- [1] Hinton, E., Scott, F.C., Ricketts, R.E.: Local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 9 (1975) 235 – 238.
- [2] Argyris, J.H., Faust, G., Roy, J.R., Szimmat, J., Warnke, E.P., Willam, K.J.: Finite Elemente zur Berechnung von Spannbeton – Reaktordruckbehältern. Dt. Ausschuß für Stahlbeton, Heft 234 (1973), 1 – 69.
- [3] Argyris, J.H., Willam, K.J.: Some considerations for the evaluation of finite element models. Nucl. Engng. Design 28 (1974), 76 – 96.
- [4] Oden, J.T., Brauchli, H.J.: On the calculation of consistent stress distribution in finite element approximations. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 3 (1971), 317 – 325.
- [5] Oden, J.T., Reddy, J.N.: Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 6 (1973), 55 – 61.
- [6] Berger, H., Altenbach, J.: Optimale Punkte für die Spannungsberechnung bei finiten 3D-Verschiebungselementen. Techn. Mech. 4 (1983) Heft 3.
- [7] Autorenkollektiv: Finite Elemente in der Festkörpermechanik. Leipzig, VEB Fachbuchverlag 1982.
- [8] Berger, H., Gabbert, U., Altenbach, J.: Besonderheiten der Spannungsberechnung bei degenerierten dreidimensionalen finiten Verschiebungselementen. Techn. Mech. 4 (1983) Heft 2.
- [9] Berger, H.: Beitrag zur Spannungsberechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente auf der Grundlage von dreidimensionalen Verschiebungsmodellen. Dissertation A. TH Magdeburg 1982.
- [10] Stein, E., Ahmad, R.: An equilibrium method for stress calculation using finite element displacement models. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 10 (1977), 175 – 198.

Anschrift der Verfasser:

Dr.-Ing. Harald Berger
Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach
Technische Hochschule Otto von Guericke
Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg
PSF 124