

## Zu einigen Problemen der numerischen Behandlung von auf räumlichen Flächen angeordneter Meßwerte

(dargestellt am Beispiel der Hitzdrahtmeßtechnik unter Verwendung von Schrägdrahtsonden in einer räumlichen Strömung)

Gerhard Hennig

### Aufgabenstellung

Bei verschiedenen Prozessen, bei der Untersuchung technischer und physikalischer Erscheinungen und technologischer Vorgänge, treten Datenmengen auf, die sich auf räumlichen Flächen über einer Basis von zwei orthogonal zueinander orientierten Größen anordnen. Sie lassen sich allgemein beschreiben als Funktionen  $u = f(x, y)$  dieser beiden Koordinaten.

Die Interpolation von Zwischenwerten ist bei der numerischen Behandlung zu lösen. Die Lösung wird in vielen Fällen dadurch erschwert, daß die genannten Daten mit Unsicherheiten, Fehlern behaftet sind. An dieser Stelle wird vorausgesetzt, daß diese stochastisch sind.

Einige Fragen, die sich mit der rechnerischen Behandlung solcher Datenmengen ergeben, sollen am Beispiel der Auswertung von Hitzdrahtmessungen mit Hilfe einer Schrägdrahtsonde in einer räumlichen Strömung erläutert werden. Die zufallsbedingten Abweichungen der Daten sind in diesem Fall die Meßfehler.

Die auftretenden Probleme der numerischen Bearbeitung der Meßwerte sind allgemeiner Natur und nicht an das zur Erläuterung der Problemstellung und der Beschreibung der Lösungsmethode gewählte Beispiel gebunden.

### Einige Beziehungen der Hitzdrahtmeßtechnik

Die Ausgangsspannung eines Konstanttemperaturanemometers ist eine Funktion der Anströmgeschwindigkeit am Hitzdraht nach der Gleichung  $E^2 = E_0^2 + K v^n$ , (1) wobei  $E_0$  – das Ausgangssignal am Anemometer der beheizten, nicht angeströmten ( $v = 0$ ) Sonde,  $K$  eine Konstante und  $n \approx 0,45$  der Exponent der Funktion sein sollen.

Die Anströmgeschwindigkeit ist als Vektor durch die drei Komponenten in einem kartesischen Koordinatensystem  $x_i, i = 1, 2, 3$  beschrieben, so daß  $v = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}$  ist.

Durch die Richtungsempfindlichkeit des Hitzdrahtes gehen die Komponenten der Anströmgeschwindigkeit nicht mit ihren Beträgen in die Gleichung ein, sondern mit Gewichten, den Koeffizienten der Richtungsempfindlichkeit. Die in Gleichung (1) angegebene Geschwindigkeit ist deshalb als effektive (im Sinne des Wärmeüberganges am Hitzdraht) anzusehen.

Die Gleichung (1) wird umgeformt zu

$$\eta = \left( \frac{E^2 - E_0^2}{K} \right)^{2/n} = v^2 \quad (2)$$

Die effektive Anströmgeschwindigkeit ist in einem sondenbezogenen Koordinatensystem ausgedrückt. Die zu ermittelnden Strömungsgrößen  $\dot{x}_i$  sind in einem mit der Versuchseinrichtung fest verbundenen System beschrieben.

Der funktionelle Zusammenhang mit den effektiven Größen wird durch die Transformationsmatrix  $a_{ij}$  vermittelt, so daß schließlich  $v_i = k_i a_{ij} \dot{x}_j$ , mit  $k_i$  den Koeffizienten der Richtungsempfindlichkeit, erhalten wird.

Gleichung (2) erhält damit die Form (in Matrizen-schreibweise)

$$\eta = \dot{x}^T a^T k^2 a \dot{x} \quad (3)$$

$k^2$  ist eine Diagonalmatrix. Die Linearkombinationen der drei Geschwindigkeitskomponenten stellen wegen ihrer Symmetrie sechs Unbekannte dar. Zur Lösung ist ein System von mindestens sechs Gleichungen notwendig. Es wird erhalten durch Messungen bei verschiedener Stellung der Hitzdrahtsonde. Hier soll vorausgesetzt werden, daß nur Drehungen der Sonde um ihre Achse um den Drehwinkel  $\varphi$  möglich sind. Die Anströmrichtung ist in ihrer Lage zum Hitzdraht durch die Einführung eines zweiten Winkels, des Schwenkwinkels  $\epsilon$  der Sonde, vollständig festgelegt. Die eingeführten Bezeichnungen sind in Bild 1 dargestellt.

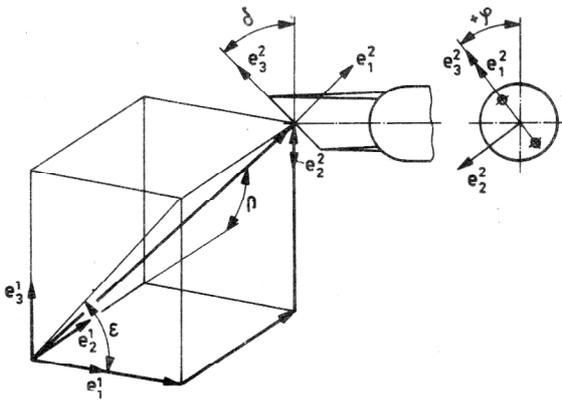
Die Sonde wird kalibriert im Bereich  $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$  und  $60^\circ \leq \epsilon \leq 135^\circ$ . Eine Äquidistanz der Winkelwerte  $\varphi_i$  und  $\epsilon_j$  ist für eine spätere Auswertung nicht Voraussetzung, wird aber in der Praxis meist eingehalten.

Im Ergebnis des Kalibrierens liegt eine Menge von  $u_{ij}$  ( $\varphi_i, \epsilon_j$ ) Meßwerten vor, die sich über der rechteckigen Basis  $\varphi_i, i = 1 \dots, n$  und  $\epsilon_j, j = 1, \dots, m$  auf einer räumlichen Fläche wie im Bild 2 anordnen. Die Koeffizienten der Richtungsempfindlichkeiten liegen ebenfalls als Funktionen von  $\varphi$  und  $\epsilon$  auf zugeordneten räumlichen Flächen.

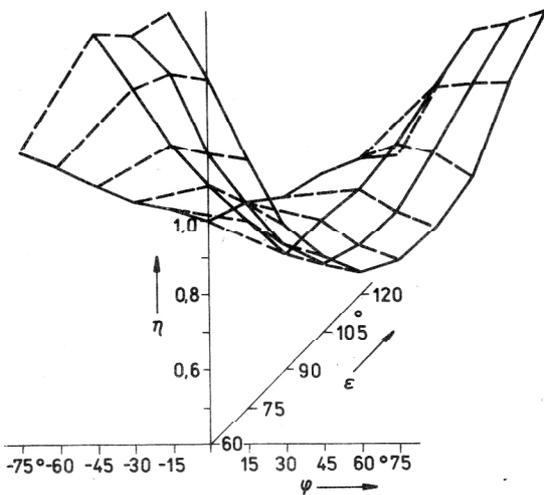
Meßwerte würden nach der getroffenen Voraussetzung auf Linien  $\epsilon = \text{konst.}$  der Kalibrierflächen liegen, wobei der Wert des Schwenkwinkels  $\epsilon$  zunächst unbekannt ist.

Alle Werte bei Kalibrieren und Messen sind voraussetzungsgemäß mit stochastischen Fehlern behaftet.

Als Aufgabe bei der numerischen Bearbeitung der Messung läßt sich nach den bisherigen Ausführungen formulieren:



**Bild 1**  
Lagebeziehungen der verwendeten Koordinatensysteme bei der HDS mit schrägem Draht



**Bild 2**  
Kalibrierfläche  $\eta(\varphi, \epsilon)$  der Schrägdrahtsonde

Die bei Kalibrieren und Messen gewonnenen Werte sollen durch möglichst glatte Flächen und Kurven approximiert werden. Durch die Fehler der Werte ist zu fordern, daß die Approximation ausgleichend geschieht. Die Werte der Messung liegen auf Kurven  $\epsilon = \text{konst.}$  auf der Kalibrierfläche. Die genaue Lage in  $\varphi$  und  $\epsilon$  muß durch Suchen des Minimums des Abstandes der Folge von Meßpunkten von der Kalibrierfläche gefunden werden.

Die Aufgabe umfaßt damit die Approximation mit der Beschreibung der räumlichen Fläche, das Ausgleichen der Werte und das Interpolieren auf der Fläche.

Für die Approximation und Speicherung der Daten der räumlichen Fläche in der Rechenmaschine mit dem Ziel einer schnellen und genauen Interpolation wird eine intervallweise Beschreibung durch Polynome gewählt. Die Nebenbedingung, daß erste und zweite Ableitung im ganzen betrachteten Bereich stetig sein sollen, führt auf Polynome mindestens dritten Grades, im besonderen auf kubische Splinefunktionen.

Für kubische Splinefunktionen  $f(x)$  gilt, daß sie unter allen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $\varphi(x)$  mit  $\varphi(x_i) = g_i$  ausgezeichnet sind durch

$$\int_{x_1}^{x_n} f''(x)^2 dx \leq \int_{x_1}^{x_n} \varphi''(x)^2 dx \quad \text{für den Bereich } x_1, \dots, x_n \quad (4)$$

Die Splinefunktionen zeichnen sich also durch geringe Welligkeit und hohe Glätte aus. Die Stützstellenwerte  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sollen durch Meßwerte repräsentiert werden. Die Variationsaufgabe liefert als Lösung Polynome vom Grad  $2\mu-1$  mit  $\mu = 2$ .

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^4 c_{i,k} (x-x_i)^{k-1} \quad (5)$$

Eine Erweiterung der Beziehung (4) zur Beschreibung von über einem Rechteckbereich  $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m$  auf einer räumlichen Fläche liegender Daten (Meßwerte)  $u(x, y)$  gibt Ritter [1] an.

Es wird dort weiter vorausgesetzt, daß  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $y_j \leq y \leq y_{j+1}$  und außerdem  $x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n$  und  $y_1 < \dots < y_j < \dots < y_m$  sein sollen. In Erweiterung von (4) existiert das Integral

$$\int_{x_1}^{x_n} \int_{y_1}^{y_m} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} g(x, y) \right)^2 dy dx \quad (6)$$

und wird zu einem Minimum.

Die Näherungspolynome  $g(x, y)$  sind reelle Funktionen mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} g(x, y), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(x, y) \quad \text{sind absolut stetig,}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y), \quad \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} g(x, y), \quad \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} g(x, y)$$

sind absolut stetig für alle  $x \in [x_1, x_n]$  als Funktionen von  $y$  und

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x, y), \quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} g(x, y) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} g(x, y) \quad \text{für alle } y \in [y_1, y_m] \text{ als Funktionen}$$

von  $x$ .

Die Lösung von (6) führt auf bikubische Splinefunktionen

$$u(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 a_{ijkl} (x-x_i)^{k-1} (y-y_j)^{l-1} \quad (7)$$

In den Lösungen ist in beiden Fällen eine modifizierte Potenzfunktion eingeführt (truncated power function), auch als abgeschnittene Potenzfunktion (Böhmer [2]) bezeichnet, mit

$$(x-x_i)_+^{k-1} (y-y_j)_+^{l-1} = \begin{cases} (x-x_i)^{k-1} (y-y_j)^{l-1} & \text{für } x \geq x_i \text{ und } y \geq y_j \text{ (} i=1, \dots, n-1 \text{)} \\ 0 & \text{für } x < x_i \text{ und/oder } y < y_j \text{ mit } k, l = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (8)$$

Anstelle von  $(x-x_i)_+^{k-1}$  und  $(y-y_j)_+^{l-1}$  können auch andere Polynome dritten Grades verwendet werden.

Für einen kubischen Splineansatz ergibt das die Form

$$f(x_i) = a_i g_1(x_i) + b_i g_2(x_i) + c_i g_3(x_i) + d_i g_4(x_i) \quad (9)$$

Die Koeffizienten müssen hierbei als Funktionen von  $f_i$  und  $f_i''$  oder auch  $f_i$  und  $f_i'$  ausdrückbar sein, was gewährleistet ist, wenn

$$\det \begin{pmatrix} g_1(x_i) & g_2(x_i) & g_3(x_i) & g_4(x_i) \\ g_1(x_{i+1}) & g_2(x_{i+1}) & g_3(x_{i+1}) & g_4(x_{i+1}) \\ g_1''(x_i) & g_2''(x_i) & g_3''(x_i) & g_4''(x_i) \\ g_1''(x_{i+1}) & g_2''(x_{i+1}) & g_3''(x_{i+1}) & g_4''(x_{i+1}) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (10)$$

oder  $\det / \dots / \neq 0$  mit  $g'$  anstelle von  $g''$ . Die Ansätze sind um so günstiger je einfacher die Determinante auflösbar ist.

Späth [3] gibt dazu eine Reihe von möglichen Ansätzen an. Zur Errechnung der Koeffizienten in den Gleichungen (5) und (7) werden die Ableitungen der Funktion mit herangezogen, die mit den sich aus der Stetigkeit der Funktionen und ihrer ersten und zweiten Ableitung im gesamten betrachteten Bereich mit

$$f_i(x_{i+1} - x_i) = f_{i+1}(0), f_i'(x_{i+1} - x_i) = f_{i+1}'(0) \text{ und}$$

$$f_i''(x_{i+1} - x_i) = f_{i+1}''(0)$$

für kubische Splines die erforderlichen Beziehungen liefern. Bei bikubischen Splines werden die Gleichungen für vier Maschenpunkte  $P_1(i, j)$ ,  $P_2(i+1, j)$ ,  $P_3(i, j+1)$ ,  $P_4(i+1, j+1)$  aus den Daten  $u(x, y)$  und ihren Ableitungen  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  und  $u_{xy}(x, y)$  erhalten. Die Koeffizienten  $a_{ijk}$  werden aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_{ij} & q_{ij} & u_{i,j+1} & q_{i,j+1} \\ P_{ij} & r_{ij} & P_{i,j+1} & r_{i,j+1} \\ u_{i+1,j} & q_{i+1,j} & u_{i+1,j+1} & q_{i+1,j+1} \\ P_{i+1,j} & r_{i+1,j} & P_{i+1,j+1} & r_{i+1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & h_i & h_i^2 & h_i^3 \\ 0 & 1 & 2h_i & 3h_i^2 \end{pmatrix} (A_{ij}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k_j & 1 \\ 0 & 0 & k_j^2 & 2k_j \\ 0 & 0 & k_j^3 & 3k_j^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

errechnet. Hierbei ist  $u_x = p$ ,  $u_y = q$ ,  $u_{xy} = r$ ,  $h_i = x_{i+1} - x_i$

$$k_j = y_{j+1} - y_j. A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{pmatrix} \text{ ist die Matrix der}$$

bikubischen Splinekoeffizienten.

Zur Berechnung ist die Vorgabe von Werten erforderlich, meist für  $y''(1) = 0$  und  $y(N) = 0$  bei kubischen Splines und

$$F_1 = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x, y) = 0 & \text{für } x < x_1 \text{ oder } x \geq x_n \text{ und alle } y \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x, y) = 0 & \text{für } y < y_1 \text{ oder } y \geq y_m \text{ und alle } x \end{cases} \quad (12)$$

bei bikubischen Splines. Es lassen sich aber auch je nach den Forderungen der Aufgabenstellung andere Randwerte für die zweite oder erste Ableitung einführen.

## Splineausgleichverfahren

In vielen Fällen der Anwendung von Splinefunktionen sind die zu approximierenden Werte mit stochastischen Fehlern behaftet, so daß es sinnlos ist, eine Darstellung mit exakter Beschreibung der Stützstellenwerte vorzunehmen. Es ist vielmehr eine ausgleichende Kurve mit kubischen bzw. eine ausgleichende Fläche mit bikubischen Splinefunktionen durch sie hindurchzulegen.

Die Minimalbedingung (4) nimmt jetzt die Form

$$(1-p) \int_{x_1}^{x_n} (f''(x))^2 dx + p \sum_{i=1}^n \left( \frac{g_i - f(x_i)}{\partial g_i} \right)^2 \rightarrow \text{Min (de Boor [4] an)} \quad (13)$$

Die Minimierung von (13) ist ein Kompromiß zwischen dem Wunsch, sich eng an die gegebenen Daten zu halten und andererseits eine glatte Funktion zu bekommen. Durch die Wahl von  $p$  ( $p \in [0, 1]$ ) wird bestimmt, welchem der beiden Ziele die größere Bedeutung zugemessen wird.

Die Ordinaten der kubischen Splinefunktionen werden so bestimmt, daß die Differenzen  $g_i - f_i$  proportional den Sprüngen der dritten Ableitungen in den Stützstellen  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) sind.

Späth [3] führt folgende Beziehung dafür ein,

$$P_i(g_i - f_i) = f_i'''(x_i) - f_{i-1}'''(x_i) \quad (i=2, \dots, n-1) \quad (14)$$

mit  $p_i > 0$  als Gewichten. Gelöst werden muß das System

$$\begin{aligned} Hf''(x) + Kf(x) &= 0 \\ -K^T f'(x) + Df(x) &= Du \end{aligned} \quad (15)$$

um die Koeffizienten der kubischen Splinefunktionen zu berechnen.

$$\text{Eine Zeile von } K \text{ ist } -\frac{1}{h_i} \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) - \frac{1}{h_{i+1}}$$

$$\text{eine Zeile von } H \text{ ist } \frac{1}{6} h_i \frac{1}{3} (h_i + h_{i+1}) \frac{1}{6} h_{i+1} ,$$

D ist die Diagonalmatrix der Gewichte  $p_i$ .

$$\text{Die Koeffizientenmatrix des Systems ist } \begin{pmatrix} H & K \\ K^T & D \end{pmatrix} .$$

Die Lösung erfolgt durch Blockunterrelaxation. Der Relaxationsfaktor ergibt sich aus der Beziehung

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \rho(H^{-1}KD^{-1}KT)}} \quad (16)$$

mit dem Spektralradius  $\rho_K = \max_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i|$ , dem maximalen

Eigenwert von K.

## Zweidimensionaler Ausgleichspline, Splineausgleich

Der Ansatz zur Berechnung eines zweidimensionalen Ausgleichsplines wird durch Verallgemeinern der  $L_2$ -Approximation mit kubischen Splinefunktionen erhalten. Es wird wie in der Bedingung (14) angenommen, daß die Ordinatendifferenzen proportional dem Sprung in den dritten Ableitungen in den Stützstellen sein sollen

$$q(u(x_i, y_j) - a_{11}^{ij}) = \frac{\partial^6 g_{i-1,j-1}(x_i, y_j)}{\partial x^3 \partial y^3} - \frac{\partial^6 g_{ij}(x_i, y_j)}{\partial x^3 \partial y^3} \quad (17)$$

Die Beziehung (13) wird jetzt zu

$$\begin{aligned} J &= (1-q) \int_{x_1}^{x_n} \int_{y_1}^{y_m} \left( \frac{\partial^4 g(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} \right)^2 dy dx + \\ &+ q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left( \frac{u(x_i, y_j) - a_{11}^{ij}}{\partial u_{ij}} \right) \rightarrow \text{Min} \end{aligned} \quad (18)$$

Für die praktische Rechnung wird ein Weg gegangen, der insbesondere die Eigenschaften des linearen Funktionenraums benutzt, in dem alle bisher dargestellten Ausführungen durchgeführt wurden.

Berechnung bikubischer interpolierender und ausgleichender Splinefunktionen mit Hilfe des allgemeinen Produkts (Tensorprodukt)

Die kubischen Splinefunktionen sind ein Unterraum der Hermiteschen kubischen Funktionen. Die Eigenschaft

der Linearität erlaubt es, bei der Berechnung der bikubischen Splinekoeffizienten  $a_{ijk}$  die Rechenprogramme für die kubischen Splinekoeffizienten zu verwenden. Dadurch kann erheblich an Rechenzeit und Speicherplatz gespart werden.

Benutzt wird der lineare Raum  $ch,k(x,y)$  der reellen Funktionen zweier Variabler über einem Rechteckbereich  $x \times y = [a, b] \times [c, d]$ , die alle stetige partielle Ableitungen  $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$  mit  $i \leq h$  und  $j \leq k$  besitzen.

Es ist  $U = P_h$  ein linearer Raum von Polynomen der Ordnung  $h$ , die reellen Funktionen von  $X \in \mathbb{R}$  und gleichermaßen  $V = P_k$  der lineare Raum der Polynome der Ordnung  $k$ , die Funktionen von  $Y \in \mathbb{R}$  sind. Dann ist  $U \times V$  der lineare Raum  $P_{h,k}$  aller Polynome von zwei Variablen des Grades  $< h$  der Variablen  $X$  und  $< k$  der Variablen  $Y$ .

Bei der Bildung eines Tensorproduktsplines  $W \in U \times V$  im Punkt  $[a, b]$  seien  $U = S_{h,s}$  und  $V = S_{k,t}$  zwei spezielle lineare Räume der Splinefunktionen der Ordnung  $h$  und  $k$  und der Stützstellenfolgen  $s$  und  $t$ .

Es ist  $W = \sum_{ij} \alpha_{ij} B_{ij}$  für eine Koeffizientenmatrix  $(\alpha_{ij})$  und für  $B_{ij}(x, y) = B_{i,h,s}(x) \cdot B_{j,k,t}(y)$ , dem Tensor- oder Kroneckerprodukt der eindimensionalen Basis-splinefunktion  $B_{i,h,s}$  und  $B_{j,k,t}$ .

Es wird gerechnet

$$w(a, b) = \sum_i \left( \sum_j \alpha_{ij} B_{j,k,t}(b) \right) B_{i,h,s}(a) = \lambda w_\mu \quad (19)$$

oder

$$w(a, b) = \sum_j \left( \sum_i \alpha_{ij} B_{i,h,s}(a) \right) B_{j,k,t}(b) = \mu w_\lambda \quad (20)$$

mit den linearen Funktionalen  $\lambda = [a]$  und  $\mu = [b]$

In der praktischen Durchführung berechnet ein Splineunterprogramm für  $f \in S_{h,s}$  die Zahlen  $C_{ij}(f)^{(i-1)}(X_i^+)$ ,  $i=1, \dots, h$  als Polynomkoeffizienten von  $f$  im Intervall  $j(X_j, X_{j+1})$ ,  $j=1, \dots, n$  für die Stützstellenfolge  $(X_i)_1^{n+1}$ .

Das gleiche Unterprogramm rechnet auch für die Stützstellenfolge  $(Y)_1^{m+1}$  für  $g \in S_{k,t}$  die Zahlen  $C_{ij}(g) = g^{(i-1)}(Y_j^+)$ ,  $i=1, \dots, k$  und  $j=1, \dots, m$ .

Das Tensorprodukt  $W \in S_{h,s} \otimes S_{k,t}$  besteht danach aus

- den ganzen Zahlen  $n, h$  und  $m, k$ , die die Nummer der Polynomstücke und den Grad jeder Variablen angeben,
- den beiden Folgen  $x_i (i=1, \dots, n+1)$  und  $y_i (i=1, \dots, m+1)$  der Stützstellen in jeder Variablen, die ein rechteckiges Gitter bilden,
- dem vierdimensionalen Feld  $C_{i,j,p,q}(W) = D_x^{i-1} D_y^{j-1} W(x_p^+, y_q^+)$  (21) für  $i=1, \dots, h$ ;  $j=1, \dots, k$ ;  $p=1, \dots, n$ ;  $q=1, \dots, m$ , das aus der Rechenregel  $C_{i,j,p,q}(f \otimes g) = C_{i,p}(f) C_{j,q}(g)$  für jedes  $f \otimes g \in S_{h,s} \otimes S_{k,t}$  erhalten wird.

Hierbei ist  $D_x^{i-1} = \frac{\partial^{(i-1)}}{\partial x^{(i-1)}}$  die  $i-1$ -te partielle Ableitung

nach  $x$ , das Entsprechende gilt für  $\Gamma_y^{j-1}$ .

Das Berechnen der Splinekoeffizienten  $C_{ijpq}$  geschieht durch den zweimaligen Aufruf des Unterprogramms zur Bestimmung kubischer Splinefunktionen, zuerst zur Interpolation in  $x$ -Richtung  $C_{ip}$  für jede Spalte  $q$ , danach in  $y$ -Richtung, um die sechzehn Koeffizienten der bikubischen Splinefunktion  $C_{ijpq}$  für jeden Punkt  $(pq)$  zu erhalten.

Das FORTRAN-Hauptprogramm lautet an dieser Stelle

```
NI=N-1
DO 1 J=1,M
1 CALL KUBSPL(X,C3,COEF,N,J,1,1,1)
DO 2 I=1,N1
DO 2 K=1,4
2 C3(I,J,K)=COEF(I,J,K,1)
DO 3 I=1,N1
DO 3 IK=1,4
3 CALL KUBSPL(Y,C3,COEF,M,I,IK,1,2)
.
.
.
```

Voraussetzung für die Anwendung der Tensorproduktbildung ist, daß die Stützstellenwerte auf den Maschenpunkten eines Rechteckgitters in  $x$ - und  $y$ -Richtung angeordnet sind.

## Approximation auf der Fläche

Bei der Konstruktion eines ausgleichenden zweidimensionalen Splines kann ebenfalls die allgemeine Produktbildung angewandt werden, da die angeführten Approximationsmethoden lineare Ausgleichsprozesse darstellen. Es ist wie bei dem angeführten Programmteil zweimal das entsprechende eindimensionale Ausgleichsplineprogramm aufzurufen.

## LITERATUR

- [1] Ritter, K.: Two Dimensional Splines and their Extremal Properties. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 49 (1969) Heft 10, S. 597 – 608.
- [2] Böhmer,.: Spline-Funktionen B.G. Teubner Stuttgart.
- [3] Späth, H.: Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. Oldenburg-Verlag, München 1978.
- [4] de Boor, C.: A Practical Guide to Splines, Springer New York 1978

Anschrift des Verfassers:  
Dr.-Ing. Gerhard Hennig  
Technische Hochschule Otto von Guericke  
Sektion Dieselmotoren, Pumpen und  
Verdichter  
3010 Magdeburg  
PSF 124