

Beitrag zur deformationsmechanischen Charakterisierung mehrschichtiger Schalen

Bernd Lauke, Rolf Barthel

1. Einleitung

Die Arbeit soll einen Beitrag zur Charakterisierung des deformationsmechanischen Verhaltens von Radialreifengürteln liefern.

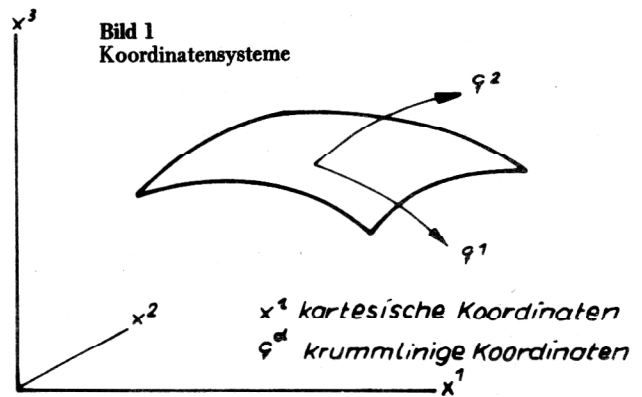
Der Radialgürtelreifen wird beim Abrollprozeß durch Biegebeanspruchungen belastet. Dabei können innerhalb dieses Elements sowohl Zug- als auch Stauchdeformationen bzw. -Spannungen auftreten. Vor allem die Stauchdeformationen beeinflussen das Ermüdungsverhalten wesentlich. Die Berechnung dieser Verformungen stellt ein komplexes Problem dar, welches umfangreiche Untersuchungen voraussetzt. Zur Lösung dieses Problems sind wichtige Vorarbeiten vor allem bezüglich der Modellbildung für den Radialreifengürtel notwendig. In den Arbeiten [1], [2] und [3] wurden eine Reihe verschiedener Modelle zur Berechnung ebener gürtelähnlicher Elemente aufgestellt bzw. herangezogen. Dabei wurde auf die Berücksichtigung der schichtförmigen Struktur dieser Elemente, wobei die Schichten im allgemeinen anisotrop sind, und die daraus resultierenden mechanischen Eigenschaften besonderer Wert gelegt. Ausgangspunkt der verschiedenen Modelle waren unterschiedliche Ansätze für die Verschiebungen bzw. Scherspannungen über den Querschnitt der Einzelschichten bzw. des Verbundes, wobei insbesondere, wegen der konstruktionsbedingten „weichen“ Schichten, Schereffekte berücksichtigt wurden. Der Vergleich der Resultate der verschiedenen Modelle hat für spezielle Biegebelastungen ergeben, daß sich die Mikrostrukturtheorie wegen der Berücksichtigung lokaler Rotation und der Handhabbarkeit des Modells am geeignetsten zur Erweiterung auf die schalenförmige Geometrie des Gürtels erweist. Im vorliegenden Beitrag erfolgt deshalb die Erweiterung der Mikrostrukturtheorie auf krummlinige Koordinaten, um so ein praktikables Modell für den Gürtel des Radialreifens bereitzustellen.

2. Schalenelement im Euklidischen Raum

Zunächst sollen einige der für die Berechnungen notwendigen Beziehungen für ein Schalenelement im Euklidischen Raum zusammengestellt werden. Mit x^i ($i = 1, 2, 3$) werden die kartesischen Koordinaten und mit q^α ($\alpha = 1, 2$) die krummlinigen Koordinaten auf der Bezugsfläche ($z = 0$) (vgl. Bild 1) dargestellt. Der Ortsvektor der Bezugsfläche wird mit \vec{r}^b bezeichnet. Im undeformierten Zustand werden beliebige Punkte des Schalenelements außerhalb der Fläche $z = 0$ durch

$$\vec{R} = \vec{r}^b + z \vec{n} \quad (1)$$

beschrieben.



In der Bezugsfläche gelten die Beziehungen der Flächentheorie im Euklidischen Raum [5]. Der Metriktensor (auch Fundamentalform erster Ordnung genannt) wird mit $a_{\alpha\beta} = x_{,\alpha}^i x_{,\beta}^i$ und die Lameschen Konstanten werden mit $A = \sqrt{a_{11}}$ und $B = \sqrt{a_{22}}$ bezeichnet. Weiterhin gilt für die Koeffizienten der Fundamentalform zweiter Ordnung die Beziehung $b_{\alpha\beta} = \vec{n}_{,q^\alpha} \cdot \vec{a}_\beta$ (\vec{n} : Normaleneinheitsvektor auf der Bezugsfläche) bzw. $b_\alpha^\beta = b_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta}$, wobei für griechische Buchstaben die Summation von 1 bis 2 erfolgt.

Die Metrik außerhalb dieser Bezugsfläche berechnet sich nunmehr durch

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial q^j} \quad (2)$$

wobei $q^3 = z$ gilt.

Wird der Vektor (1) eingesetzt und werden die Beziehungen für die Fundamentalformen erster und zweiter Ordnung auf der Fläche berücksichtigt, erhält man:

$$g_{\gamma\delta} = \mu_\gamma^\alpha \mu_\delta^\beta a_{\alpha\beta} \quad (3)$$

$$g_{33} = a_{33} = 1, \quad g_{\alpha 3} = 0$$

mit

$$\mu_\gamma^\delta = (\delta_\gamma^\delta - z b_\gamma^\delta)$$

Wenn die Hauptkrümmungslinien mit den Koordinatenlinien übereinstimmen, bekommt man daraus:

$$g_{11} = (1 + z/R_1)^2 a_{11}, \quad g_{22} = (1 + z/R_2)^2 a_{22} \quad (4)$$

$$g_{12} = a_{12} = 0$$

bzw. durch die Umbenennungen $\alpha = \sqrt{g_{11}}$, $\beta = \sqrt{g_{22}}$,

$$\gamma = \sqrt{g_{33}}, \quad \sqrt{a_{11}} = A,$$

$$\sqrt{a_{22}} = B \text{ (Lamesche Konstanten)}$$

$$\alpha = (1+z/R_1) A$$

$$\beta = (1+z/R_2) B \quad (5)$$

$$\gamma = 1$$

Werden Schalenelemente betrachtet, deren Dicke klein gegenüber dem Krümmungsradius ist,

$$z/R_\alpha \ll 1 \quad (6)$$

folgt daraus:

$$\varepsilon_{11} = a_{11}, \quad \varepsilon_{22} = a_{22}, \quad \varepsilon_{12} = 0 \quad (7)$$

$$\varepsilon_{33} = 1, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = 0$$

bzw.

$$\alpha = A, \quad \beta = B, \quad \gamma = 1 \quad (8)$$

Das bedeutet, daß sich die Metrik über den Querschnitt des Schalenelements nicht ändert.

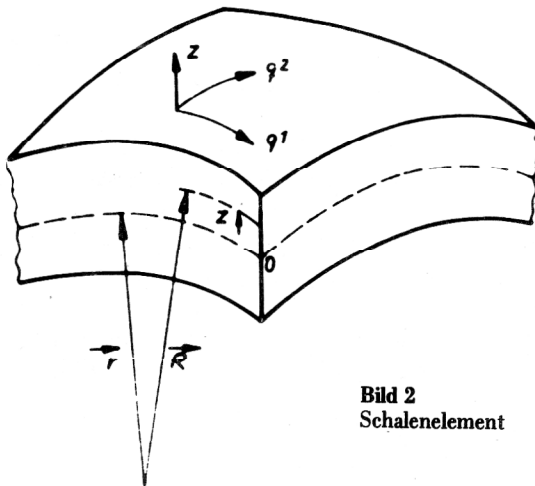


Bild 2
Schalenelement

3. Mikrostrukturtheorie für mehrschichtige Schalen

3.1. Allgemeines

Es soll eine Verallgemeinerung der in [3] für ebene Schichtverbunde abgeleiteten Mikrostrukturtheorie auf krummlinige Koordinaten vorgenommen werden. Zum Problem der Berechnung des Verformungsverhaltens von drei bzw. mehrschichtigen Schalen gibt es eine Vielzahl von Publikationen, welche die Aufgabe mit unterschiedlichen Voraussetzungen von unterschiedlichen Ausgangspunkten bei verschiedenen Belastungen und unterschiedlichen Lösungsmethoden behandeln.

Eine umfassende Zusammenstellung von grundlegenden Arbeiten auf dem Gebiet dreischichtiger Schalen ist in den Arbeiten von Duda [6] und Bert [7] bzw. in der Monografie von Bolotin, Novickov [8] für mehrschichtige Schalen zu finden. Es soll an dieser Stelle deshalb nur das hier verwendete Modell mit den Arbeiten verglichen werden, welche vom selben Ausgangspunkt ausgehen. Im Unterschied zu einer interessanten Arbeit von Altenbach, Shilin [9], wo eine nichtlineare Theorie dreischichtiger Schalen auf der Grundlage der Theorie

einfacher Schalen abgeleitet wird, geht der vorliegende Beitrag von Annahmen bzgl. der Verschiebungsverteilung über den Querschnitt der Einzelschichten bzw. der gesamten Schale aus. Diese Vorgehensweise entspricht dem erstmals von Bolotin (vgl. [8]) verwendeten Modell der gebrochenen Normalen.

In der Arbeit von Gerstein [10] werden Bewegungsgleichungen für vielschichtige Schalen unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität abgeleitet. Jedoch handelt es sich dabei um isotrope Schichten. Bei der Berechnung der Deformationsenergie wird eine Integration über die Schichten ausgeführt, wobei die Verschiebungsfunktionen der einzelnen Schichten „verschmiert“ werden, d. h. die ursprünglich diskreten Funktionen bzw. Koordinaten ($u^{(k)}$, z_k) werden durch kontinuierliche Variablen ersetzt. Um die Berechnung von Schichtverbunden mit einer geringen Schichtanzahl zuzulassen, wird dieser Übergang hier nicht vollzogen.

In einer Arbeit von Libresku [11] wurden Bewegungsgleichungen für Schalenverbunde mit anisotropen Schichten abgeleitet. Diese sind jedoch abhängig von der Anzahl der Schichten und somit für jede Aufbauvariante neu zu lösen. In der Monografie von Bolotin, Novickov [8] erfolgte die Ableitung der Grundgleichungen auf der Grundlage des Modells der gebrochenen Normalen. Wie im Falle des ebenen Verbundes wird von einer alternierenden Aufbauweise der Schalen ausgegangen. Es wechseln sich starre Schichten (Kirchhoffsche Hypothese) und weiche Schichten (Rotationen) mit isotropen Eigenschaften ab. Es wird sowohl geometrische Linearität als auch Nichtlinearität behandelt. Wie in der oben genannten Arbeit sind die Bewegungsgleichungen von der Anzahl der Schichten abhängig.

Zur Berechnung der Scherspannungen in anisotropen mehrschichtigen Schalen wird in der Arbeit von Grigorenko u. Mitarb. [12] neben der Kirchhoffschen Näherung ein Ansatz für die Einzelschicht angewandt, der sowohl lokale Rotationen als auch Rotationen für den Gesamtquerschnitt zuläßt. Unter Voraussetzung kleiner Verformungen werden somit von der Schichtanzahl unabhängige DGL-Systeme erhalten.

Im folgenden soll eine Theorie abgeleitet werden, deren Resultate nicht von der Schichtanzahl (bei im allgemeinen beliebigem Schichtaufbau mit allgemein orthotropen Eigenschaften) abhängen und wobei geometrische Nichtlinearität und Anfangsspannungen berücksichtigt werden.

Die allgemeine Ableitung erfolgt unter dem Gesichtspunkt der Möglichkeit einer Einarbeitung in ein praktisches Reifenmodell; d. h., es ist erforderlich, neben einer möglichst exakten physikalischen Beschreibung den auftretenden analytischen bzw. numerischen Aufwand in vertretbaren Grenzen zu halten. Bisher ist den Autoren in der Literatur keine Berechnung des Radialreifens unter nichtsymmetrischer Belastung (Abplattung) bekannt geworden. Die dabei auftretenden numerischen Schwierigkeiten sind nach [13] enorm. Eine Berücksichtigung der realen Gürtelstruktur führt zu einer weiteren Komplizierung des Problems.

3.2. Ableitung der Grundgleichungen für mehrschichtige Schalen mit Anfangsspannungen

3.2.1. Geometrisches Modell und physikalische Voraussetzungen

Für ein schichtförmiges Schalenelement, bestehend aus $k = n$ Schichten, wird ein geometrisches Modell entsprechend Bild 3 zugrunde gelegt. Dabei bedeuten \vec{r}^0 den

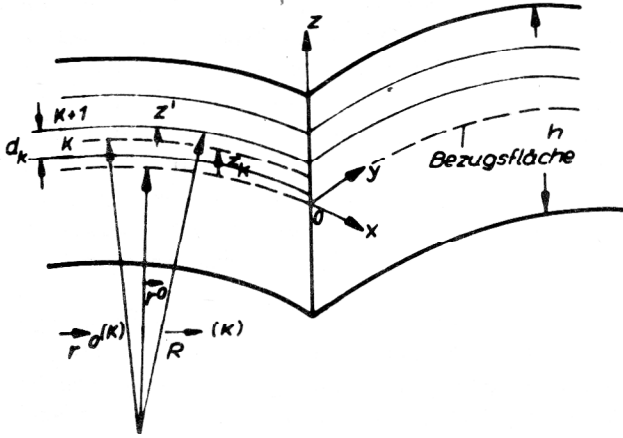


Bild 3
Schichtförmiges Schalenelement im Querschnitt

Ortsvektor der Bezugsflächen ($z = 0$) des Gesamtverbundes und $\vec{r}^0(k)$ den Ortsvektor der Mittelfläche ($z' = 0$) jeder einzelnen Schicht (k). Der Ort eines beliebigen Punktes innerhalb des Verbundes läßt sich wie folgt darstellen:

$$\vec{R}^{(k)} = \vec{r}^0 + z_n \vec{n} \quad (9)$$

$$\vec{R}^{(k)} = \vec{r}^0(k) + z_n \vec{n} \quad - \frac{d_k}{2} \leq z' \leq \frac{d_k}{2}$$

Der Abstand der Mittelfläche ($z' = 0$) einer beliebigen Schicht zur Bezugsfläche ($z = 0$) wird mit z_k bezeichnet. Somit erhält man für den Vektor

$$\vec{r}^0(k) = \vec{r}^0 + z_k \vec{n} \quad (10)$$

Wird dies in (9) eingesetzt, ergibt sich für den undefor-
mierten Zustand des Schalenelements:

$$\vec{R}^{(k)} = \vec{r}^0 + (z' + z_k) \vec{n} \quad (11)$$

In der Bezugsfläche ($z = 0$) gelten die in Abschnitt 2 aufgestellten Beziehungen für die Basis- bzw. Einheitsvektoren und die Metrik. Für Flächen außerhalb der Bezugsfläche gilt jetzt anstelle (2)

$$e_{ij}^{(k)} = \frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{R}^{(k)}}{\partial q^j} \quad (12)$$

Wird $\vec{R}^{(k)}$ eingesetzt, folgt daraus:

$$\begin{aligned} \alpha^{(k)} &= (1 + z/R_1^{(k)}) A \\ \beta^{(k)} &= (1 + z/R_2^{(k)}) B \\ \gamma &= 1 \end{aligned} \quad (13)$$

In der weiteren Ableitung wird vorausgesetzt, daß es sich um dünne Schalen handeln soll, wobei die Beziehung (6) gilt. Aus (13) ergibt sich:

$$\alpha = A, \quad \beta = B, \quad \gamma = 1, \quad (14)$$

d. h. die Metrik ist über den Querschnitt konstant. Die Ableitung des Berechnungsmodells erfolgt für einen Verbund mit einer beliebigen Anzahl von Schichten (n) mit unterschiedlichen, im allgemeinen orthotropen elastischen Eigenschaften. Anschließend erfolgt die Spezialisierung auf einen dem Radialreifengürtel entsprechenden Aufbau des Verbundes aus alternierenden Verstärkungsschichten (Lagen) und weichen Zwischenschichten. Für den Zusammenhang zwischen Spannungen und Deformationen wird Linearität vorausgesetzt, wohingegen für die Deformationen in Abhängigkeit von den Verschiebungen nichtlineare Ausdrücke benutzt werden.

Analog zu [2] werden folgende drei Grundannahmen für die weitere Ableitung getroffen:

1. Lineare Verschiebungsverteilung innerhalb der Schichten
2. ebene Querschnitte, die vor der Deformation normal zur Mittelfläche jeder Schicht verlaufen, bleiben nach der Deformation eben, aber nicht normal zu dieser
3. ebener Spannungszustand

3.2.2. Hookesches Gesetz

Die Verstärkungsschichten (Lagen), welche aus Matrixmaterial und unendlichen Fasern als Verstärkungsmaterial bestehen, weisen – bezogen auf das System der Fasern – orthotrope Symmetrie auf. Wird der Spannungszustand auf ein dazu um den Winkel (Θ) gedrehtes System betrachtet, tritt allgemeine Orthotropie auf. Unter Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes nimmt das Hookesche Gesetz folgende Gestalt an:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_4 \\ \tau_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{bmatrix} \quad (16)$$

mit den Steifigkeiten \bar{C}_{ij} und den abgeleiteten Steifigkeiten

$$\bar{Q}_{ij} = \bar{C}_{ij} - \frac{\bar{C}_{i3} \bar{C}_{3j}}{\bar{C}_{33}} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (17)$$

Der Querstrich bedeutet die Abhängigkeit von (Θ) infolge der Rotation des Koordinatensystems. Die Indizes 1, 2, 4, 5, 6 beziehen sich auf das krummlinige Koordinatensystem q^1, q^2, q^3 bzw. x, y, z mit der Bedeutung:

$$1 \rightarrow xx, \quad 2 \rightarrow yy, \quad 4 \rightarrow yz, \quad 5 \rightarrow xz, \quad 6 \rightarrow xy \quad (18)$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= \tau_6 = \tau_{12} \\ \epsilon_6 &= \gamma_6 = \gamma_{12} = 2\epsilon_{12} \end{aligned}$$

Die Transformationsformeln für die Q_{ij} und C_{ij} sind den Arbeiten [14] bzw. [15] zu entnehmen.

3.2.3. Zusammenhang von Deformationen und Verschiebungen

Werden physikalische Probleme in bezug auf ein krummliniges Koordinatensystem untersucht, muß in mathematischer Hinsicht eine Ersetzung der partiellen Ableitungen durch die kovarianten bzw. kontravarianten Ableitungen erfolgen. Außerdem muß bei allen Vektoren und Tensoren zu den „physikalischen Komponenten“ übergegangen werden. Die Deformationen in Abhängigkeit von den Verschiebungen lauten somit:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i/j} + u_{j/i} + u_{k/i} u^k/j \right) \quad (19)$$

wobei $u_{i/j}$ die kovariante Ableitung des Verschiebungsvektors eines Punktes in einer Fläche (Metrik g_{ij}) außerhalb der Bezugsfläche ($z = 0$) darstellt. Sie ist wie folgt definiert:

$$u_{i/j} = : u_{i,j} - \Gamma_{ij}^k u_k \quad (20)$$

Γ : Christoffelsymbol

Werden die kovarianten Ableitungen unter Verwendung der Ableitungen der Einheitsvektoren in (19) eingesetzt, erhält man den allgemeinen Zusammenhang zwischen Deformationen und Verschiebungen (vgl. [16], S. 114). Im vorliegenden Problem interessiert dieser Zusammenhang für eine Schalengeometrie mit den Krümmungsgraden $R_1^{(k)}$, $R_2^{(k)}$. Unter Ausnutzung der Beziehung (13) ergibt sich für $\epsilon_1^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{(k)} = & \frac{1}{1+z/R_1^{(k)}} \left(\frac{1}{A} u_{,x}^{(k)} + \frac{v^{(k)}}{AB} A_{,y} + \frac{w^0}{R_1^{(k)}} \right) \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+z/R_1^{(k)})^2} \left[\left(\frac{1}{A} u_{,x}^{(k)} + \frac{1}{AB} A_{,y} v^{(k)} \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{w^{(k)}}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{A} v_{,x}^{(k)} - \frac{v^{(k)}}{AB} A_{,y} \right)^2 + \left(\frac{w_{,x}}{A} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{u^{(k)}}{R_1} \right)^2 \right] \quad (21) \end{aligned}$$

Auf die Angabe aller Komponenten wird aus Platzgründen und aus Gründen der Übersicht verzichtet. In gleicher Weise wird in der gesamten Arbeit verfahren. Die ausführlichen Beziehungen können in [20] nachgelesen werden.

3.2.4. Verschiebungsansätze

Den Ausgangspunkt zur Beschreibung des Verformungsverhaltens von mehrschichtigen Schalen stellen die Ansätze über den Verschiebungszustand dar. Dabei werden jeder Schicht eigene Freiheitsgrade bezüglich der Verschiebungen und Rotationen zugeordnet:

$$u_i^{(k)} = u_i^{0(k)} + z' \phi_i^{(k)}, \quad u_i = (u, v, w) \quad (22)$$

$$\phi_i^{(k)} = (\phi_x^{(k)}, \phi_y^{(k)}, \phi_z^{(k)})$$

wobei die $u_i^{0(k)}$ die Verschiebungen in der Mittelfläche der k -ten Schicht und die $\phi_i^{(k)}$ die Rotationen der Querschnitte bei Biegebelastung darstellen.

Die Deformationen in z -Richtung werden vernachlässigt, so daß die Durchbiegungsfunktion (w) unabhängig von der z -Koordinate wird, d. h.

$$\phi_{zz}^{(k)} = 0 \quad (23)$$

Mittels der Beziehungen (21) erhält man nach Einsetzen von (22) unter Berücksichtigung von (6) die folgenden Ausdrücke für die Deformationen:

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{(k)} &= \epsilon_i^{0(k)} + z' \kappa_i^{(k)} + z'^2 \kappa_i^{2(k)} \quad i = 1, 2, 6 \\ \gamma_j^{(k)} &= \gamma_j^{0(k)} + z' \kappa_j^{(k)} \quad j = 4, 5 \end{aligned} \quad (24)$$

Die Tensorkomponenten $\epsilon_i^{0(k)}$, $\gamma_j^{0(k)}$, $\kappa_i^{1(k)}$, $\kappa_i^{2(k)}$ und $\kappa_j^{(k)}$ sind im Anhang (A 1) durch die Angabe jeweils einer Komponente angedeutet.

Werden die Deformationen in das Hookesche Gesetz (15, 16) eingesetzt, erhält man den Spannungszustand innerhalb der Schichten infolge der durch die äußere Last verursachten Verschiebungen u , v , w . Es wird im weiteren davon ausgegangen, daß keine Ablöseerscheinungen an den Grenzflächen der Schichten auftreten. Unter dieser Voraussetzung müssen folgende Stetigkeitsbedingungen für die Verschiebungen erfüllt sein:

$$u_i^{(k)} (-d_k/2) = u_i^{(k+1)} (d_k/2) \quad (25)$$

Mittels der Ansätze (22) ergibt sich:

$$u_i^{0(k+1)} - u_i^{0(k)} = \frac{1}{2} (d_k \phi_i^{(k)} + d_{k+1} \phi_i^{(k+1)}) \quad (26)$$

Mit der Erfüllung dieser Beziehungen ist eine Reduzierung der Freiheitsgrade verbunden, da alle Mittelflächenverschiebungen auf die einer Schicht zurückführbar sind.

3.2.5. Das elastische Potential

Das geometrisch nichtlineare elastische Problem kann mittels einer Variationsaufgabe formuliert werden, wozu die Kenntnis des elastischen Potentials erforderlich ist. In der Literatur [17] werden verschiedene Formulierungsmöglichkeiten der Variationsaufgabe angegeben. Diese unterscheiden sich in der Anzahl bzw. der Art der zu variierenden Funktionen. In einer verallgemeinerten Form des Prinzips der stationären potentiellen Energie, welche in den Arbeiten [10], [11] und [18] benutzt wurde, treten z. B. die Deformationen, Verschiebungen, Spannungen und Kräfte auf dem Rand als unabhängige Funktionen auf.

Praktisch ist es jedoch meistens so, daß man für ein bestimmtes Material der Schalen den Zusammenhang zwischen Spannungen und Deformationen a priori kennt, d. h., man kann die Kräfte bzw. Momente aus den Deformationen (15) berechnen. Des weiteren können die Beziehungen zwischen Deformationen und Verschiebun-

gen für Schalen vor der Lösung der Variationsaufgabe aufgeschrieben werden, welche sonst aus der Lösung der verallgemeinerten Variationsaufgaben folgen würden. Somit ist eine Reduzierung der allgemeinen Form des Prinzips der stationären potentiellen Energie möglich. Unter diesen Gesichtspunkten wird im folgenden der Ausdruck für die potentielle Energie aufgeschrieben. Unter Berücksichtigung der Energie der Anfangsspannungen $\bar{\sigma}_x$ und $\bar{\sigma}_y$ erhält man folgende Form für die Energiedichte:

$$\eta^{(k)} = \eta_e^{(k)} + \eta^{(k)} = \int_{-d_{k/2}}^{d_{k/2}} \left(\frac{1}{2} \sigma^j \epsilon_i + \eta^{(k)} \right) dz', \quad (27)$$

$i = 1, 2, 4, 5, 6$

mit $\eta^{(k)}$: Energie der Anfangsspannungen

Wie von Biot [19] gezeigt wurde, werden die Anfangsspannungen im Energieausdruck in folgender Form wirksam:

$$\eta^{(k)} = \int_{-d_{k/2}}^{d_{k/2}} (\bar{\sigma}^j \epsilon_j - \bar{\sigma}^i \epsilon_i)^{(k)} dz', \quad j, i = 1, 2 \quad (28)$$

wobei die ϵ_i die linearen Anteile der Deformationen darstellen. Nach Einsetzen dieser Beziehung in (27) erhält man die Energiedichte der k-ten Schicht:

$$\eta^{(k)} = \int_{-d_{k/2}}^{d_{k/2}} \left(\frac{1}{2} \sigma^{(k)i} \epsilon_i^{(k)} + \bar{\sigma}^{(k)j} \tilde{\epsilon}_j^{(k)} \right) dz', \quad (29)$$

$i = 1, 2, 4, 5, 6$
 $j = 1, 2$

wobei die $\tilde{\epsilon}_j^{(k)}$ die nichtlinearen Anteile der Deformationen bedeuten. Wie in [3] gezeigt werden konnte, haben im Falle der Deformation von vielschichtigen Platten mit Anfangsspannungen nur die nichtlinearen Anteile bezüglich der Durchbiegung einen wesentlichen Einfluß auf die Lösung. Es wird angenommen, daß auch im vorliegenden Fall der Haupteinfluß von diesen Termen geliefert wird. Somit gelten für die Deformation $\tilde{\epsilon}_j^{(k)}$ folgende Ausdrücke:

$$\tilde{\epsilon}_1^{(k)} = \frac{w_0^2 \cdot x}{2A^2} + \frac{w_0^2}{2R_1^2}, \quad \tilde{\epsilon}_2^{(k)} = \frac{w_0^2 \cdot y}{2B^2} + \frac{w_0^2}{2R_2^2} \quad (30)$$

Werden die Spannungen entsprechend dem Hookeschen Gesetz und die Deformationen (30) in (29) eingesetzt, berechnet sich die Energiedichte wie folgt:

$$2\eta^{(k)} = \int_{-d_{k/2}}^{d_{k/2}} \left[(\bar{Q}_{11} \epsilon_1^2 + \bar{Q}_{22} \epsilon_2^2 + 2\bar{Q}_{12} \epsilon_1 \epsilon_2 + \bar{Q}_{66} \epsilon_6^2 + \right. \\ \left. + 2\bar{Q}_{16} \epsilon_1 \epsilon_6 + 2\bar{Q}_{26} \epsilon_2 \epsilon_6 + \bar{C}_{44} \gamma_4^2 + 2\bar{C}_{45} \gamma_4 \gamma_5 + \right. \\ \left. + \bar{C}_{55} \gamma_5^2 \right)^{(k)} + \bar{\sigma}_x^{(k)} \left(w_x^0 \cdot \frac{2}{A^2} + w_0^2 / R_1^2 \right) \\ \left. + \bar{\sigma}_y^{(k)} \left(w_y^0 / B^2 + w_0^2 / R_2^2 \right) \right] dz' \quad (31)$$

Nach Einsetzen der Deformationen, Integration über z' und anschließender Summation der Energieanteile bekommt man folgende funktionelle Abhängigkeit des elastischen Potentials:

$$\eta = \sum_{k=1}^n \eta^{(k)}(u_{,i}^{o(k)}, v_{,i}^{o(k)}, w_{,i}^o, \phi_{x,i}^{(k)}, \phi_{y,i}^{(k)}) \quad (32)$$

Die flächenbezogene kinetische Energie berechnet sich aus:

$$2T^{(k)} = \int_{-d_{k/2}}^{d_{k/2}} \rho^{(k)} \frac{\partial u_i^{(k)} \partial u_i^{(k)}}{\partial 2t^2} dz'$$

mit der funktionellen Abhängigkeit

$$T^{(k)} = \sum_{k=1}^n T^{(k)}(u_{,t}^{o(k)}, v_{,t}^{o(k)}, w_{,t}^o, \phi_{x,t}^{(k)}, \phi_{y,t}^{(k)}) \quad (33)$$

Die Energieausdrücke (32), (33) sind in dieser Form i. allg. von $f = 4n + 1$ Funktionen abhängig. Diese sind jedoch nicht alle unabhängig voneinander. Durch die Stetigkeitsbedingungen (26) erfolgt eine Reduzierung der Freiheitsgrade auf $f = 2n + 3$. Die Energieausdrücke weisen nun die folgende Abhängigkeit auf:

$$\eta = \eta(u_{,i}^{o(k)}, v_{,i}^{o(k)}, w_{,i}^o, \phi_{x,i}^{(r)}, \phi_{y,i}^{(r)}) \quad (34)$$

$$T = T(u_{,t}^{o(k)}, v_{,t}^{o(k)}, w_{,t}^o, \phi_{x,t}^{(r)}, \phi_{y,t}^{(r)})$$

Die ausführlichen Darstellungen der Ausdrücke können in [20] nachgelesen werden.

3.2.6. Annahme über die Verschiebungen der Mittelfläche

3.2.6.1. Beliebiger Verbundaufbau

Die bisher abgeleiteten Beziehungen sind von der Anzahl der Schichten im Verbund abhängig. Dies bedeutet, daß für jede Aufbauvariante neue Ausdrücke aufgestellt werden müssen. Zum anderen ist die Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen infolge der umfangreichen Ausdrücke in allgemeiner Form sehr aufwendig.

Zur Vereinfachung der Rechnung wird deshalb eine zusätzliche Annahme über die Verteilung der Mittelflächenverschiebungen der Einzelschichten über den Gesamtquerschnitt getroffen:

$$u_i^{o(k)} = U_i(x, y, t) + z_k \psi_i(x, y, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (35)$$

U_i : Verschiebungen der Bezugsfläche

ψ_i : Makrorotationen mit $\psi_z = 0$

Diese Ansätze wurden bereits in der Arbeit [3] für vielschichtige Platten verwendet. Durch Vergleich der damit erhaltenen Lösungen für ein spezielles Randwertproblem mit einer exakt elastischen Lösung konnte gezeigt werden, daß diese Ansätze eine brauchbare Näherung darstellen. Werden diese Ansätze in (24) eingesetzt, erhält man die Deformationen $\epsilon_i^{o(k)}$, $\gamma_j^{o(k)}$ in folgender

Form:

$$\epsilon_i^{o(k)} = \epsilon_i^o + z_k \bar{k}_i + z_k^2 \bar{k}_i \quad i = 1, 2, 6 \quad (36)$$

$$\gamma_j^{o(k)} = \gamma_j^o + z_k \bar{k}_j$$

Die Deformationen ϵ_i^o , γ_j^o bzw. die Krümmungen \bar{k}_i , \bar{k}_j bekommt man, wenn in den entsprechenden Ausdrücken ($\epsilon_i^{o(k)}$, $\gamma_j^{o(k)}$, $\bar{k}_i^{(k)}$, $\bar{k}_j^{(k)}$, $\kappa_j^{(k)}$) – im Anhang (A 1) angedeutet – die folgenden Ersetzungen ausgeführt werden:

$$u_{\gamma}^{o(k)}, v_{\gamma}^{o(k)} \rightarrow U_{\gamma}, V_{\gamma}$$

$$\phi_x^{(k)}, \phi_y^{(k)} \rightarrow \psi_x, \psi_y$$

bzw. gilt:

$$\begin{aligned} \bar{k}_i^{(k)} &= \bar{k}_i^{(k)} [u_j^{o(k)}, \phi_j^{(k)}], \quad \bar{k}_i^{(k)} = \bar{k}_i^{(k)} [\phi_j^{(k)}] \\ \bar{k}_i^{(k)} &= \bar{k}_i^{(k)} [U_j, \psi_j], \quad \bar{k}_i^{(k)} = \bar{k}_i^{(k)} [\psi_j] \end{aligned} \quad (37)$$

Die Deformationen eines beliebigen Abschnitts im Querschnitt der Schale nehmen mit (24) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{(k)} &= \epsilon_i^o [U_{i,(.)}] + z_k \bar{k}_i [U_{i,(.)}, \psi_{i,(.)}] + z_k^2 \bar{k}_i [\psi_{i,(.)}] \\ &+ z' \bar{k}_i^{(k)} [u_{i,(.)}^{o(k)}, \phi_{i,(.)}^{(k)}] + z'^2 \bar{k}_i^{(k)} [\phi_{i,(.)}^{(k)}] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\gamma_j^{(k)} = \gamma_j^o [U_{i,(.)}, \psi_{i,(.)}] + z_k \bar{k}_j [\psi_{i,(.)}] + z' \kappa_j^{(k)} [\phi_{i,(.)}^{(k)}]$$

Anhand dieser Beziehungen ist ersichtlich, daß die Deformationen $\epsilon_i^{(k)}$ noch von den Ableitungen der Verschiebungskomponenten in den Mittelflächen der Schichten ($u_i^{(k)}$) abhängig sind. Diese Abhängigkeit entsteht durch die Nichtlinearität der Beziehungen.

Um die Deformationen als Funktion der Verschiebungskomponenten der Bezugsfläche (U_i), der Makrorotationen (ψ_i) und der Mikrorotationen ($\phi_i^{(k)}$) zu erhalten, muß der Ansatz (35) in $\bar{k}_i^{(k)}$ eingesetzt werden. Dabei erhält man folgende Beziehung:

$$\bar{k}_i^{(k)} = \bar{k}_i^{1(k)} [U_{i,(.)}, \phi_{i,(.)}^{(k)}] + z_k \bar{k}_i^{2(k)} [\phi_{i,(.)}^{(k)}, \psi_{i,(.)}] \quad (39)$$

wobei die Koeffizienten durch folgende Ersetzungen aus den Beziehungen von (A 1) für $\bar{k}_i^{(k)}$ zu erhalten sind:

$$\begin{aligned} \bar{k}_i^{1(k)} &: u_i^{o(k)} \rightarrow U_i \\ \bar{k}_i^{1(k)} &= \bar{k}_i^{(k)} [U_{i,(.)}, \phi_{i,(.)}^{(k)}] \end{aligned} \quad (40)$$

Die \bar{k}_i sind im Anhang (A 2) dargestellt.

Durch den Ansatz (35) werden die Stetigkeitsbedingungen modifiziert, diese lauten jetzt:

$$\psi_i = m_k \phi_i^{(k)} + m_{k+1} \phi_i^{(k+1)} \quad (41)$$

mit

$$m_k = d_k / (d_k + d_{k+1}), \quad m_{k+1} = 1 - m_k$$

Diese Beziehung liefert einen Zusammenhang von Mikro- und Makrorotationen.

Werden die Stetigkeitsbedingungen in dieser Form unter Beachtung von (35), (38) und (39) in den allgemeinen Ausdruck für die Energie (32) eingesetzt, bekommt man die Gesamtenergie in Abhängigkeit von $f = 7$ unabhängigen Funktionen:

$$\eta = \eta (U_{\gamma}, V_{\gamma}, w_{\gamma}^o, \psi_{x,(.)}, \psi_{y,(.)}, \phi_{x,(.)}^{(r)}, \phi_{y,(.)}^{(r)}) \quad (42)$$

wobei der Index (r) auf eine beliebige Schicht $k = r$ hinweist. In diesem Energieausdruck werden sowohl die Schereffekte (ψ_i , ϕ_i), als auch der Einfluß der Mikrostruktur im Sinne der Schichtenanordnung berücksichtigt. Die zu lösende Variationsaufgabe ist nicht mehr abhängig von der Anzahl der Schichten (n).

3.2.6.2. Spezialisierung auf Schalenverbunde mit zwei unterschiedlichen Schichtarten

Es wird angenommen, daß der Verbund aus zwei unterschiedlichen Schichtarten aufgebaut ist; dies entspricht dem Aufbau des Radialreifengürtels. Dabei sollen sich $k = n_1$ Verstärkungsschichten (Index 1) und $k = n_2$ Zwischenschichten (Index 2) abwechseln. Die Schichtarten 1 und 2 sollen die gleichen Dicken d_1 bzw. d_2 aufweisen. Unter diesen Voraussetzungen folgt aus den Stetigkeitsbedingungen (41):

$$\begin{aligned} \phi_i^{(k)} &= \phi_i^{(1)} & k: \text{Verstärkungsschichten} \\ \phi_i^{(k+1)} &= \phi_i^{(2)} & k+1: \text{Zwischenschichten,} \end{aligned} \quad (43)$$

d. h. die Rotationen der Querschnitte sind für die einzelnen Schichtarten gleich.

Als Resultat dieser Bedingungen kann jetzt die Summation im Energieausdruck über die Schichten (k) unterteilt werden in die Summe über die Schichten 1 und 2.

Die allgemeine Form des Energieausdrucks (32) lautet nunmehr unter Berücksichtigung des Ansatzes (35)

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{k=1}^{n_1} \eta^{(k)} (U_{\gamma}, V_{\gamma}, w_{\gamma}^o, \psi_{x,(.)}, \psi_{y,(.)}, \phi_{x,(.)}^{(1)}), \\ &+ \sum_{k=1}^{n_2} \eta^{(k)} (U_{\gamma}, V_{\gamma}, w_{\gamma}^o, \psi_{x,(.)}, \\ &\psi_{y,(.)}, \phi_{x,(.)}^{(2)}, \phi_{y,(.)}^{(2)}) \end{aligned} \quad (44)$$

Infolge der Stetigkeitsbedingungen sind nicht alle Funktionen unabhängig voneinander.

Für die getroffenen Voraussetzungen, die in den Beziehungen (43) resultieren, lauten diese:

$$\psi_i = m_1 \phi_i^{(1)} + m_2 \phi_i^{(2)} \quad (45)$$

$$m_1 = d_1 / (d_1 + d_2), \quad m_2 = 1 - m_1$$

bzw.

$$\phi_i^{(2)} = \frac{1}{m_2} (\psi_i - m_1 \phi_i^{(1)}) \quad (46)$$

Unter Verwendung der Beziehung (46) können die Koeffizienten im Energieausdruck (44), die von der Schichtart (2) abhängen, in folgender Weise dargestellt werden:

$$k_i^{11(2)} = \frac{1}{m_2} \left(\frac{1}{k_i} - m_1 \frac{11(1)}{k_i} \right)$$

$$k_i^{12(2)} = \frac{1}{m_2} \left(k_i [\psi_j] - m_1 \frac{12(1)}{k_i} \right) \quad (47)$$

wobei $k_i^{12} [\psi_j]$ bedeutet, daß in $k_i^{12(k)}$ (vgl. A 2) die Mikrorotationen durch die entsprechenden Makrorotationen zu ersetzen sind. Dabei erhält man durch Vergleich von (A 2) und (A 1) unter Berücksichtigung von (37) die Beziehung

$$k_i^{12} [\psi_j] = 2 \frac{2}{k_i} \quad (48)$$

Für die Koeffizienten $k_i^{2(2)}$ und $\kappa_j^{(2)}$ lassen sich infolge der quadratischen Terme keine allgemeinen Beziehungen angeben, dort muß jeweils $\phi_i^{(2)}$ eingesetzt werden.

Nach Ausführung dieser Ersetzungen erhält man den Energieausdruck in folgender Abhängigkeit:

$$\eta = \eta (U_{(.)}, V_{(.)}, w_{(.)}^0, \psi_{x,(.)}, \psi_{y,(.)}, \phi_{x,(.)}^{(1)}, \phi_{y,(.)}^{(1)}) \quad (49)$$

Somit kann nunmehr die Lösung der Variationsaufgabe, entweder unter Verwendung der Beziehung (44), wobei die Stetigkeitsbedingungen durch die Methode der Lagrangeschen Parameter erfüllt werden müssen, oder die Beziehung (49), die nur noch unabhängige Funktionen enthält, erfolgen.

3.2.7. Zur Lösungstheorie

Unter Anknüpfung an die Ausführungen aus Kap. 3.2.4. wird das zu lösende elastische Problem in Form einer Variationsaufgabe formuliert. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen wird das Hamiltonsche Variationsprinzip verwandt:

$$\sigma \int_{t_0}^t \int_A L \alpha \beta dx dy dt + \int_{t_0}^t \eta_a dt = 0 \quad (50)$$

mit $L = T - \eta$

η_a bedeutet die Energie der äußeren Kräfte, die auf der Oberfläche A bzw. den Rändern l wirken. Den Aus-

druck dafür bekommt man durch Ersetzen von $dy \rightarrow \beta dy$, $dx \rightarrow \alpha dx$ im entsprechenden Ausdruck in der Arbeit [3]. Die Lösung ist auf prinzipiell unterschiedlichen Wegen möglich; entweder durch sog. „direkte Methoden“, wie z. B. das Ritzsche Verfahren und die Galerkinsche Methode, die auf dem Energieausdruck basieren, oder über ein partielles DGL-System, welches aus den Eulerschen DGLen folgt. Dabei wird die integrale Formulierung der Aufgabe (50) durch die äquivalente differentielle ersetzt:

$$\sum_{r=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_r} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_r} \right)} - \sum_{k=1}^l (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial q^k} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial^k p_i}{\partial q_r^k} \right)} - \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0 \quad (51)$$

mit q_r : krummlinige Koordinaten x, y und t

p_i : unabhängige Funktionen u, v, w

l : höchste Ordnung der Ableitungen in L

Zusätzlich müssen die Randbedingungen erfüllt werden, die z. B. aus der partiellen Integration von (50) erhalten werden können. Auf Grund des beträchtlichen Umfangs der entsprechenden Ableitungen der Lagrangefunktion und des daraus resultierenden DGL-Systems wird auf die Angabe verzichtet.

3.3. Spezialisierung der allgemeinen Theorie für Rotationsschalen

Entsprechend der Zielstellung, die die deformationsmechanische Charakterisierung des Radialreifengürtels beinhaltet, wird die allgemeine Theorie für reifenähnliche Rotationsschalen spezialisiert.

Dazu wird das in Bild 4 dargestellte geometrische Modell benutzt. Es bedeuten R_1 und R_2 die Krümmungsradien der Umfangs- bzw. Meridianrichtung; r stellt den Abstand eines beliebigen Punktes zur Rotationsachse des Reifens dar, Θ und φ bezeichnen die Koordinatenlinien in Meridian- bzw. Umfangsrichtung. Anstelle der allgemeinen krummlinigen Koordinaten (q^1, q^2, q^3) von Abschn. 2 stehen jetzt Θ, φ, z als Koordinatenlinien.

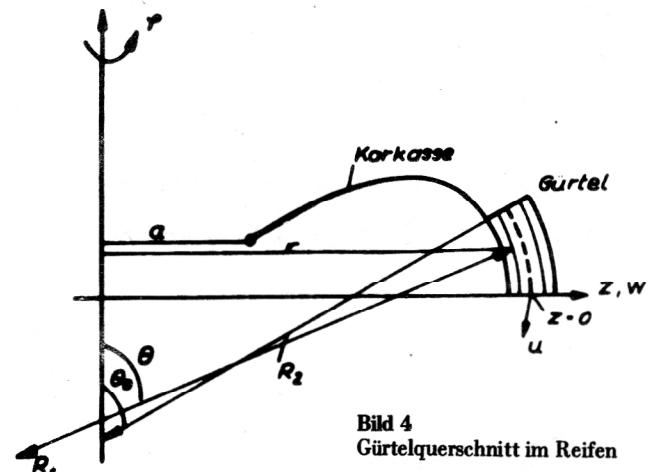


Bild 4
Gürtelquerschnitt im Reifen

Damit erhält man für die Lamé'schen Konstanten mittels der geometrischen Beziehungen aus Bild 4

$$\begin{aligned} A &= R_1 \\ B &= R_2 \quad \sin \Theta = r \end{aligned} \quad (52)$$

Wird die Bogenlänge eines Meridianabschnitts eingeführt

$$ds = R_1 d\Theta \quad (53)$$

kann man die Ableitungen nach den Koordinaten (Θ, φ) wie folgt darstellen:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \Theta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \quad (54)$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Werden die Beziehungen von Codazzi (vgl. [5]) angewandt, bekommt man weiterhin:

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \Theta} (\cdot) &\rightarrow \frac{1}{r} (\cdot) \cos \Theta \\ \frac{\partial A}{\partial \Theta} &= 0 \end{aligned} \quad (55)$$

Nach Einsetzen der Beziehungen (52) – (55) in (21) unter Berücksichtigung von (6), ergeben sich die Deformationen für Rotationsschalen.

Die weitere Ableitung erfolgt entsprechend der in den Kap. 3.1. und 3.2. dargestellten Methode. Dabei sind in allen Gleichungen die Beziehungen (52) – (55) zu berücksichtigen.

4. Zusammenfassung und Ausblick

In vorliegender Arbeit wurde eine Theorie zur Berechnung mehrschichtiger Schalen abgeleitet. Besonderes Gewicht wurde auf die Berücksichtigung von lokalen, d. h. auf eine Schicht bezogenen, Einflüssen gelegt. Desweiteren wurden Schereffekte, die vor allem bei hohen Modulunterschieden der Schichten von Bedeutung sind, mittels der Mikro- bzw. Makrorotation berücksichtigt. Ausgangspunkt der Ableitung stellen lineare Verschiebungsansätze innerhalb der $k = n$ Schichten dar, wobei lokale Mittelflächenverschiebungen und Rotationen der Querschnitte eingehen.

Diese Ansätze werden in die nichtlinearen Beziehungen für die Deformationen eingesetzt.

Das elastische Potential erhält man unter Berücksichtigung des Hookeschen Gesetzes und der Beziehungen für die Deformationen. Im allgemeinen Fall ist es von $f = 4n + 1$ (Funktionen) Freiheitsgraden abhängig. Durch Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen erfolgt eine Reduzierung der Freiheitsgrade auf $f = 2n + 3$. Dabei ist das elastische Potential von der Anzahl der Schichten abhängig. Um eine von der Schichtenanzahl unabhängige Darstellung zu erreichen, wird für die Mittelflächenverschiebungen der Einzelschichten eine lineare Verteilung über den Gesamtquerschnitt angenommen. Damit reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf $f = 7$, d. h. auf die Verschiebungen der Bezugsfläche (U, V, w^o) , die Mikrorotationen $(\phi_x^{(r)}, \phi_y^{(r)})$ und die Makrorotationen (ψ_x, ψ_y) .

Auf dieser Grundlage wurde die Berechnung der potentiellen Energie für Schichtverbunde, bestehend aus zwei Schichtarten, ausgeführt. Dieser Ausdruck stellt die Grundlage zur Lösung beliebiger Randwertprobleme dar. Die Lösung kann entweder über die aus den Eulerschen DGLen folgenden Gleichgewichtsbedingungen oder über direkte Methoden, die vom Energieausdruck ausgehen, erfolgen. Zur Einschätzung der Güte des vorgeschlagenen Modells bzw. zum Vergleich der Lösungen mit denen anderer Arbeiten werden noch spezielle Randwertprobleme erarbeitet werden müssen.

Insbesondere muß überprüft werden, inwieweit die Annahme bzgl. der Makrorotationen (35) im Bereich großer Verformungen gültig ist. Weitere Arbeiten müßten auf die Einbeziehung des abgeleiteten Energieausdrucks in ein geeignetes Modell zur Berechnung von Radialreifen gerichtet werden. Die Berechnungen müßten das Ziel verfolgen, neben rotationssymmetrischer Belastung (Innendruck, Zentrifugalkräfte) auch die unsymmetrische Belastung beim Abrollvorgang zu behandeln.

Anhang

Anhang A 1

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{o(k)} &= \frac{1}{A} u_{,x}^{o(k)} + \frac{v^{o(k)}}{AB} A_{,y} + \frac{w^{o(k)}}{R_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{A} u_{,x}^{o(k)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{v^{o(k)}}{AB} A_{,y} + \frac{w^{o(k)}}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{A} v_{,x}^{o(k)} - \frac{1}{AB} A_{,y} u^{o(k)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{A} w_{,x}^{o(k)} - \frac{u^{o(k)}}{R_1} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_1} &= \frac{1}{A} \phi_{x,x}^{(k)} + \frac{\phi_y^{(k)}}{AB} A_{,y} + \left(\frac{1}{A} u_{,x}^{o(k)} + \frac{1}{AB} A_{,y} v^{o(k)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{w^{o(k)}}{R_1} \right) \left(\frac{1}{A} \phi_{x,x}^{(k)} + \frac{1}{AB} A_{,y} \phi_y^{(k)} \right) + \left(\frac{1}{A} v_{,x}^{o(k)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{AB} A_{,y} v^{o(k)} \right) \left(\frac{1}{A} \phi_{y,x}^{(k)} - \frac{1}{AB} A_{,y} \phi_y^{(k)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{A} w_{,x}^{o(k)} - \frac{u^{o(k)}}{R_1} \right) \left(-\frac{\phi_x^{(k)}}{R_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{k_1} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{A} \phi_{x,x}^{(k)} + \frac{\phi_y}{AB} A_{,y} \right)^2 + \left(\frac{1}{A} \phi_{y,x}^{(k)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\phi_x^{(k)}}{AB} A_{,y} \right)^2 + \left(\frac{\phi_x^{(k)}}{R_1} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_5^o = \gamma_{13}^o(k) &= \phi_x^{(k)} + \frac{1}{A} w_{,x}^o - \frac{u^o(k)}{R_1} + \left(\frac{1}{A} u_{,x}^o(k) \right. \\ &+ \left. \frac{v^o(k)}{AB} A_{,y} + \frac{w^o}{R_1} \right) \phi_x^{(k)} + \left(\frac{1}{A} v_{,x}^o(k) \right. \\ &- \left. \frac{u^o(k)}{AB} A_{,y} \right) \phi_y \\ \kappa_5^{(k)} &= \frac{\phi_x^{(k)}}{R_1} + \left(\frac{1}{A} \phi_{x,x}^{(k)} + \phi_y^{(k)} \frac{A_{,y}}{AB} \right) \phi_x^{(k)} + \left(\frac{1}{A} \phi_{y,x}^{(k)} \right. \\ &- \left. \phi_x^{(k)} \frac{A_{,y}}{AB} \right) \phi_y^{(k)} \end{aligned}$$

Anhang A 2

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{1}{k} \frac{1}{k} &= \left(\frac{1}{A} \psi_{x,x} + \frac{\psi_y}{AB} A_{,y} \right) \left(\frac{1}{A} \phi_{x,x}^{(k)} + \phi_y^{(k)} \frac{A_{,y}}{AB} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{A} \psi_{y,x} - \frac{\psi_y}{AB} A_{,y} \right) \left(\frac{1}{A} \phi_{y,x}^{(k)} - \phi_y^{(k)} \frac{A_{,y}}{AB} \right) + \frac{\psi_x}{R_1^2} \phi_x^{(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{1}{k} \frac{1}{k} &= \left(\frac{1}{B} \psi_{x,y} - \psi_y \frac{B_{,x}}{AB} \right) \left(\frac{1}{B} \phi_{x,y}^{(k)} - \phi_y^{(k)} \frac{B_{,x}}{AB} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{B} \psi_{y,y} + \psi_x \frac{B_{,x}}{AB} \right) \left(\frac{1}{B} \phi_{y,y}^{(k)} + \phi_x^{(k)} \frac{B_{,x}}{AB} \right) \\ &+ \frac{\psi_y}{R_2^2} \phi_y^{(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \frac{1}{k} \frac{1}{k} &= \left(\frac{1}{A} \psi_{x,x} + \psi_y \frac{A_{,y}}{AB} \right) \left(\frac{1}{B} \phi_{x,y}^{(k)} - \phi_y^{(k)} \frac{B_{,x}}{AB} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{B} \psi_{x,y} - \frac{\psi_y}{AB} B_{,x} \right) \left(\frac{1}{A} \phi_{x,x}^{(k)} + \frac{\phi_y^{(k)}}{AB} A_{,y} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{A} \psi_{y,x} - \frac{\phi_x^{(k)}}{AB} A_{,y} \right) \left(\frac{1}{B} \phi_{y,y}^{(k)} + \frac{\phi_x^{(k)}}{AB} B_{,x} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{B} \psi_{y,y} + \frac{\psi_x}{AB} B_{,x} \right) \left(\frac{1}{A} \phi_{y,x}^{(k)} - \frac{\phi_x^{(k)}}{AB} A_{,y} \right) \\ &+ \frac{\psi_x \phi_y^{(k)}}{R_1 R_2} + \frac{\psi_y \phi_x^{(k)}}{R_1 R_2} \end{aligned}$$

LITERATUR

- [1] Barthel, R., Lauke, B.: Preprint, Problemseminar „Konstruieren mit verstärkten Plasten“, TU Dresden 4/1977.
- [2] Lauke, B., Barthel, R.: Technische Mechanik 4 (1983) 3.
- [3] Lauke, B., Barthel, R.: Technische Mechanik 4 (1983) 4.
- [4] Lauke, B.: Dissertation, AdW der DDR, Berlin 1979.
- [5] Sokolnikow, I.S.: „Tensor analysis theory and applications to geometry and mechanics of continua“, J. Wiley Co Sons, 1964.
- [6] Duda, A.: Diss. B., TU Dresden 1976.
- [7] Bert, C.W.: AIAA Journ., 12 (1974) 9, S. 1173.
- [8] Bolotin, V. V., Novickov, Ju., N.: „Mechanik mehrschichtiger Konstruktionen“, Moskau 1980.
- [9] Altenbach, H., Shilin, Z.: Technische Mechanik 3 (1982) 2, S. 23.
- [10] Gerstein, M.S.: Mechanika Polimerov, 1973, 5, S. 891.
- [11] Libresku, L.: Mechanika Polimerov, 1975, 6, S. 1038.
- [12] Grigorenko, Ju. M., Vasilenko, A.T., Golub, G.P.: Pankratova, Mechanika Komp. Mat. (1982) 2, S. 253.
- [13] Fotinic, O.V. In: „Mechanika pnevmaticheskich sin“, Institut sinnoi promy, Moskva 1974.
- [14] Lechnickij, S.G.: „Anisotropnye plastinki“, Moskva 1957.
- [15] Ashton, J.E., Whitney, J.M.: „Theory of Laminated Plates“, Technomic Publishing Co. 1970.
- [16] Langhaar, H.L.: „Energy Methods in Applied Mechanics“ J. Wiley, New York, 1962.
- [17] Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity“, Pergamon Press, 1974.
- [18] Ainola, L.J.: Prikladnaja matematika in mechanika, 32 (1968), S. 154.
- [19] Biot, M.A.: Journ. of Math. and Mech. 12 (1963) S. 793.
- [20] Forschungsbericht ITF Dresden, „Deformationsmechanisches Verhalten von Glaskord-Elastomerverbunden“, 1979.

Anschrift der Verfasser:

Dr. rer. nat. Bernd Lauke
 Prof. Dr. sc. nat. Rolf Barthel
 Institut für Technologie der Fasern Dresden
 der Akademie der Wissenschaften der DDR
 8012 Dresden
 PSF 411