

Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren für Eckrisse mit Hilfe von Verschiebungsansätzen

Joachim Nickel

1. Einleitung

In der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) dient der Spannungsintensitätsfaktor als Beurteilungsgröße für das stabile oder instabile Risßwachstum. Für ebene Probleme ist eine Vielzahl von Spannungsintensitätsfaktoren bekannt. Weitaus größere Schwierigkeiten bereitet die Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren für räumliche Probleme. Ihre praktische Bedeutung ist jedoch sehr groß, und speziell Oberflächen- und Eckrisse treten häufig in Konstruktionen auf.

Im folgenden wird ein Verfahren zur näherungsweise Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren für Eckrisse mit kreisbogenförmiger Risßfront und beliebigem Winkel $2\psi_0$ (Bild 1) vorgestellt. Hierbei wird von Verschiebungsansätzen ausgegangen. Die so gewonnenen Resultate stimmen gut mit Ergebnissen überein, die mit anderen Methoden für spezielle ψ_0 erhalten wurden.

2. Berechnungsmodell und Grundgleichungen

Als Berechnungsmodell dient ein Körper, der durch zwei ebene spannungsfreie Oberflächen begrenzt ist und der an der Kante, an der sich diese Oberflächen treffen, einen Eckrisß in Form eines Kreissektors hat (Bild 1).

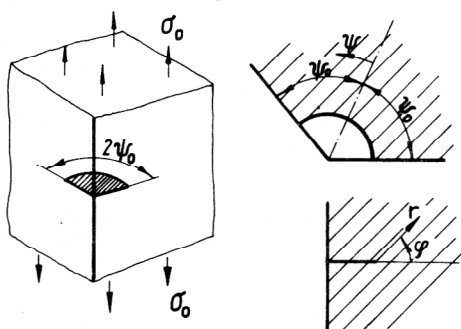


Bild 1

Die restlichen Abmessungen des Berechnungsmodells werden als unendlich angenommen. Die Berechnungen sind auf die Bestimmung des Spannungsintensitätsfaktors für die Risßöffnungsart I beschränkt, als Belastung wird eine konstante Spannung σ_0 senkrecht zur Risßebene benutzt. Auf die Gültigkeitsgrenzen der Ergebnisse, die sich aus diesen Annahmen ergeben, wird später eingegangen.

In Bild 1 sind die Koordinaten r, φ, ψ dargestellt. Um mit dimensionslosen Größen zu rechnen, werden im

weiteren die Koordinate r und die Verschiebungen auf die Risßtiefe a bezogen

$$\rho = \frac{r}{a} \quad v_\rho^* = \frac{v_\rho}{a} \quad v_\varphi^* = \frac{v_\varphi}{a} \quad v_\psi^* = \frac{v_\psi}{a} \quad (1)$$

Weiterhin soll gelten

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{G} \quad \tau_{ij}^* = \frac{\tau_{ij}}{G} \quad (2)$$

Damit ergeben sich die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen

$$\epsilon_\rho = v_{\rho,\rho}^* \quad \epsilon_\varphi = \frac{1}{\rho} (v_{\varphi,\varphi}^* + v_\rho^*)$$

$$\epsilon_\psi = \frac{1}{1 + \rho \cos \varphi} (v_{\psi,\psi}^* + \cos \varphi \cdot v_\rho^* - \sin \varphi \cdot v_\varphi^*) \quad (3)$$

$$\gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho} (v_{\rho,\varphi}^* + \rho \cdot v_{\varphi,\rho}^* - v_\varphi^*)$$

$$\gamma_{\rho\psi} = \frac{1}{1 + \rho \cos \varphi} [v_{\rho,\psi}^* + (1 + \rho \cos \varphi) v_{\psi,\rho}^* - \cos \varphi \cdot v_\psi^*]$$

$$\gamma_{\varphi\psi} = \frac{1}{1 + \rho \cos \varphi} (v_{\varphi,\psi}^* + \frac{1 + \rho \cos \varphi}{\rho} v_{\psi,\varphi}^* + \sin \varphi \cdot v_\psi^*)$$

Das Hookesche Gesetz lautet

$$\sigma_\rho^* = 2\epsilon_\rho + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\epsilon_\rho + \epsilon_\varphi + \epsilon_\psi) \quad \tau_{\rho\varphi}^* = \gamma_{\rho\varphi}$$

$$\sigma_\varphi^* = 2\epsilon_\varphi + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\epsilon_\rho + \epsilon_\varphi + \epsilon_\psi) \quad \tau_{\rho\psi}^* = \gamma_{\rho\psi} \quad (4)$$

$$\sigma_\psi^* = 2\epsilon_\psi + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\epsilon_\rho + \epsilon_\varphi + \epsilon_\psi) \quad \tau_{\varphi\psi}^* = \gamma_{\varphi\psi}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen erhalten die Form

$$\rho(1 + \rho \cos \varphi) \sigma_{\rho,\rho}^* + (1 + 2\rho \cos \varphi) \sigma_\rho^* - (1 + \rho \cos \varphi) \sigma_\varphi^*$$

$$- \rho \cos \varphi \sigma_{\psi,\psi}^* - \rho \sin \varphi \tau_{\rho\varphi}^* + (1 + \rho \cos \varphi) \tau_{\rho\varphi,\varphi}^*$$

$$+ \rho \tau_{\rho\psi,\psi}^* = 0$$

$$(1 + \rho \cos \varphi) \sigma_{\varphi,\varphi}^* - \rho \sin \varphi \sigma_\varphi^* + \rho \sin \varphi \sigma_\psi^*$$

$$+ (2 + 3\rho \cos \varphi) \tau_{\rho\varphi}^* + \rho(1 + \rho \cos \varphi) \tau_{\rho\varphi,\rho}^* \quad (5)$$

$$+ \rho \tau_{\varphi\psi,\psi}^* = 0$$

$$\rho \sigma_{\psi, \psi}^* + \rho(1 + \rho \cos \varphi) \tau_{\rho \psi, \rho}^* + (1 + 3\rho \cos \varphi) \tau_{\rho \psi}^* - 2\rho \sin \varphi \tau_{\varphi \psi}^* + (1 + \rho \cos \varphi) \tau_{\varphi \psi, \varphi}^* = 0$$

3. Verschiebungsansätze

Die verwendeten Verschiebungsansätze lauten

$$\begin{aligned} v_{\rho}^* &= \sum_k \rho^{\frac{k}{2}} \cdot (1 + \rho \cos \varphi)^{1 - \frac{k}{2}} f_k(\varphi, \psi) \\ v_{\varphi}^* &= \sum_k \rho^{\frac{k}{2}} \cdot (1 + \rho \cos \varphi)^{1 - \frac{k}{2}} g_k(\varphi, \psi) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ v_{\psi}^* &= \sum_k \rho^{\frac{k}{2}} \cdot (1 + \rho \cos \varphi)^{1 - \frac{k}{2}} h_k(\varphi, \psi) \end{aligned} \quad (6)$$

Sie wurden unter folgenden Gesichtspunkten gewählt:

1. In unmittelbarer Nähe der Risf Spitze (singuläres Glied für die Komponenten des Spannungstensors) ergibt sich die richtige Abhängigkeit von ρ und φ (vgl. auch [1]).
2. Für $\rho \rightarrow \infty$ klingen in der Ebene $\varphi = 0$ die Spannungen auf konstante Werte ab.
3. Die Ansätze (6) führen auf relativ einfache, aus (5) folgende Differentialgleichungssysteme.

Es muß jedoch auch vermerkt werden, daß die Ansätze

(6), die eine $\rho^{\frac{1}{2}}$ -Singularität für die Spannungen σ_{ρ}^* , σ_{φ}^* , σ_{ψ}^* , $\tau_{\rho \varphi}^*$ ergeben und in denen eine Separation von ρ und ψ vorgenommen wurde, in unmittelbarer Umgebung der Risf Spitze zu einem ebenen Verzerrungszustand führen. Das ist zwar an der Risf Spitze im Innern eines Bauteils richtig, führt aber zu Widersprüchen an der Stelle, an der der Riß in die Oberfläche mündet. Das hat Konsequenzen für die Erfüllung der Randbedingungen für $\psi = \pm \psi_0$.

4. Differentialgleichungssystem zur Berechnung der Verschiebungsfunktionen

Das Einsetzen von (6) in (3) liefert die Verzerrungen, aus (4) folgen die Spannungen, und (5) führt auf folgendes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_k \left\langle \left\{ f_{k, \varphi \varphi} + \left(\frac{k^2}{4} - 1 \right) (2 + \lambda) f_k + \left[\frac{k}{2} - 3 + \lambda \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \right] g_{k, \varphi} \right\} \eta^{\frac{k}{2} - 1} \right. \\ + \left\{ \left[1 + \frac{5}{2} k - k^2 + \lambda \left(1 + k - \frac{k^2}{2} \right) \right] \cos \varphi f_k + (k - 3) \sin \varphi f_{k, \varphi} \right. \\ \left. + \left[3 - 2k + \frac{k^2}{4} + \lambda \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 2 \right) \right] \sin \varphi g_k + \left(1 - \frac{k}{2} \right) (1 + \lambda) \cos \varphi g_{k, \varphi} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \left. \frac{k}{2} (1 + \lambda) h_{k, \psi} \eta^{\frac{k}{2}} \right\} \\ + \left\{ k \left(\frac{k}{4} - 1 \right) (2 + \lambda) \cos^2 \varphi f_k + \left(\frac{k}{2} - 1 \right)^2 \sin^2 \varphi f_k + f_{k, \psi \psi} \right. \\ + \left. 1 + k - \frac{k^2}{4} + \lambda \frac{k}{2} \left(2 - \frac{k}{2} \right) \sin \varphi \cos \varphi g_k \right. \\ \left. - \left(2 + \frac{k}{2} + \lambda \frac{k}{2} \right) \cos \varphi h_{k, \psi} \right\} \eta^{\frac{k}{2} + 1} \rangle = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \left\langle \left\{ (2 + \lambda) g_{k, \varphi \varphi} + \left(\frac{k^2}{4} - 1 \right) g_k + \left[3 + \frac{k}{2} + \lambda \left(1 + \frac{k}{2} \right) \right] f_{k, \varphi} \right\} \eta^{\frac{k}{2} - 1} \right. \\ + \left\{ \left[-2 \left(\frac{k}{2} - 1 \right)^2 + \lambda \left(\frac{k}{2} - 2 \right) \right] \cos \varphi g_k + (k - 3) (2 + \lambda) \sin \varphi \cdot g_{k, \varphi} \right. \\ + \left[-6 + \frac{3}{2} k + \frac{k^2}{4} + \lambda \left(-3 + \frac{k}{2} + \frac{k^2}{4} \right) \right] \sin \varphi f_k + \left(2 - \frac{k}{2} \right) (1 + \lambda) \cos \varphi f_{k, \varphi} \\ \left. + (1 + \lambda) h_{k, \varphi \psi} \eta^{\frac{k}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \left\{ k \left(\frac{k}{2} - 2 \right) \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right) \sin^2 \varphi g_k + \left(\frac{k}{2} - 1 \right)^2 \cos^2 \varphi g_k + g_{k, \psi \psi} \right. \\ \left. + \left[1 + k - \frac{k^2}{4} + \lambda \frac{k}{2} \left(2 - \frac{k}{2} \right) \right] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \left. \sin \varphi \cos \varphi f_k + \left(2 + \frac{k}{2} + \lambda \frac{k}{2} \right) \sin \varphi h_{k, \psi} \right\} \eta^{\frac{k}{2} + 1} \right\rangle = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_k \left\langle \left\{ h_{k, \varphi \varphi} + \frac{k^2}{4} h_k \right\} \eta^{\frac{k}{2} - 1} \right. \\ + \left\{ \frac{k}{2} (3 - k) \cos \varphi \cdot h_k - (3 - k) \sin \varphi h_{k, \varphi} + \left(1 + \frac{k}{2} \right) (1 + \lambda) f_{k, \psi} \right. \\ \left. + (1 + \lambda) g_{k, \varphi \psi} \right\} \eta^{\frac{k}{2}} \\ + \left\{ k \left(\frac{k}{4} - 1 \right) h_k + \left[4 - \frac{k}{2} + \lambda \left(2 - \frac{k}{2} \right) \right] (\cos \varphi \cdot f_{k, \psi} - \sin \varphi \cdot g_{k, \psi}) \right. \\ \left. + (2 + \lambda) h_{k, \psi \psi} \right\} \eta^{\frac{k}{2} - 1} \right\rangle = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

Darin bedeuten

$$\lambda = \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \quad (10)$$

und

$$\eta = \frac{\rho}{1 + \rho \cdot \cos \varphi} \quad (11)$$

Die Gleichungen (7) ... (9) haben zwei voneinander unabhängige Lösungsgruppen

1. für geradzahlige k ($k = 0, 2, 4, 6, \dots$)
2. für ungeradzahlige k ($k = 1, 3, 5, \dots$).

Das weitere Vorgehen besteht darin, den Näherungslösungen für den kreisförmigen Innenriß in einem unendlich ausgedehnten Körper eine zweite Lösung zu überlagern, die es erlaubt, die Randbedingungen an den freien Oberflächen näherungsweise zu erfüllen. Dabei werden die Betrachtungen auf einen unendlich schmalen Keil ($\varphi \rightarrow 0$) beschränkt.

5. Lösung für den kreisförmigen Innenriß in einem unendlich ausgedehnten Körper

Die exakte Lösung für den kreisförmigen Innenriß in einem unendlich ausgedehnten Körper ist bekannt [2]. Für den Spannungsintensitätsfaktor erhält man

$$K_{10} = \frac{2}{\pi} \sigma_o \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (12)$$

Um mit dem Ansatz (6) den Spannungszustand näherungsweise zu beschreiben, werden die Reihenglieder mit $k = 0$ und 2 bzw. mit $k = 1, 3$ und 5 berücksichtigt. Damit ist es möglich, das Dgl.-System (7) ... (9) für die Ebene $\varphi = 0$ zu erfüllen. Die Bestimmung der Integrationskonstanten erfolgt so, daß in Anlehnung an die Lösung des ebenen Problems die geradzahigen k die Spannungen $\sigma_{\rho o}^* (\varphi = 0) = \sigma_{\psi o}^* (\varphi = 0) = -\sigma_o^*$ und $\sigma_{\varphi o}^* (\varphi = 0) = 0$ ergeben. Das singuläre Glied ($k = 1$) wird der exakten Lösung (12) angepaßt, und für $\rho \rightarrow \infty$ werden $\sigma_{\rho}^* (\varphi = 0, \rho \rightarrow \infty) = \sigma_{\psi}^* (\varphi = 0, \rho \rightarrow \infty) = 0$ und $\sigma_{\varphi}^* (\varphi = 0, \rho \rightarrow \infty) = +\sigma_o^*$. Die Randbedingungen an den Rißflächen ($\varphi = \pm \pi$) werden für die Spannungsglieder mit $\eta^{-\frac{1}{2}}$ und η^0 erfüllt.

Mit $\nu = 0,3$ ergeben sich damit für die Ebene $\varphi = 0$ die Spannungen

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^* &= \sigma_o^* \left[\frac{\sqrt{2}}{\pi} \eta^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{6}{5} - \frac{38\sqrt{2}}{25\pi} \right) \eta^{+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{13\sqrt{2}}{25\pi} \right) \eta^{+\frac{3}{2}} - 1 \right] \\ \sigma_{\varphi}^* &= \sigma_o^* \left[\frac{\sqrt{2}}{\pi} \eta^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{82}{65} - \frac{42\sqrt{2}}{25\pi} \right) \eta^{+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{17}{65} + \frac{17\sqrt{2}}{25\pi} \right) \eta^{+\frac{3}{2}} \right] \\ \sigma_{\psi}^* &= \sigma_o^* \left[\frac{3\sqrt{2}}{5\pi} \eta^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{48}{65} + \frac{2\sqrt{2}}{25\pi} \right) \eta^{+\frac{1}{2}} + \left(\frac{17}{65} - \frac{17\sqrt{2}}{25\pi} \right) \eta^{+\frac{3}{2}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

6. Lösung für den Eckriß

Um für den Eckriß nach Bild 1 die Randbedingungen bei $\psi = \pm \psi_o$ näherungsweise erfüllen zu können, wird der Lösung für das rotationssymmetrische Modell des Innenrisses eine zweite Lösung überlagert. Die nunmehr von ψ abhängigen Größen werden mit $\tilde{\sigma}_{\rho}^*, \tilde{\sigma}_{\varphi}^*, \tilde{\sigma}_{\psi}^*, \tilde{\tau}_{\rho\psi}^*$ bezeichnet.

Unter Verwendung der Reihenglieder $k = 1, 3$ und 5 folgt aus (5) für die Ebene $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\rho}^* &= 4 \tilde{f}_{11} \cdot \eta^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{27}{4} \tilde{f}_3 + \frac{3}{2} \tilde{g}_{3,\varphi} + \frac{26}{5} \tilde{f}_{11} \right) \cdot \eta^{+\frac{1}{2}} \\ &+ \left(-\frac{21}{2} \tilde{f}_3 - \frac{3}{2} \tilde{g}_{3,\varphi} - \frac{76}{5} \tilde{f}_{11} + \frac{3}{2} \tilde{h}_{3,\psi} \right) \cdot \eta^{+\frac{3}{2}} \\ &+ \left(\frac{15}{4} \tilde{f}_3 + 6 \tilde{f}_{11} - \frac{3}{2} \tilde{h}_{3,\psi} \right) \eta^{+\frac{5}{2}} \\ \tilde{\sigma}_{\varphi}^* &= 4 \tilde{f}_{11} \cdot \eta^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{23}{4} \tilde{f}_3 + \frac{7}{2} \tilde{g}_{3,\varphi} + \frac{18}{5} \tilde{f}_{11} \right) \eta^{+\frac{1}{2}} \\ &+ \left(-\frac{13}{2} \tilde{f}_3 - \frac{7}{2} \tilde{g}_{3,\varphi} - \frac{44}{5} \tilde{f}_{11} + \frac{3}{2} \tilde{h}_{3,\psi} \right) \eta^{+\frac{3}{2}} \\ &+ \left(\frac{3}{4} \tilde{f}_3 + \frac{6}{5} \tilde{f}_{11} - \frac{3}{2} \tilde{h}_{3,\psi} \right) \eta^{+\frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{\psi}^* &= \frac{12}{5} \tilde{f}_{11} \eta^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{15}{4} \tilde{f}_3 + \frac{3}{2} \tilde{g}_{3,\varphi} + \frac{34}{5} \tilde{f}_{11} \right) \eta^{+\frac{1}{2}} \\ &+ \left(-\frac{5}{2} \tilde{f}_3 - \frac{3}{2} \tilde{g}_{3,\varphi} - \frac{36}{5} \tilde{f}_{11} + \frac{7}{2} \tilde{h}_{3,\psi} \right) \eta^{+\frac{3}{2}} \\ &+ \left(-\frac{5}{4} \tilde{f}_3 - 2 \tilde{f}_{11} - \frac{7}{2} \tilde{h}_{3,\psi} \right) \eta^{+\frac{5}{2}} \\ \tilde{\tau}_{\rho\psi}^* &= \left(\frac{3}{2} \tilde{h}_3 + \frac{8}{5} \tilde{f}_{11,\psi} \right) \eta^{+\frac{1}{2}} + \left(-4 \tilde{h}_3 + \tilde{f}_{3,\psi} \right) \eta^{+\frac{3}{2}} \\ &+ \left(-\tilde{f}_{3,\psi} - \frac{8}{5} \tilde{f}_{11,\psi} + \frac{5}{2} \tilde{h}_3 \right) \eta^{+\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Für $\rho \rightarrow \infty$, d. h. für $\eta \rightarrow 1$ werden alle Spannungen Null. Dabei wurden nicht alle Gleichungen von (5) erfüllt. Um zu Aussagen für die Funktionen $\tilde{f}_{11}(\psi), \tilde{f}_3(\psi), \tilde{g}_{3,\varphi}(\psi), \tilde{h}_3(\psi)$ zu kommen, wird die Forderung aufgestellt, daß die potentielle Energie, wiederum für ein kleines Gebiet um $\varphi = 0$, zu einem Minimum wird. Von der allgemeinen Formulierung für die potentielle Energie ausgehend, ergibt sich für den vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} W_{\text{pot}} &= G a^3 \int_{\psi=0}^{\psi_o} \int_{\rho=0}^{\rho_1} \left[(1+\lambda)(2+3\lambda) \left(\frac{\sigma_{\rho\text{ges}}^* + \sigma_{\varphi\text{ges}}^* + \sigma_{\psi\text{ges}}^*}{2+3\lambda} \right)^2 \right. \\ &+ \tau_{\rho\psi}^{*2} - \sigma_{\rho\text{ges}}^* \sigma_{\varphi\text{ges}}^* - \sigma_{\varphi\text{ges}}^* \sigma_{\psi\text{ges}}^* - \sigma_{\psi\text{ges}}^* \sigma_{\rho\text{ges}}^* \\ &- \sigma_{\varphi\text{ges}}^{*2} + \lambda \cdot \frac{\sigma_{\rho\text{ges}}^* + \sigma_{\varphi\text{ges}}^* + \sigma_{\psi\text{ges}}^*}{2+3\lambda} \cdot \sigma_{\varphi\text{ges}}^* \\ &\left. + 2 \frac{\nu_{\rho\text{ges}}}{\rho} \sigma_{\varphi\text{ges}}^* \right] \rho(1+\rho) d\rho d\psi = \text{Minimum} \end{aligned} \quad (15)$$

Hierin stellen die Spannungen $\sigma_{\rho ges}^*$, $\sigma_{\varphi ges}^*$, $\sigma_{\psi ges}^*$, $\tau_{\varphi \psi ges}^*$ die Summe der Spannungen des rotationssymmetrischen Problems des Innenrisses nach (13) und der zu überlagernden Spannungen nach (14) dar. Außerdem wird senkrecht zur Rißebene eine konstante Spannung ($-\sigma_o$) überlagert, die in $\sigma_{\varphi ges}^*$ enthalten ist. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} v_{\rho ges}^* (\varphi = 0) = & \rho \left[\frac{8}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sigma_o^* + \tilde{f}_{11} \right) \left(\eta^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \right. \\ & + \left(\frac{2}{13} \sigma_o^* - \frac{2\sqrt{2}}{5\pi} \sigma_o^* + \tilde{f}_3 \right) \left(\eta^{+\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ & \left. + \left(-\tilde{f}_3 - \frac{8}{5} \tilde{f}_{11} \right) \left(\eta^{+\frac{3}{2}} - 1 \right) \right] + \frac{c}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

In (15) erscheint bei der Variablen ρ als obere Integrationsgrenze ρ_1 . Da die Spannungen in größerer Entfernung vom Riß auf Null abklingen, werden die Berechnungen für einen in ρ -Richtung begrenzten Bereich durchgeführt. Die Festlegung der oberen Integrationsgrenze ρ_1 ist jedoch mit einer gewissen Willkür verbunden, und es wurden Testrechnungen mit verschiedenen ρ_1 durchgeführt. Sie zeigten eine nur geringe Beeinflussung des Ergebnisses, und so wurde einheitlich mit $\rho_1 = 9$ gerechnet.

Nach Ausführung der Integration von (15) über ρ mit der oberen Grenze ρ_1 ergibt sich

$$W_{pot} = G a^3 \int_0^{\psi_o} L(\tilde{f}_3, \tilde{f}_3, \psi, \tilde{g}_3, \varphi, \tilde{h}_3, \tilde{h}_3, \psi, \tilde{f}_{11}, \tilde{f}_{11}, \psi) d\psi = \text{Min.} \quad (17)$$

Daraus folgen die Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{g}_3, \varphi} = 0 \quad (18)$$

und die Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{d\psi} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{f}_3, \psi} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{f}_3} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d}{d\psi} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{h}_3, \psi} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{h}_3} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{d}{d\psi} \left(\frac{\partial L}{\partial \tilde{f}_{11}, \psi} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{f}_{11}} = 0 \quad (21)$$

Die Auswertung von (18) . . . (21) liefert das Dgl.-System

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3, \psi \psi + 3,541 \tilde{f}_{11}, \psi \psi - 15,14 \tilde{f}_3 - 52,50 \tilde{f}_{11} - 6,479 \tilde{h}_3, \psi = \\ 0,6535 \sigma_o^* + 5,596 C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3, \psi \psi + 3,558 \tilde{f}_{11}, \psi \psi - 14,83 \tilde{f}_3 - 52,02 \tilde{f}_{11} - 6,312 \tilde{h}_3, \psi = \\ 0,6741 \sigma_o^* + 5,780 C \end{aligned} \quad (22)$$

$$\tilde{h}_3, \psi \psi - 0,1472 \tilde{h}_3 + 1,851 \tilde{f}_3, \psi + 6,386 \tilde{f}_{11}, \psi = 0$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3 = & 3,540 C_1 \cosh \alpha_1 \psi - 0,8845 C_2 \cosh \alpha_2 \psi \\ & - 0,6096 C \cosh \alpha_3 \psi + 0,1587 \sigma_o^* + 1,407 C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{11} = & C_1 \cosh \alpha_1 \psi + 0,03259 C_2 \cosh \alpha_2 \psi \\ & + 0,04613 C_3 \cosh \alpha_3 \psi - 0,05821 \sigma_o^* - 0,5123 C \end{aligned} \quad (23)$$

$$\tilde{h}_3 = 0,02888 C_1 \sinh \alpha_1 \psi + C_2 \sinh \alpha_2 \psi + C_3 \sinh \alpha_3 \psi$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_3, \varphi = & 1,812 C_1 \cosh \alpha_1 \psi + 0,05905 C_2 \cosh \alpha_2 \psi \\ & - 0,08358 C_3 \cosh \alpha_3 \psi + 0,02677 \sigma_o^* - 0,2040 C \end{aligned}$$

Darin sind

$$\alpha_1 = 5,860 \quad \alpha_2 = 1,526 \quad \alpha_3 = 0,9836 \quad (24)$$

Auch für einen schmalen Keil ($\varphi \Rightarrow 0$) lassen sich die Randbedingungen $\sigma_{\psi ges}^* (\psi = \pm \psi_o) = 0$ und $\tau_{\rho \psi ges}^* (\psi = \pm \psi_o) = 0$ nur näherungsweise erfüllen. Das soll nach dem Prinzip vom Minimum der Fehlerquadrate geschehen, und es wird die Form

$$\int_0^{\rho_1} \sigma_{\psi ges}^* (\psi = \pm \psi_o) \frac{\partial \sigma_{\psi ges}^* (\psi = \pm \psi_o)}{\partial C_1} \rho d\rho = 0$$

$$\int_0^{\rho_1} \sigma_{\psi ges}^* (\psi = \pm \psi_o) \frac{\partial \sigma_{\psi ges}^* (\psi = \pm \psi_o)}{\partial C_3} \rho d\rho = 0 \quad (25)$$

$$\int_0^{\rho_1} \tau_{\rho \psi ges}^* (\psi = \pm \psi_o) \frac{\partial \tau_{\rho \psi ges}^* (\psi = \pm \psi_o)}{\partial C_2} \rho d\rho = 0$$

gewählt. Nach der Lösung von (25) wird die Konstante C , die mit der Verschiebung $v_{\rho ges}^*$ eingeführt werden mußte, aus der Forderung bestimmt, daß für $\psi_o = \pi$ an der Stelle $\psi = 0$ keine Veränderung des Spannungsfaktors gegenüber dem Innenriß auftritt. Damit sind alle Konstanten bestimmt, und die Lösung für die zu überlagernden Spannungen liegt vor.

Die Bilder 2 . . . 4 zeigen $K_I (\psi = \pm \psi_o)$ als Funktion von ψ_o , $K_I (\psi)$ für verschiedene ψ_o und schließlich den Vergleich der Ergebnisse mit Resultaten aus der Literatur für $\psi_o = \frac{\pi}{4}$.

Auf Grund der für das Berechnungsmodell zugrunde gelegten Annahmen können die Ergebnisse nur für $\frac{a}{t} \leq 0,5$ (t – Wandstärke des Bauteils mit Oberflächen- und Eckriß an der Stelle der größten Rißtiefe) als gute Näherung betrachtet werden.

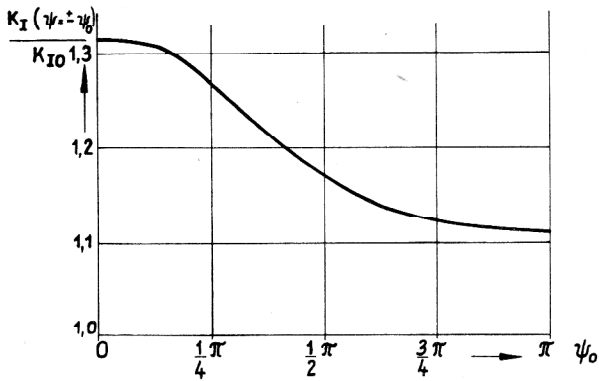


Bild 2

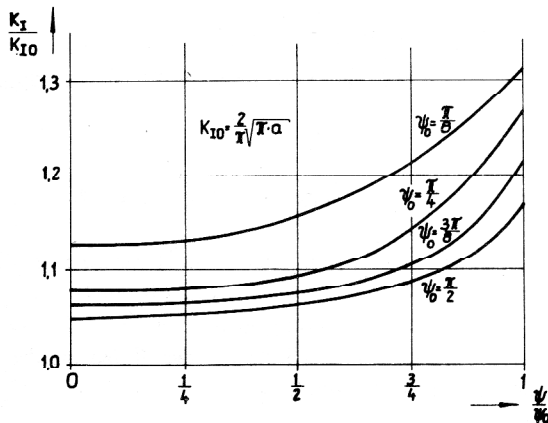


Bild 3

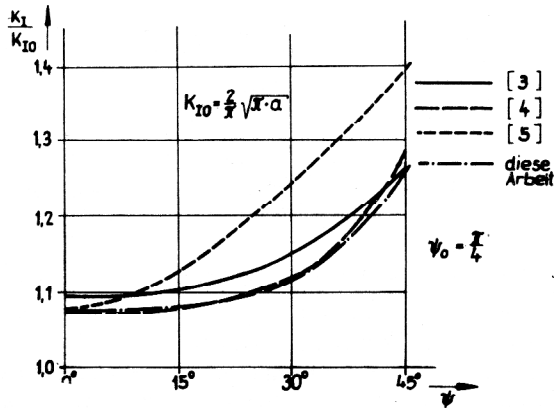


Bild 4

Die Annahme der konstanten Spannung σ_0 senkrecht zum Riß ist vor allem bei einem Eckriß i. a. nicht erfüllt. Hier kann der Spannungsintensitätsfaktor an einer beliebigen Stelle der Rifront dadurch berechnet werden, daß der aktuelle Spannungswert an dieser Stelle benutzt wird. Daß man auf diese Weise ein Ergebnis erhält, das mit dem einer Berechnung mit veränderlicher Spannung gut übereinstimmt, wird in [6] gezeigt.

7. Beispiel

Als Beispiel wird die Verbindungsstelle zweier Röhre mit unterschiedlichen Durchmessern betrachtet (Bild 5). In der Rohrleitung herrscht der Innendruck p .

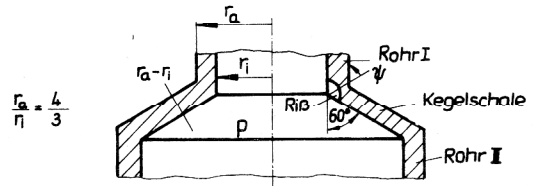


Bild 5

An der Übergangsstelle zwischen dem Rohr mit dem kleineren Durchmesser (Rohr I) und dem Übergangsstück in Form einer Kegelschle hat sich ein Eckriß gebildet, und der Spannungsintensitätsfaktor entlang der Rifront soll bestimmt werden. Der Riß wird als kreisbogenförmig angesehen.

Für die Berechnung des Spannungszustandes ohne Riß wird ein FEM-Programm benutzt. Zu den so berechneten Umfangsspannungen σ_u wird der Innendruck p addiert, um die Belastung der Rißflächen durch den Innendruck zu berücksichtigen, d. h.

$$\sigma_{0\epsilon} = \sigma_u + p \quad (26)$$

Mit der Bezugsgröße

$$\bar{K}_{I0} = \frac{2}{\pi} p \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \sqrt{\pi \cdot a} \quad (27)$$

ist der Verlauf des Spannungsintensitätsfaktors K_I in Bild 6 dargestellt.

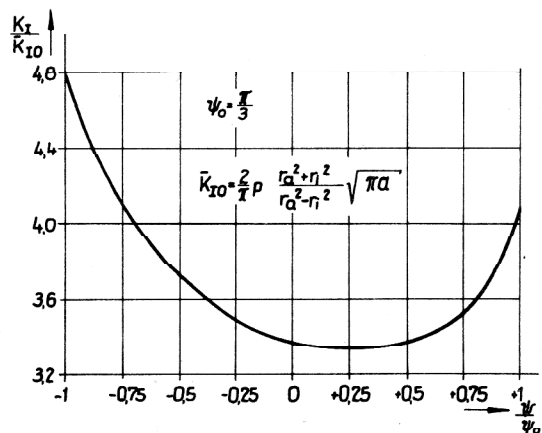


Bild 6

LITERATUR

- [1] Hartranft, R.J., Sih, G.C.: The use of eigenfunction expansions in the general solution of three-dimensional crack problems; J. of Math. and Mech 19 (1969), S. 123 – 138.
- [2] Sneddon, I.N.: The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic body; Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A, 1946, S. 229 – 260.
- [3] Tracey, D.M.: 3-D-elastic singularity element for evaluation of K along an arbitrary crack front; Int. J. Fract. 9 (1973), S. 340 – 343.
- [4] Kuna, M.: Hybride Sonderelemente zur Spannungsanalyse dreidimensionaler rißbehafteter Körper; IX. Int. Congr. über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, Weimar 1981, Ber. 2, S. 27 – 30.
- [5] Kobayashi, A.S., Polvanich, N., Emery, A.F., Love, W.J.: Stress intensity factors of corner cracks in two nozzle-cylinder intersections; Transactions of the 4 th Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Technology, San Francisco, 1977, G. 4/4.
- [6] Mohamed, M.A., Schröder, J.: Stress intensity factor solution for crotch-corner cracks of tee-intersections of cylindrical shells; Int. J. of Fract. 14 (1978), S. 605 – 621.

Anschrift des Verfassers:

Doz. Dr. sc. techn. Joachim Nickel
Technische Universität Dresden
Sektion Grundlagen des Maschinenwesens
8027 Dresden
MommSENstraße 13