

# Zur Untersuchung dünner, beliebig berandeter Platten mit physikalisch nichtlinearem Verhalten

S. Stiehler

## 0. Einleitung

Im vorliegenden Beitrag sollen die theoretischen Grundlagen für das FEM-Programm NLP83 vorgestellt werden, das die Untersuchung dünner, beliebig berandeter Platten im elastisch-plastischen Materialbereich gestattet. Ausgehend von der Kirchhoffschen Hypothese erfolgt die Formulierung nichtlinearer Stoffgesetze in allgemeinen Koordinaten auf der Grundlage eines differentiellen Deformationsgesetzes nach Prandtl-Reuß, der Fließbedingung nach v. Mises und mit Hilfe von Regeln für isotrope und kinematische Verfestigung.

Nach Überschreiten der Fließgrenze wird das Laststeigerungsverfahren angewendet, wobei zur Berechnung des Spannungs- und Deformationszustandes in jedem Lastschritt die Methode der veränderlichen Steifigkeit, die Methode der Anfangsspannung [1] und eine Gemischte Methode zur Auswahl stehen.

Infolge der Verwendung allgemeiner krummliniger Koordinaten können die Ränder der finiten Elemente gekrümmt sein. Dadurch ist eine genaue Erfassung der Randkontur und damit auch der Randbedingungen des realen Bauteiles durch das Berechnungsmodell möglich. Dies wird am ersten Beispiel demonstriert. Mit Hilfe des zweiten Beispiels werden die drei Methoden zur Ermittlung elastisch-plastischer Spannungszustände gegenübergestellt und Vergleichsrechnungen mit anderen Programmen durchgeführt.

## 1. Geometrische Grundlagen

Die  $x^1 - x^2$ -Ebene eines globalen kartesischen Koordinatensystems  $x^q$ ;  $q = 1, 2, 3$  wird in die Mittelfläche der undeformierten Platte gelegt. Dann lautet der Ortsvektor  $r^q$  jedes Punktes P der Plattenmittelfläche (Bild 1) unter Verwendung der allgemeinen Koordinaten  $x^\alpha$ ;

$\alpha = 1, 2$

$$r^q = \left\{ r^1(x^1, x^2), r^2(x^1, x^2), 0 \right\}^T \quad (1.1)$$

Die Gleichung (1.1) stellt gleichzeitig die Transformationsbeziehung zwischen den allgemeinen und den globalen kartesischen Koordinaten dar.

Aus den nichtnormierten Tangentenvektoren

$$c_1^q = \frac{\partial r^q}{\partial x^1}; \quad c_2^q = \frac{\partial r^q}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

lassen sich die kovarianten Koordinaten des Maßstensors der Plattenmittelfläche

$$g_{\alpha\beta} = c_\alpha^q c_\beta^q \quad (1.3)$$

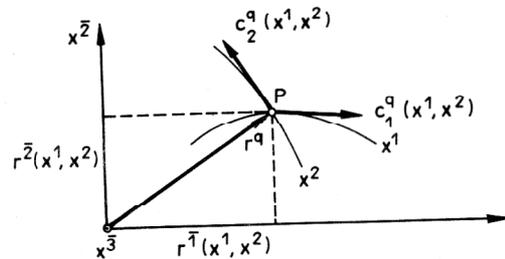


Bild 1  
Mathematische Beschreibung der undeformierten Plattenmittelfläche

und dessen Determinante

$$g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \quad (1.4)$$

berechnen. Unter Berücksichtigung des Permutationssymbols

$$\epsilon^{12} = \frac{1}{\sqrt{g}}; \quad \epsilon^{21} = -\frac{1}{\sqrt{g}}; \quad \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0 \quad (1.5)$$

folgen:

– die kontravarianten Koordinaten des Maßstensors

$$g^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\vartheta} g_{\gamma\vartheta}; \quad (1.6)$$

– die nichtnormierten Gradientenvektoren

$$c_q^\alpha = g^{\alpha\beta} c_\beta^q; \quad (1.7)$$

– die Christoffelschen Dreizeigersymbole

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = c_q^\alpha c_\beta^q c_\gamma^q; \quad (1.8)$$

Da im undeformierten Zustand alle Punkte auf einem Normalenvektor  $n^q$  zur Plattenmittelfläche die gleiche Metrik besitzen, lauten die Koordinaten des Maßstensors der Platte  $g_{AB}$

$$g_{\alpha\beta} = c_\alpha^q c_\beta^q; \quad g_{\alpha 3} = g_{3\beta} = 0; \quad g_{33} = 1. \quad (1.9)$$

Das räumliche, allgemeine Koordinatensystem  $x^A$ ;  $A = 1, 2, 3$  entsteht durch Hinzufügen der  $x^3$ -Achse senkrecht zur  $x^1 - x^2$ -Ebene des Koordinatensystems  $x^\alpha$ .

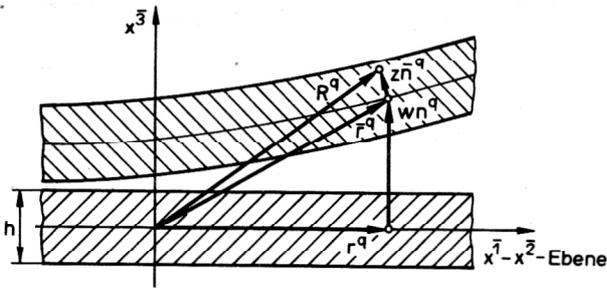
Der Ortsvektor der deformierten Platte  $R^q$  wird durch

$$R^q = r^q + w n^q + z \bar{n}^q; \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.10)$$

dargestellt (Bild 2). Dabei läßt sich der Normalenvektor der verformten Mittelfläche mittels

$$\bar{n}^q = n^q - w \left| \begin{matrix} \alpha \\ c_\alpha^q \end{matrix} \right. \quad (1.11)$$

angeben.



**Bild 2**  
Deformierte Platte

Unter Verwendung der Tangentenvektoren

$$C_{\alpha}^q = \frac{\partial R^q}{\partial x^{\alpha}} = c_{\alpha}^q + w \left|_{\alpha} n^q - zw \right|_{\alpha}^{\beta} c_{\beta}^q \quad (1.12)$$

und bei Vernachlässigung aller nichtlinearen Terme der Durchbiegung bzw. deren Ableitungen ergeben sich die kovarianten Koordinaten des Maßtensors der deformierten Platte zu

$$G_{\alpha\beta} = C_{\alpha}^q C_{\beta}^q = g_{\alpha\beta} - 2zw \left|_{\alpha\beta} \right.; \quad (1.13)$$

$$G_{\alpha 3} = G_{3\beta} = 0; \quad G_{33} = 1.$$

Die Bestimmung der Koordinaten des Verzerrungstensors  $D_{AB}$  erfolgt mit Hilfe der Gleichung

$$D_{AB} = \frac{1}{2} (G_{AB} - g_{AB}), \quad (1.14)$$

und unter Einbeziehung von (1.9) und (1.14) entsteht

$$D_{\alpha\beta} = -zw \left|_{\alpha\beta} \right.; \quad D_{A3} = D_{3B} = 0. \quad (1.15)$$

Das Verschwinden der Koordinaten  $D_{A3}$  und  $D_{3B}$  ist eine unmittelbare Folge der Kirchhoffschen Hypothese.

Die Gleichgewichtsbedingungen am inkrementellen Plattenelement lauten

$$m^{\alpha\beta} \left|_{\alpha} - q^{\beta} = 0; \quad q^{\alpha} \left|_{\alpha} + p^3 = 0. \quad (1.16)$$

Dabei sind  $m^{\alpha\beta}$  die Schnittmomente,  $q^{\beta}$  die Querkräfte und  $p^3$  die Flächenbelastung in Richtung der  $x^3$ -Achse. Werden diese Gleichgewichtsbedingungen mit den virtuellen Verdrehungen  $\delta w \left|_{\beta}$  bzw. der virtuellen Verschiebung  $\delta w$  überschoben und über die Plattenmittelfläche integriert, so entsteht die virtuelle Arbeit der Schnittgrößen und der äußeren Last

$$-\delta\pi = \int_A [(m^{\alpha\beta} \left|_{\alpha} - q^{\beta}) (-\delta w \left|_{\beta}) + (q^{\alpha} \left|_{\alpha} + p^3) \delta w] dA = 0. \quad (1.17)$$

Nach zahlreichen Umformungen [2] führt (1.17) auf die Beziehung

$$-\delta\pi = \int_A m^{\alpha\beta} \delta w \left|_{\alpha\beta} dA + \int_A p^3 \delta w dA - \int_{C_1} B \delta w \left|_{\nu} d\tau$$

$$+ \int_{C_2} \bar{Q} \delta w d\tau + \sum_{k=1}^l \frac{k}{T} \delta w = 0, \quad (1.18)$$

wobei  $B$  das äußere Biegemoment am Randstück  $C_1$ ,  $\bar{Q}$  die äußere Ersatzquerkraft am Randstück  $C_2$ ,  $\frac{k}{T}$  die Differenz des äußeren Torsionsmomentes an dessen Unstetigkeitsstellen  $k$  und  $\nu, \tau$  ein orthogonales Randkoordinatensystem darstellen.

## 2. Nichtlineare Stoffgesetze

In jedem Punkt der Platte sei der Spannungstensor  $S^{AB}$ ;  $A, B = 1, 2, 3$  und damit dessen Subtensor  $S^{\alpha\beta}$ ;  $\alpha, \beta = 1, 2$  definiert. Unter Verwendung des Spannungsdeviators

$$s^{AB} = S^{AB} - \frac{1}{3} G^{AB} S_{\Gamma}^{\Gamma} \quad (2.1)$$

läßt sich die Fließbedingung nach v. Mises analog zu [3] in der Form

$$F = \frac{1}{2} (s_{AB} - a_{AB}) (s^{AB} - a^{AB}) - \frac{1}{3} k^2 = 0 \quad (2.2)$$

angeben. Dabei sind  $a_{AB}$  die der kinematischen Verschiebung der Fließfläche entsprechenden Deviatorspannungen,  $F$  die Fließfunktion, während  $k$  die Größe der isotropen Verfestigung und die Belastungsgeschichte wiedergibt. Für den Zusammenhang zwischen dem isotropen Verfestigungsparameter  $k$  und der plastischen Ver-

gleichsdehnung  $\bar{D}_v$  wird die von Weber [4] verwendete Beziehung

$$k = S_F \left\{ \frac{c_0}{1+c_2} \left[ (c_1 + \bar{D}_v)^{1+c_2} - c_1^{1+c_2} \right] - b \bar{D}_v + 1 \right\}^p \quad (2.3)$$

eingeführt. Hierbei stellt  $S_F$  die Fließspannung des jungfräulichen Materials dar und  $c_0, c_1, c_2$  und  $b$  sind dimensionslose Parameter, die eine Anpassung von (2.3) an das praktische Materialverhalten ermöglichen.

Das differentielle Deformationsgesetz nach Prandtl-Reusz

$$\dot{D}_{AB} = \dot{\bar{D}}_{AB} + \dot{D}_{AB} + \dot{D}_{AB} \quad (2.4)$$

bildet den Ausgangspunkt zur Formulierung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung, d. h. die Verzerrungsänderungen setzen sich aus elastischen, plastischen und thermischen Anteilen zusammen.

Bei Anwendung des allgemeinen Fließgesetzes

$$\bar{D}_{AB} = \frac{\partial F}{\partial S^{AB}} \dot{\lambda} \quad (2.5)$$

ergeben sich die plastischen Verzerrungszuwüchse mit (2.2) zu

$$\bar{D}_{AB} = (s_{AB} - a_{AB}) \dot{\lambda}. \quad (2.6)$$

Zur Bestimmung des nichtnegativen Proportionalitätsfaktors  $\dot{\lambda}$  wird die Bedingung für plastisches Fließen

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial S_{AB}} \dot{S}_{AB} + \frac{\partial F}{\partial a_{AB}} \dot{a}_{AB} + \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \bar{p}} \frac{\bar{p}}{\partial D_v} = 0 \quad (2.7)$$

herangezogen, wobei für die partielle Ableitung des isotropen Verfestigungsparameters  $k$

$$\frac{\partial k}{\partial \bar{p}} = S_F [c_0 (c_1 + \frac{p}{D_v})^{c_2} - b] = c \cdot S_F \quad (2.8)$$

geschrieben wird. Dabei ist  $c$  eine experimentell zu bestimmende Werkstoffkennfunktion. Die Gleichung (2.7) liefert dann

$$\dot{\lambda} = \frac{s_{AB} - a_{AB}}{\frac{4}{9} k^2 S_F (b+c)} \dot{S}_{AB}, \quad (2.9)$$

und die plastischen Verzerrungsänderungen folgen zu

$$\frac{\dot{p}}{D_{AB}} = \frac{(s_{AB} - a_{AB})(s_{\Gamma\Theta} - a_{\Gamma\Theta})}{\frac{4}{9} k^2 S_F (b+c)} \dot{S}_{\Gamma\Theta} \quad (2.10)$$

Die elastischen Anteile der Verzerrungszuwächse lassen sich in der Form

$$D_{AB}^e = \frac{1}{2G} [\dot{S}_{AB} - \frac{\mu}{1+\mu} G_{AB} \dot{S}_{\Gamma}^{\Gamma}] \quad (2.11)$$

angeben, wogegen man die thermischen Verzerrungsin-kremente zu

$$\dot{D}_{AB}^t = G_{AB} (\beta \Delta \dot{T}) \frac{z}{h} = G_{AB} \dot{D}_0 \quad (2.12)$$

erhält, wenn ein linearer Temperaturverlauf zwischen Plattenober- und Plattenunterseite vorausgesetzt wird. Dabei sind  $G$  der Gleitmodul,  $\mu$  die Querdehnungszahl,  $\beta$  der Längen-Temperaturkoeffizient und  $\Delta T$  die Temperaturdifferenz zwischen Plattenober- und Plattenunterseite.

Bei Einführung der Beziehungen (2.10) bis (2.12) in (2.4) ergibt sich unter Berücksichtigung von  $\dot{S}_{33} = 0$  die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für den ebenen Spannungszustand in allgemeinen krummlinigen Koordinaten

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = \frac{2G}{[1-\mu-(1-2\mu)s_{33}^{33}]} \left\{ [1-\mu-(1-2\mu)s_{33}^{33}] (\dot{D}^{\alpha\beta} - G^{\alpha\beta} \dot{D}_0) + [\mu(G^{\alpha\beta} G^{\gamma\epsilon} + G^{\alpha\beta} s_{33}^{\gamma\epsilon} - G^{\alpha\beta} G^{\gamma\epsilon} s_{33}^{33} + G^{\gamma\epsilon} s_{33}^{\alpha\beta}) - (1-\mu)s^{\alpha\beta\gamma\epsilon}] (\dot{D}_{\gamma\epsilon} - G_{\gamma\epsilon} \dot{D}_0) \right\} \quad (2.13)$$

Diese Gleichung läßt sich aufspalten in die Zusammenhänge für elastische Spannungsänderungen

$$\dot{S}^e \alpha\beta = \frac{E}{1-\mu^2} [(1-\mu) G^{\alpha\gamma} G^{\beta\epsilon} + \mu G^{\alpha\beta} G^{\gamma\epsilon}] (\dot{D}_{\gamma\epsilon} - G_{\gamma\epsilon} \dot{D}_0) \quad (2.14)$$

und für plastische Spannungsänderungen

$$\dot{S}^p \alpha\beta = \frac{-E}{(1-\mu^2) [1-\mu-(1-2\mu)s_{33}^{33}]} [(1-\mu^2) s^{\alpha\beta\gamma\epsilon} + \mu^2 G^{\alpha\beta} G^{\gamma\epsilon} s_{33}^{33} - \mu(1-\mu) (G^{\alpha\beta} s_{33}^{\gamma\epsilon} + G^{\gamma\epsilon} s_{33}^{\alpha\beta})] (\dot{D}_{\gamma\epsilon} - G_{\gamma\epsilon} \dot{D}_0). \quad (2.15)$$

Dabei kommen die Abkürzungen

$$s_{\Gamma E}^{AB} = \frac{1}{\frac{2}{3} k^2 N} (s^{AB} - a^{AB}) (s_{\Gamma E} - a_{\Gamma E});$$

$$N = 1 + S_F \frac{b+c}{3G}$$

zur Anwendung.

Eine weitere Möglichkeit der Formulierung der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung oberhalb der Fließgrenze ist der Zusammenhang

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = \dot{S}_0^{\alpha\beta} + \frac{E}{1-\mu^2} [(1-\mu) G^{\alpha\gamma} G^{\beta\epsilon} + \mu G^{\alpha\beta} G^{\gamma\epsilon}] (\dot{D}_{\gamma\epsilon} - G_{\gamma\epsilon} \dot{D}_0). \quad (2.16)$$

Der Tensor  $\dot{S}_0^{\alpha\beta}$  beinhaltet die Anfangsspannungen,

nach denen die zweite Methode zur Berechnung elastisch-plastischer Spannungszustände benannt ist (Abschnitt 3). Für die mathematische Darstellung der kinematischen Verschiebung der Fließfläche kommt die Pragersche Verfestigungsregel

$$\dot{a}_{AB} = \frac{2}{3} S_F \frac{p}{b} D_{AB}^p \quad (2.17)$$

zur Anwendung. Mit (2.10) entsteht für den ebenen Spannungszustand

$$\dot{a}^{\alpha\beta} = \frac{2 S_F b}{3 [1-\mu-(1-2\mu)s_{33}^{33}]} [(1-\mu) s^{\alpha\beta\gamma\epsilon} - \mu s^{\alpha\beta 33} G^{\gamma\epsilon}] (\dot{D}_{\gamma\epsilon} - G_{\gamma\epsilon} \dot{D}_0). \quad (2.18)$$

Aus der Beziehung zur Berechnung der plastischen Vergleichsdehnungsänderung

$$D_v^p = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p}{D_{AB}} \frac{p}{D_{AB}}} \quad (2.19)$$

folgt bei Berücksichtigung von (2.10)

$$D_v^p = \frac{1}{kN [1-\mu-(1-2\mu)s_{33}^{33}]} [(1-\mu) (s^{\alpha\beta} - a^{\alpha\beta}) + (s_{\lambda}^{\lambda} - a_{\lambda}^{\lambda}) \mu G^{\alpha\beta}] (\dot{D}_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta} \dot{D}_0). \quad (2.20)$$

Mit den Beziehungen (2.13), (2.18) und (2.20) stehen die Grundgleichungen zur Untersuchung dünner Platten im physikalisch nichtlinearen Materialbereich zur Verfügung. Es ist dabei zu bemerken, daß die Änderungen der Zustandsgrößen Funktionen des aktuellen Spannungszustandes sind.

### 3. Näherungslösung mit Hilfe der FEM

Entsprechend der Methode der finiten Elemente erfolgt eine Unterteilung der Platte in eine endliche Zahl von Elementen. Als Elementtyp kommt ein Dreieckelement mit drei Eckknoten und 18 Freiwerten [5] zur Anwendung, bei dem die Durchbiegung durch ein reduziertes Polynom 5. Grades angenähert wird.

Die Vernetzung geschieht in der durch die dimensionslosen Parameter  $x^1$  und  $x^2$  aufgespannten Parameterebene und jedem Punkt der Plattenmittelfläche wird ein Wertepaar  $(x^1, x^2)$  zugeordnet.

Mit Hilfe der Transformationsbeziehung (1.1) erfolgt dann die Berechnung der Koordinaten aller Punkte in der realen Ebene, aufgespannt durch das globale Koordinatensystem  $x^q$ . Durch eine geeignete Wahl der Transformation (1.1) kann dabei i. a. eine genaue Erfassung des Plattenrandes durch das Berechnungsmodell erreicht werden.

Durch Einführung der Näherungsfunktion in Gleichung (1.18) und nach Übergang von differentiellen Größen zu endlichen Zuwächsen in den Stoffgesetzen entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\underline{K} \underline{\Delta v} = \underline{\Delta r} \quad (3.1)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $K$  läßt sich in einen elastischen und einen plastischen Anteil entsprechend

$$\underline{K} = \underline{K}^e + \underline{K}^p \quad (3.2)$$

aufspalten. Der Vektor der Belastungsänderungen  $\underline{\Delta r}$  beinhaltet Anteile aus Einzellasten, Linienkräften, Linienmomenten, Flächenlasten oder thermischen Beanspruchungen. Infolge der Verwendung allgemeiner Koordinaten müssen alle Integrationen zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix und des Belastungsvektors numerisch ausgeführt werden. Der Lösungsvektor  $\underline{\Delta v}$  hat für jeden Knotenpunkt  $l$  den Aufbau

$$\underline{\Delta v}_l = \left\{ \Delta w, \Delta w_{|1}, \Delta w_{|2}, \Delta w_{|11}, \Delta w_{|22}, \Delta w_{|12} \right\}_l^T \quad (3.3)$$

d. h. er beinhaltet neben der Durchbiegung selbst deren erste und zweite partielle Ableitungen nach den allgemeinen Koordinaten.

Entsprechend dem Laststeigerungsverfahren werden das Gleichungssystem (3.1) in jedem Lastschritt  $\lambda$  gelöst und die Änderungen des Spannungs- und Deformationszustandes berechnet. Dabei sollen in Abhängigkeit von der verwendeten Spannungs-Verzerrungs-Beziehung drei Verfahren realisiert werden; die Methode der veränderlichen Steifigkeit, die Methode der Anfangsspannung und eine Gemischte Methode.

#### Methode der veränderlichen Steifigkeit

Ausgehend von (2.13) ist in jedem Lastschritt  $\lambda$  das Gleichungssystem

$$\left( \underline{K}^e + \underline{K}^p \right) \underline{\Delta v} = \underline{\Delta r} \quad (3.4)$$

zu lösen. Der plastische Anteil zur Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}^p$  wird in einem gesonderten Zwischenlastschritt unter

Verwendung des Lösungsvektors des Gleichungssystems

$$\underline{K}^{\lambda-1} \underline{\Delta v} = \alpha \underline{\Delta r} \quad (3.5)$$

ermittelt. Für den Zwischenlastschrittfaktor  $\alpha$  hat sich der Wert  $\alpha = 0,55$  bewährt.

#### Methode der Anfangsspannung

Nach Lösen des Gleichungssystems im 1. Iterationszyklus, d. h.  $\eta = 1$ ,

$$\underline{K}^e \underline{\Delta v}^{\lambda, \eta=1} = \underline{\Delta r} \quad (3.6)$$

ist infolge (2.16) in jedem weiteren Zyklus  $\eta$  für alle Elemente  $\nu$  mit mindestens einer Integrationsstützstelle im elastisch-plastischen Materialbereich ein Vektor der

Anfangsspannungen  $\underline{\Delta r}_0^{\lambda, \eta, \nu}$  zu berechnen. Das Gleichungssystem lautet dann  $\underline{K}^e \underline{\Delta v}^{\lambda, \eta} = \underline{\Delta r}_0^{\lambda, \eta}$ .

Der Abbruch im Zyklus  $\eta = \kappa$  erfolgt, wenn für alle Elemente des Lösungsvektors

$$\frac{\underline{\Delta v}^{\lambda, \kappa}}{\underline{\Delta v}^{\lambda, \eta}} < \psi \quad (3.8)$$

gilt, wobei  $\psi$  eine wählbare Fehlergrenze darstellt.

#### Gemischte Methode:

Zunächst erfolgt die Ermittlung der Spannungs- und Deformationszustände mit Hilfe der Methode der Anfangsspannung. Steigt jedoch in einem Lastschritt die Zahl der benötigten Iterationen stark an, so wird im folgenden Lastschritt mittels der Methode der veränderlichen Steifigkeit eine aktuelle „elastische“ Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}^e$  berechnet.

Die sich anschließenden Untersuchungen werden unter Anwendung der Methode der Anfangsspannung fortgesetzt.

### 4. Beispiele

Eine am Außenrand eingespannte, am Innenrand freie Kreisringplatte unter konstanter Flächenlast soll zur Untersuchung der Konvergenz und zur Gegenüberstellung allgemeiner Koordinaten mit kartesischen herangezogen werden (Bild 3).

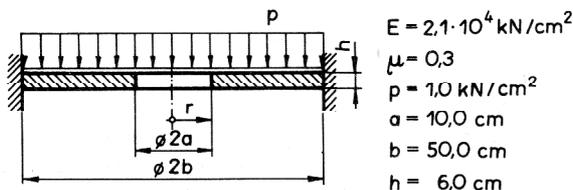


Bild 3  
Kreisringplatte

**Tabelle 1**  
Vergleich der berechneten Biegeflächen mit der exakten Lösung

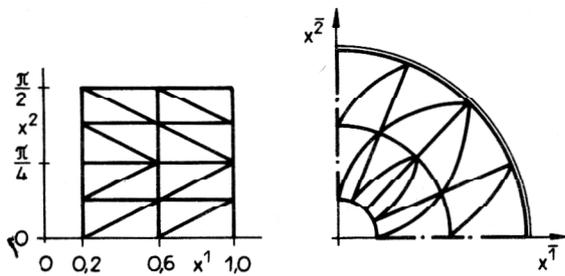
Zahl der Elemente	r in cm	w(r) in 10 <sup>-1</sup> cm			
		polyg. El. Variante I	polyg. El. Variante II	krumml. Elemente	exakte Lösung
4	10	4,423 950	1,840 194	2,418 212	2,415 122
	50	0	0	0	0
16	10	2,630 230	2,118 672	2,415 316	2,415 122
	30	1,086 598	0,778 631	0,955 355	0,955 378
	50	0	0	0	0
64	10	2,455 594	2,267 208	2,415 123	2,415 122
	20	1,733 463	1,579 498	1,699 714	1,699 747
	30	0,980 293	0,866 243	0,955 356	0,955 378
	40	0,312 251	0,245 615	0,298 129	0,298 145
	50	0	0	0	0

Dazu wird ein Viertel der Platte in 4,16 bzw. 64 Elemente unterteilt. Bild 4 zeigt im linken Teil die Vernetzungsvariante mit 16 Elementen in der Parameterebene, aus der unter Verwendung der Transformationsbeziehung für Polarkoordinaten

$$\bar{x}^1 = a_0 + a_1 x^1 \cos(x^2 - x_0^2);$$

$$\bar{x}^2 = b_0 + a_1 x^1 \sin(x^2 - x_0^2); \quad a_0 = b_0 = x_0^2 = 0; \quad a_1 = 50 \text{ cm}$$

die Vernetzung in der realen Ebene (Bild 4, rechts) entsteht. Dabei sind die krummlinig berandeten Elemente zu erkennen.



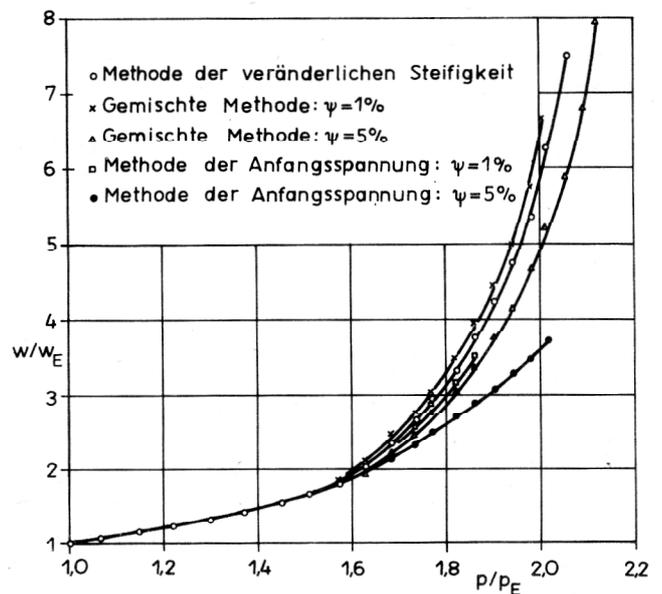
**Bild 4**  
Vernetzung in der Parameterebene und der realen Ebene

Während bei Anwendung von Polarkoordinaten die Randbedingungen problemlos formuliert werden können, ergeben sich für die kartesischen Koordinaten zwei Möglichkeiten; eine punktweise Einspannung in den Randknoten (Variante I in Tabelle 1) und eine kontinuierliche Einspannung entlang des gesamten Randes (Variante II in Tabelle 1).

Wie zu erwarten, ist das Modell mit polygonalen Elementen, Variante I im Vergleich zur exakten Lösung zu weich, während Variante II infolge der Streichung aller sechs Elemente des Knotenvektors in den Randknoten zu steif ist. Die besten Ergebnisse sind bei Verwendung krummlinig berandeter Elemente zu verzeichnen. Die Vernetzung mit 16 Elementen führt bereits zu einer für technische Zwecke ausreichenden Genauigkeit. Es wird deutlich, daß krummlinige Koordinaten zur Untersuchung beliebig berandeter Platten besser geeignet

sind, als kartesische Koordinaten. Der Vergleich mit einem isoparametrischen Konzept wurde allerdings nicht geführt.

Im zweiten Beispiel wird eine Kreisringplatte mit gleichen Randbedingungen wie Beispiel 1 unter konstanter Flächenlast gewählt, um die drei numerischen Verfahren gegenüberzustellen. Das Berechnungsmodell ist ein in 4 krummlinig berandete Elemente in radialer Richtung unterteilter Kreisringsektor. Bild 5 zeigt für idealplastisches Materialverhalten die Durchbiegung des Innenrandes bei Laststeigerung, wobei mit zunehmender Plastizierung kleinere Lastschritte verwendet werden.

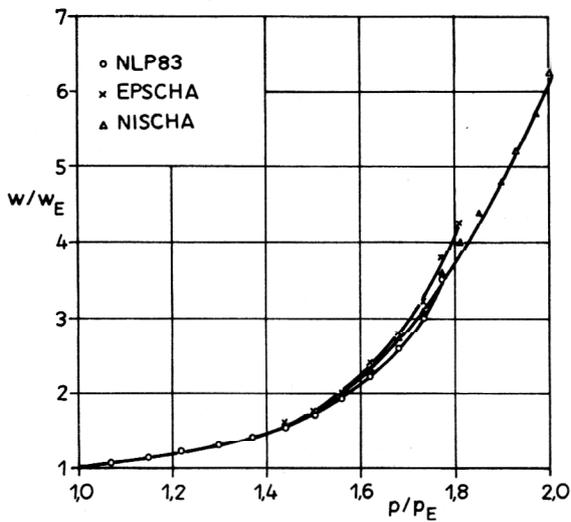


**Bild 5**  
Durchbiegung des Innenrandes bei steigender Belastung

Die Anwendung der Methode der veränderlichen Steifigkeit und der Gemischten Methode mit einer Abbruchgrenze von  $\psi = 1\%$  liefern die qualitativ besten Ergebnisse, wobei ersteres Verfahren die wesentlich kürzeren Rechenzeiten benötigt und sich deshalb als das effektivste für die untersuchten Problemstellungen erwiesen hat. Die Berechnungen mittels Methode der Anfangsspannung werden wegen zu großer Rechenzeit abgebrochen.

Infolge der groben Vernetzung in radialer Richtung ist die Platte zu steif und der exakte Wert für die Traglast nach [6]  $p_T/p_E = 1,98$  wird überschritten. Auf den Vergleich der numerischen Methoden hat dies allerdings keinen Einfluß.

An diesem zweiten Beispiel werden weiterhin Vergleichsrechnungen mit den an der TU Dresden entwickelten Programmen EPSCHA [4] und NISCHA [7] durchgeführt. Das Modell wird dazu in 8 finite Elemente bzw. 4 finite Streifenelemente in radialer Richtung unterteilt. Die mit Hilfe der Methode der veränderlichen Steifigkeit berechneten Funktionen der Durchbiegung des Innenrandes bei Laststeigerung (Bild 6) zeigen erst bei fortgeschrittener Plastizierung geringe Abweichungen.



**Bild 6**  
Vergleichsrechnung der Programme NLP83, EPSCHA und NISCHA

## LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O.C.: Methode der finiten Elemente. VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1974.
- [2] Stiehler, S.: Aufstellen der Programmierungunterlagen zur Berechnung elasto-plastischer Plattenprobleme in krummlinigen Koordinaten. Forschungsbericht, BA Freiberg, 1981.
- [3] Recke, H.-G.: Zur Untersuchung dünner Platten im elastisch-plastischen Bereich. Technische Mechanik (als Manuskript eingereicht).
- [4] Weber, D.: Berechnung physikalisch nichtlinearer beliebiger Schalen. Dissertation B, TU Dresden, 1981.
- [5] Franeck, H.: Die allgemeine elastische Schale. Forschungsbericht, BA Freiberg, 1977.
- [6] Oschatz, A.: Traglastberechnung rotationssymmetrisch belasteter Kreis- und Kreisringplatten mit Berücksichtigung der Querkraftschubspannungen. Dissertation, TU Dresden, 1969.
- [7] Röhle, H.; Ulbricht, V.: Berechnung von Rotationsschalen bei nichtlinearem Deformationsverhalten. Dissertation, TU Dresden, 1975.

Anschrift des Verfassers:  
Dipl.-Ing. S. Stiehler  
Bergakademie Freiberg  
Sektion Maschinen- und Energietechnik  
9200 Freiberg  
G.-Zeuner-Str. 7