TECHNISCHE MECHANIK 5 (1984) Heft 2
Manuskripteingang: 4. 5. 1983

Vollständige Auswertung eines axialsymmetrischen Spannungszustands in einem inkompressiblen Körper aus Isotheten

Klaus Ullmann

1. Einleitung

In früheren Arbeiten [1] wurde vom Autor gezeigt, daß es sinnvoll und nützlich ist, räumliche Modelluntersuchungen nach dem spannungsoptischen Erstarrungsversuch durch Messungen nach dem Moiréverfahren zu ergänzen. Die Moirémessung liefert als zusätzliche Information die Isotheten (Linien gleicher Verschiebungskomponente) und ermöglicht leicht eine Kontrolle der polarisationsoptisch ermittelten Spannungen am Rand.

Eine vollständige Auswertung des Spannungstensors im Inneren des Feldes aus Isotheten jedoch wurde bisher nicht praktiziert. Ursache dafür sind Schwierigkeiten, die aus der näherungsweisen Inkompressibilität des Modellwerkstoffs resultieren. Die Querdehnzahl beträgt $\nu = 0{,}49$ [2]. So führt eine punktweise Auswertung der Spannungen aus den Dehnungen (bzw. Verschiebungen) schon bei geringen Unsicherheiten der Meßdaten auf stark streuende Ergebnisse.

Deshalb wird hier der Weg einer feldweisen Auswertung der Spannungen beschritten, wobei zur Vereinfachung der Berechnungen a priori $\nu = 1/2$ gesetzt wird. Es wird angenommen, daß der dadurch bedingte Fehler klein gegenüber den sonstigen Unsicherheiten der Messung und Auswertung ist. Ferner wird ein axialsymmetrischer Spannungszustand vorausgesetzt, der bei vielen praktischen Problemen vorliegt.

2. Theorie des Auswerteverfahrens

Das Verfahren ist analog zu dem von Naumann [3] für ebene Plastizitätsprobleme angegebenen. Im hier behandelten elastischen Fall ergeben sich jedoch wesentliche Vereinfachungen, vor allem bezüglich der erforderlichen numerischen Verarbeitung der Meßdaten. Ausgangspunkt sind die Gleichgewichtsbedingungen des axialsymmetrischen Spannungszustands.

2.1. *Auswertung in Zylinderkoordinaten*

Die Gleichgewichtsbedingungen in Zylinderkoordinaten x, r, φ[1])

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0\,, \tag{2}$$

werden durch Aufspalten des Spannungstensors in Deviator und Kugeltensor

$$\sigma_x = s_x + \sigma\,, \qquad \sigma_r = s_r + \sigma\,, \quad \sigma_\varphi = s_\varphi + \sigma\,,$$

umgeformt in

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\frac{\partial s_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} - \frac{\tau_{rx}}{r}\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = -\frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} - \frac{\partial s_r}{\partial r} - \frac{s_r - s_\varphi}{r}\,. \tag{4}$$

Werden das Hookesche Gesetz für inkompressibles Medium

$$s_x = 2\,G\,\epsilon_x \quad \text{usw.} \quad \tau_{rx} = G\,\gamma_{rx}$$

sowie die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen

$$\epsilon_x = u_{x,x}\,, \ \epsilon_r = u_{r,r}\,, \ \epsilon_\varphi = u_r/r\,, \ \gamma_{xr} = u_{r,x} + u_{x,r}$$

eingesetzt und anschließend integriert, so folgt

$$\sigma = -G\,(2\,u_{x,x} + u_r/r + u_{r,r} + \int (u_{x,x}/r + u_{x,rr})\,dx) + C_x\,, \ r \neq 0$$

$$\sigma = -G\,(2\,u_{r,r} + 2\,u_r/r + u_{x,x} + \int u_{r,xx}\,dr) + C_r\,.$$

Wegen der Inkompressibilitätsbedingung

$$u_r/r = -(u_{x,x} + u_{r,r})$$

ergibt sich

$$\sigma = -G\,(u_{x,x} + \int (u_{x,r}/r + u_{x,rr})\,dx) + C_x\,, \tag{5}$$

$$\sigma = -G\,(-u_{x,x} + \int u_{r,xx}\,dr) + C_r\,. \tag{6}$$

Die Auswertung kann sowohl nach Gl. (5) als auch nach (6) erfolgen; für den Fall, daß die Spannungen auf der Mantelfläche gegeben sind (1. Randwertaufgabe), am einfachsten nach (6). Es folgen dann die Normalspannungen

$$\sigma_x / G = 3\,u_{x,x} - S(r) + C\,, \tag{7}$$

$$\sigma_r / G = u_{x,x} + 2\,u_{r,r} - S(r) + C\,, \tag{8}$$

$$\sigma_\varphi / G = -u_{x,x} - 2\,u_{r,r} - S(r) + C\,, \tag{9}$$

wobei

$$S(r) = \int u_{r,xx}\,dr\,, \quad C = C_r / G\,.$$

Es ist also eine vollständige Auswertung aus den Isotheten eines Meridianschnittes möglich. Dabei sind u_x, u_r

praktisch kartesische Komponenten, wie sie mit dem Moiréverfahren üblicherweise gemessen werden.

Werden statt dessen die polaren Verschiebungskomponenten u_r, u_ϑ der Meridianebene ermittelt, so erfolgt die Auswertung zweckmäßigerweise in einem Kugelkoordinatensystem r, ϑ, φ.

2.2. Auswertung in Kugelkoordinaten

Die Gleichgewichtsbedingungen für den axialsymmetrischen Spannungszustand in Kugelkoordinaten folgen aus den allgemeinen Beziehungen nach Nowacki [4][2]), wenn die Ableitungen nach φ Null gesetzt werden, zu

$$r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial\vartheta} + 2\sigma_r - \sigma_\vartheta - \sigma_\varphi + \cot\vartheta\,\tau_{r\vartheta} = 0\,, \qquad (10)$$

$$r\frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta} + 3\tau_{r\vartheta} + \cot\vartheta\,(\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi) = 0\,. \qquad (11)$$

Nach entsprechender Aufspaltung in Kugeltensor und Deviator ergibt sich

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r} = -\frac{\partial s_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial\vartheta} - \frac{2}{r}s_r + \frac{1}{r}s_\vartheta + \frac{1}{r}s_\varphi - \frac{\cot\vartheta}{r}\tau_{r\vartheta}\,, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta} = -r\frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r} - \frac{\partial s_\vartheta}{\partial\vartheta} - 3\tau_{r\vartheta} - \cot\vartheta\,(s_\vartheta - s_\varphi)\,. \qquad (13)$$

Bemerkenswert ist, daß in diesen Gleichungen wie auch in (3), (4) der Kugeltensor nur jeweils in einem Glied stehen bleibt. Nach Einführen des Hookeschen Gesetzes sowie der Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen in Kugelkoordinaten

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}\,, \qquad \gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r}\,,$$

$$\epsilon_\vartheta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta} + u_r\right), \qquad \epsilon_\varphi = \frac{1}{r}\,(u_r + \cot\vartheta\, u_\vartheta)$$

und anschließender Integration folgen die Gleichungen

$$\sigma = -G\,(u_{r,r} + \cot\vartheta/r\cdot u_\vartheta + u_{\vartheta,\vartheta}/r + \int 1/r(6\,u_{r,r} + \cot\vartheta/r \cdot u_{r,\vartheta} + 1/r\cdot u_{r,\vartheta\vartheta})\,dr) + C_r \qquad (14)$$

$$\sigma = -G\,(3\,u_r/r + u_{r,r} + u_{\vartheta,\vartheta}/r + \int(-2\,u_\vartheta/r - 2\,u_{\vartheta,r} + r\,u_{\vartheta,rr} + \cot\vartheta\,(2\,u_r/r + u_{r,r} + 2\,u_{\vartheta,\vartheta}/r))\,d\vartheta) + C_\vartheta \qquad (15)$$

Gegenüber der Auswertung in Zylinderkoordinaten, Gl. (5), (6), sind diese Beziehungen erwartungsgemäß komplizierter. Vereinfachungen ergeben sich bei Beschränkung auf die Äquatorebene:
Wegen $\cot\vartheta = 0$ folgt dann aus (14)

$$\sigma = -G\,(u_{r,r} + u_{\vartheta,\vartheta}/r + \int 1/r\,(6\,u_{r,r} + 1/r\,u_{r,\vartheta\vartheta})\,dr) + C_r\,. \qquad (16)$$

Zu bemerken ist, daß sich in ähnlicher Weise ein Verfahren zur vollständigen Auswertung der Spannungen aufschreiben läßt, wenn von den Dehnungen statt von den Verschiebungen ausgegangen wird. Vom experimentellen Standpunkt aus gesehen ist eine solche Aufgabe natürlich evident, vgl. z. B. [6].

3. Numerische Auswertung

Die numerische Auswertung wird in Zylinderkoordinaten für den praktisch wesentlichen Fall ausgeführt, daß der Meridianschnitt ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit lastfreier Randkurve ist. Weitere Randwertprobleme lassen sich in ähnlicher Weise lösen. Die Konstante C wird mit der Randbedingung $\sigma_r(r_n) = 0$ aus Gl. (8) bestimmt zu

$$C - S(r_n) = -(u_{x,x} + 2\,u_{r,r}).$$

S (r) wird durch numerische Integration berechnet:

$$S(r) \approx \overset{k}{S} = 1/2 \sum_{i=1}^{k} (\overset{i}{u}_{r,xx} + \overset{i-1}{u}_{r,xx})\,\Delta r_i \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

wobei auf dem Rand

$$S(r_n) \approx \overset{n}{S}\,,$$

auf der Achse

$$\overset{o}{S} = 0\,, \qquad \overset{o}{u}_{r,xx} = 0$$

gilt.

Beginnt man, was wegen der Randbedingung zweckmäßig ist, mit der Integration am Außenrand, so folgt

$$\overset{k}{S} = \overset{n}{S} - 1/2 \sum_{i=n}^{k} (\overset{i+1}{u}_{r,xx} + \overset{i}{u}_{r,xx})\,\Delta r_i \quad k = (n-1), (n-2), \ldots, 0$$

und schließlich

$$C - \overset{k}{S} = -(u_{x,x} + 2\,u_{r,r}) + 1/2 \sum_{i=n}^{k} (\overset{i+1}{u}_{r,xx} + \overset{i}{u}_{r,xx})\,\Delta r_i\,. \qquad (17)$$

Diese Gleichung und die Beziehungen (7) bis (9) ermöglichen eine vollständige Auswertung eines axialsymmetrischen Spannungszustands aus den Verschiebungskomponenten u_x und u_r der Meridianebene.

4. Ausgleichsprozeduren

4.1. analytische Darstellung der Isotheten

Um die Verschiebungen und deren Ableitungen auf einem vorgegebenen Gitternetz zu ermitteln, ist es erforderlich, die Isotheten analytisch darzustellen. Als einfache Funktion wird die quadratische Parabel

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

gewählt. Ein Ausgleich erfolgt über das Fehlerquadratminimum, indem jeweils 4 Wertepaare x_i, u_i eingegeben werden. Das Gleichungssystem wird mittels einer Diagonalmatrix gelöst, um die schlecht konditionierte Matrix des globalen Koordinatensystems zu vermeiden, vgl. [7]. Der entsprechende Formelsatz lautet

$$a = \tilde{a}\,, \qquad b = \tilde{a}\alpha + \tilde{b}\,, \qquad c = \tilde{a}\beta + \tilde{b}\gamma + c \qquad (19)$$

$$\alpha = -\frac{\Sigma\, x_i^2\,(x_i - \overline{x})}{\Sigma\, x_i\,(x_i - \overline{x})}\,, \quad \beta = \alpha\gamma - \Sigma\, x_i^2/4\,, \quad \gamma = -1/4\,\Sigma\, x_i \qquad (20)$$

$$\tilde{a} = \frac{\Sigma (x_i^2 + \alpha x_i + \beta) u_i}{\Sigma (x_i^2 + \alpha x_i + \beta)^2}, \quad \tilde{b} = \frac{\Sigma (x_i + \gamma) u_i}{\Sigma (x_i + \gamma)^2}, \quad \tilde{c} = 1/4 \, \Sigma u_i . \quad (21)$$

4.2. *Ausgleich der Dehnungen in einem Punkt*

Der Ausgleich der Dehnungen in einem Punkt erfolgt über das Fehlerquadratminimum mittels der Inkompressibilitätsbedingung. Die gemessenen Dehnungen seien mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet, die dazu gehörigen Gewichte p_1, p_2, p_3. Ohne die Allgemeingültigkeit einzuschränken, wird $p_3 = 1$ gesetzt. Die ausgeglichenen Werte der Dehnungen seien $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$. Die Ausgleichsbedingung lautet dann, daß

$$y = (p_1 (a_1 - \bar{a}_1))^2 + (p_2 (a_2 - \bar{a}_2))^2 + (a_3 - \bar{a}_3)^2$$

ein Minimum wird, mit der Nebenbedingung

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 = 0 .$$

Für die ausgeglichenen Dehnungen folgen daraus die Beziehungen

$$\bar{a}_1 = \frac{(p_2^2 + 1) p_1^2 a_1 - p_2^2 (a_2 + a_3)}{(p_1^2 + 1)(p_2^2 + 1) - 1}, \quad (22)$$

$$\bar{a}_2 = \frac{-\bar{a}_1 + p_2^2 a_2 - a_3}{p_2^2 + 1}, \quad (23)$$

$$\bar{a}_3 = \frac{-\bar{a}_1 p_2^2 - p_2^2 a_2 + a_3}{p_2^2 + 1} . \quad (24)$$

Bei Auswertung in Zylinderkoordinaten, wenn

$$a_1 = u_{x,x}, \quad a_2 = u_r / r, \quad a_3 = u_{r,r}$$

sind, können die Gewichte festgelegt werden durch

$$p_1, \quad p_2 = q r / r_n + 1, \quad p_3 = 1,$$

wobei p_2 koordinatenabhängig ist und für $r = 0$ $p_2 = p_3$ gilt. Als praktischen Messungen angepaßte Werte ergaben sich z. B. $p_1 = 2$, $q = 4$ [8].

5. Zusammenfassung

Es wird ein Verfahren zur vollständigen Auswertung achsensymmetrischer Spannungsfelder aus Isotheten (Verschiebungskomponenten) vorgestellt. Da das Verfahren primär zur Auswertung von Modellversuchen nach dem Erstarrungsverfahren dienen soll, wird Inkompressibilität des Materials angenommen, womit sich gewisse Vereinfachungen ergeben. Das Verfahren beruht auf der Integration der Spannungsgleichgewichtsbedingungen. Es ist in Zylinder- und Kugelkoordinaten hergeleitet. Eingabegrößen sind die Isotheten und deren Ableitungen in der Meridianebene in kartesischen bzw. polaren Koordinaten.

Da die Isotheten von der Messung her nur an diskreten Stellen vorliegen, ist eine analytische Darstellung derselben erforderlich. Dazu dient eine quadratische Parabel die aus jeweils vier Meßpunkten ausgleichend berechnet wird. Anschließend erfolgt noch ein Ausgleich der Dehnungen an einem Punkt des Gitternetzes mittels der Inkompressibilitätsbedingung. Die im Verfahren enthaltene numerische Integration ist für den praktisch wesentlichen Fall ausgeführt, daß der Meridianschnitt ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit lastfreier Randkurve ist. Der Test des Auswerteverfahrens erfolgte am Beispiel der diametral gedrückten Kugel und wird demnächst veröffentlicht [8]. Analog zu dem behandelten Auswerteverfahren läßt sich eine Methode zur vollständigen Auswertung der Spannungen angeben, bei dem die Dehnungen statt der Verschiebungen Eingabegrößen sind.

1) Die Koordinaten sollen wie üblich ein Rechtssystem bilden, so daß auf eine entsprechende Skizze verzichtet werden kann.

2) Die Gleichgewichtsbedingungen finden sich zwar auch in dem Buch von Amenzade [5], sind dort aber fehlerbehaftet.

LITERATUR

[1] Ullmann, K.: Das Moireverfahren zur Untersuchung komplizierter räumlicher Probleme. Wiss. Z. Techn. Universität Dresden 21 (1972) 1, 193 – 196.

[2] Ullmann, K. / M. Stockmann: Evaluation accuracy of moiré measurements by the isothetic method. Sbornik Referátů 20. Konference EAN, Karlovy Vary 31. 5. – 3. 6. 1982, III, 39 – 44.

[3] Naumann, J.: Beitrag zur experimentellen Untersuchung plastischer Fließvorgänge mit dem Moiréverfahren. Dissertation. Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt 1973/74.

[4] Novackij, V.: Teorija uprugosti. Moskva: Izdatel'stvo Mir 1975, 178.

[5] Amenzade, Ju. A.: Teorija uprugosti. 3. Aufl., Moskva: Vysšaja škola 1976, 42.

[6] Eppele, O. B. / M. L. Meyer: Measurement of thermal strains by strain gauges embedded in epoxy models. Experimental Stress Analysis. The Instn. Mech. Engrs. 1970, pap. 1.

[7] Späth, H.: Algorithmen für elementare Ausgleichsmodelle. München/Wien: Oldenburg-Verlag 1973, 43 – 44.

[8] Stockmann, M. / K. Ullmann: Test eines Auswerteverfahrens für axialsymmetrische Spannungszustände am Beispiel der diametral gedrückten Kugel. Techn. Mechanik, demnächst.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Klaus Ullmann
VEB Schwermaschinenbau
„Karl Liebknecht"

3011 Magdeburg
Alt-Salbke 6 – 10