

# Zur Berechnung des nichtlinearen dynamischen Verhaltens von Stab- und Seilstrukturen mit Hilfe eines modifizierten Newmark-Verfahrens

M. Weber

## 1. Einleitung

Um nichtstationäre und nichtlineare Probleme genauer untersuchen zu können, sind in den letzten Jahren verstärkt Verfahren zur direkten zeitlichen Integration dynamischer Systeme entwickelt worden. In [5] wurden die wichtigsten Verfahren einander gegenübergestellt und nach der Art ihrer Herleitung klassifiziert. Von den derzeit bekannten Zeitintegrationsverfahren hat das Newmark-Verfahren die größte Verbreitung gefunden. In dieser Arbeit soll ein modifiziertes Newmark-Verfahren zur Behandlung geometrisch nichtlinearer Schwingungsprobleme vorgestellt werden. Dabei werden große Verschiebungen mit kleinen Verzerrungen vorausgesetzt, wie sie bei Stab- und Seilkonstruktionen auftreten können.

## 2. Herleitung des Verfahrens

Das Newmark-Verfahren gewinnt man mit Hilfe eines  $\vartheta$ -Ansatzes zur Integration des Beschleunigungsvektors  $\ddot{\vec{r}}(t)$  im Zeitintervall  $[t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}(t) &= (1-\vartheta)\ddot{\vec{r}}_0 + \vartheta\ddot{\vec{r}}_1 = \text{const.}, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \\ \ddot{\vec{r}}_1 &= \ddot{\vec{r}}(t_1), \quad i=0, 1, \quad \frac{1}{2} \leq \vartheta \leq 1, \quad \vartheta = \text{const.} \end{aligned} \quad (1)$$

Integriert man diesen Ausdruck über das Zeitintervall  $\tau = t_1 - t_0$ , so erhält man einen Ausdruck für den Geschwindigkeitsvektor bei  $t_1$

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_0 + \tau [(1-\vartheta)\ddot{\vec{r}}_0 + \vartheta\ddot{\vec{r}}_1] \quad (2)$$

und eine zweite Integration führt auf den Verschiebungsvektor bei  $t_1$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \tau \dot{\vec{r}}_0 + \tau^2 \left[ \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\vec{r}}_0 + \beta\ddot{\vec{r}}_1 \right] \quad (3)$$

$$\frac{1}{12} \leq \beta \leq \frac{1}{2} \quad \beta = \text{const.},$$

wobei  $\beta (= \frac{1}{2}\vartheta)$  als neue unabhängige Konstante definiert wurde. Die Vektoren  $\ddot{\vec{r}}_1$ ,  $\dot{\vec{r}}_1$  und  $\vec{r}_1$  müssen zum Zeitpunkt  $t_1$  die nichtlineare Schwingungsdifferentialgleichung

$$\underline{M}\ddot{\vec{r}}_1 + \underline{D}\dot{\vec{r}}_1 + \underline{K}(\vec{r}_1) \cdot \vec{r}_1 = \vec{f}_1 \quad (4)$$

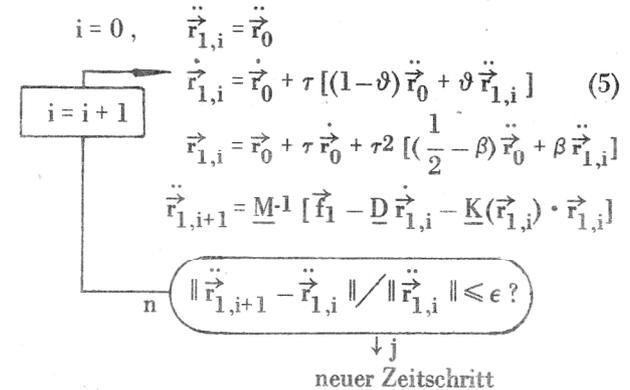
erfüllen. Dabei ist  $\underline{M}$  bzw.  $\underline{D}$  die konstante Massen- bzw. Dämpfungsmatrix,  $\underline{K}(\vec{r})$  die vom Verschiebungszustand

abhängige Struktursteifigkeitsmatrix des Gesamtsystems und  $\vec{f}_1$  der Belastungsvektor bei  $t_1$ .

Da in (4) keine linearen Zusammenhänge mehr vorliegen, ist generell eine Iteration innerhalb des Zeitintervalls notwendig. Für die Aufstellung des Iterationsalgorithmus ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, von denen im folgenden zwei ausführlicher vorgestellt werden sollen.

### 2.1. Explizites Verfahren

Aus (1) bis (4) läßt sich sofort ein Iterationsalgorithmus gewinnen, wobei  $\underline{M}$  als positiv definit vorausgesetzt wird:



Dieses Verfahren wurde von Newmark bereits 1959 in [4] vorgeschlagen. Damit das Verfahren konvergiert, muß die Integrationsschrittweite  $\tau$  immer kleiner als die Konvergenzschranke

$$\tau_K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\beta}} \cdot T_{\min} \quad (6)$$

sein; mit  $T_{\min}$  als kleinster Eigenschwingungsdauer des im Zeitintervall linearisierten Problems ( $\underline{K}(\vec{r}_1) = \underline{K}_1 = \text{const.}$ ).

### 2.2. Implizites Verfahren

Durch Einsetzen von (2) und (4) in (3) ergibt sich nach entsprechender Umstellung ein implizites Newmark-Verfahren zur Berechnung von  $\vec{r}_1$ :

$$\begin{aligned} [a_0 \underline{M} + a_1 \underline{D} + \underline{K}(\vec{r}_1)] \cdot \vec{r}_1 &= M(a_0 \vec{r}_0 + a_2 \dot{\vec{r}}_0 + a_3 \ddot{\vec{r}}_0) \\ &+ \underline{D}(a_1 \vec{r}_0 + a_4 \dot{\vec{r}}_0 + a_5 \ddot{\vec{r}}_0) + \vec{f}_1 \end{aligned} \quad (7)$$

Mit den Abkürzungen

$$a_0 = \frac{1}{\beta\tau^2} \quad a_2 = \frac{1}{\beta\tau} \quad a_4 = \frac{\vartheta}{\beta} - 1$$

$$a_1 = \frac{\vartheta}{\beta\tau} \quad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 \quad a_5 = \frac{\tau}{2} \left( \frac{\vartheta}{\beta} - 2 \right)$$

und den Beziehungen für den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor bei  $t_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_1 &= a_0(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) - a_2\dot{\vec{r}}_0 - a_3\ddot{\vec{r}}_0 \\ \ddot{\vec{r}}_1 &= a_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) - a_4\dot{\vec{r}}_0 - a_5\ddot{\vec{r}}_0 \end{aligned} \quad (8)$$

In [2] wurde das Verfahren (7), (8) für lineare Systeme hergeleitet. Für diesen Fall ( $\underline{K} = \text{const}$ ) werden innerhalb des Zeitschrittes keine Iterationen benötigt und das Verfahren ist für  $\vartheta = \frac{1}{2}$  und  $\beta = \frac{1}{4}$  unbedingt stabil, d. h. die

Integrations-schrittweite  $\tau$  wird nur durch die Genauigkeitsanforderungen bestimmt.

Bei nichtlinearen Problemen mit  $\underline{K} = \underline{K}(\vec{r})$  ist aber auch beim impliziten Verfahren eine Iteration innerhalb des Zeitschrittes notwendig.

Da die rechte Seite von (7) für jeden Zeitschritt konstant ist, kann man diese Gleichung auch als dynamische Gleichgewichtsbeziehung

$$\hat{\underline{K}}(\vec{r}_1) \cdot \vec{r}_1 = \hat{\vec{f}}_1 \quad (7a)$$

auffassen.  $\hat{\underline{K}}$  wird deshalb im folgenden als „dynamische Steifigkeitsmatrix“ bezeichnet.

Für ein brauchbares Verfahren ist es notwendig, daß  $\hat{\underline{K}}$  möglichst während des gesamten Integrationsprozesses konstant bleibt. Deshalb wird die Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}(\vec{r}_1)$  in einen linearen Anteil  $\underline{K}_L$  und einen vom Verschiebungszustand  $\vec{r}_1$  abhängigen Anteil  $\Delta\underline{K}(\vec{r}_1)$  zerlegt:

$$\underline{K}(\vec{r}_{1,i}) = \underline{K}_L + \Delta\underline{K}(\vec{r}_{1,i}) = \underline{K}_L + \Delta\underline{K}_i \quad (9)$$

Außerdem wird

$$\vec{r}_{1,i} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}_i \quad (10)$$

verwendet. Nach dem Einsetzen von (9) und (10) in (7) und entsprechender Umstellung ergibt sich:

$$\begin{aligned} [a_0\underline{M} + a_1\underline{D} + \underline{K}_L] \cdot \Delta\vec{r}_{i+1} &= \underline{M}(a_2\ddot{\vec{r}}_0 + a_3\ddot{\vec{r}}_0) + \\ &+ \underline{D}(a_4\dot{\vec{r}}_0 + a_5\ddot{\vec{r}}_0) + \vec{f}_1 + \underline{K}_L \cdot \Delta\vec{r}_i - \underline{K}(\vec{r}_{1,i}) \cdot \vec{r}_{1,i} \end{aligned} \quad (11)$$

Die Matrix  $\underline{K}_L$  kann man z. B. durch Mittelwertbildung aus zwei unterschiedlichen statischen Gleichgewichtszuständen erhalten

$$\underline{K}_L = \frac{1}{2} (\underline{K}(\vec{x}_e) + \underline{K}(\vec{x}_1)) \quad (12)$$

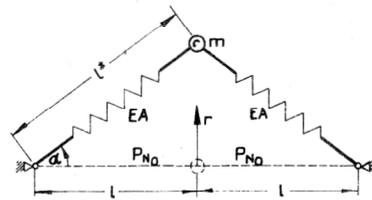
wobei  $\underline{K}(\vec{x}_e)$  bzw.  $\underline{K}(\vec{x}_1)$  die zum Eigengewichts- und Vorspannungszustand bzw. die zum maximalen statischen Lastfall gehörende tangentielle Steifigkeitsmatrix ist.

Weiterhin ist es günstig,  $\Delta\vec{r}_i$  noch weiter aufzuspalten und die Beziehung

$$\Delta\vec{r}_i = \Delta\vec{r}_0 + \sum_{j=1}^i \delta\vec{r}_j = \Delta\vec{r}_{i-1} + \delta\vec{r}_i \quad (13)$$

zu verwenden, um in jedem Iterationsschritt nur noch den iterativen Zuwachs  $\delta\vec{r}_i$  zu berechnen. Man erhält dann aus (11) und (13) die Iterationsbeziehung:

$$\begin{aligned} [a_0\underline{M} + a_1\underline{D} + \underline{K}_L] \cdot \delta\vec{r}_{i+1} &= \underline{M}(a_2\ddot{\vec{r}}_0 + a_3\ddot{\vec{r}}_0 - a_0\Delta\vec{r}_i) + \\ &+ \underline{D}(a_4\dot{\vec{r}}_0 + a_5\ddot{\vec{r}}_0 - a_1\Delta\vec{r}_i) - \underline{K}(\vec{r}_{1,i}) \cdot \vec{r}_{1,i} + \vec{f}_1 \end{aligned} \quad (14)$$



$$\begin{aligned} m &= 5 \text{ kg} \\ l &= 100 \text{ cm} \\ P_{N0} &= 500 \text{ N} \\ EA &= 10^7 \text{ N} \end{aligned}$$

**Bild 1**  
Nichtlineares Schwingungssystem

Vergleicht man die Klammerausdrücke auf der rechten Seite von (14) mit (8), so erkennt man, daß man zwischen den Klammern genau die Beziehungen für  $-\dot{\vec{r}}_{1,i}$  und  $-\ddot{\vec{r}}_{1,i}$  erhalten hat. Somit steht auf der rechten Seite von (14) die Schwingungsdifferentialgleichung (4). Da für kleine „i“ die Vektoren  $\vec{r}_{1,i}$ ,  $\dot{\vec{r}}_{1,i}$ ,  $\ddot{\vec{r}}_{1,i}$  Gleichung (4) nicht exakt erfüllen, erhält man zunächst aus (4) noch „dynamische Ungleichgewichtskräfte“

$$\vec{f}_{u,i} = -\underline{M}\ddot{\vec{r}}_{1,i} - \underline{D}\dot{\vec{r}}_{1,i} - \underline{K}(\vec{r}_{1,i}) \cdot \vec{r}_{1,i} + \vec{f}_1 \quad (15)$$

die mit zunehmendem „i“ gegen Null streben.

Für die Berechnung der rechten Seiten ist es in (11), (14) und (15) immer noch notwendig  $\underline{K}(\vec{r}_{1,i})$  in jedem Iterationsschritt neu aufzubauen. Bei Stab- und Balkenstrukturen ist es aber günstiger, den Vektor der elastischen Knotenkräfte

$$\vec{R}(\vec{r}_{1,i}) = \underline{K}(\vec{r}_{1,i}) \cdot \vec{r}_{1,i} \quad (16)$$

der der Überlagerung der Elementschnittkräfte in den Knotenpunkten entspricht, unmittelbar aus den Elementverschiebungen zu bestimmen, und die Struktursteifigkeitsmatrix  $\underline{K}(\vec{r}_{1,i})$  gar nicht mehr aufzubauen (vgl. [1]). Damit ergibt sich schließlich der vollständige Integrationsalgorithmus: Fortsetzung auf Seite 17

$$\underbrace{[a_0 \underline{M} + a_1 \underline{D} + \underline{K}_L]}_{\hat{\underline{K}}} \cdot \Delta \vec{r} = \underline{M}(a_2 \dot{\vec{r}}_0 + a_3 \ddot{\vec{r}}_0) + \underline{D}(a_4 \dot{\vec{r}}_0 + a_5 \ddot{\vec{r}}_0) - \underline{K}(\vec{r}_1) \cdot \vec{r}_1 + \underline{K}_L \cdot \Delta \vec{r} + \vec{f}_1$$

$$\approx \vec{R}(\vec{r}_0)$$

und  $c$  ein Maß für die Nichtlinearität (Es wurde in [6] vorausgesetzt, daß gilt:  $\Delta K(r) \approx c \cdot K_L$ ,  $0 \leq c \leq 1$ ). Bei wachsender Anzahl von Freiheitsgraden strebt  $(\frac{T_{\min}}{T_{\max}})^2 \rightarrow 0$  so daß die zulässige Iterationsschrittweite im wesentlichen von  $c$  bestimmt wird. Für stark nichtlineare Systeme gilt  $c \rightarrow 1$  und somit strebt auch  $w \rightarrow 1$ , d. h. die maximal zulässige Integrationsschrittweite des impliziten Verfahrens stimmt für diesen Fall mit der des expliziten Verfahrens überein. Anderenfalls ist  $w > 1$ , und für  $c \rightarrow 0$  strebt  $w \rightarrow \infty$  (d. h. bei linearen Systemen existiert keine Konvergenzschranke). Somit sind mit dem impliziten Algorithmus (17) fast immer größere Schrittweiten möglich als mit den expliziten Verfahren (5).

### 3. Numerische Beispiele

Der unter (17) angegebene Integrationsalgorithmus, der im folgenden als „modifiziertes Newmark-Verfahren“ (mNV) bezeichnet wird, wurde programmiert und anhand von Beispielrechnungen getestet. Dabei zeigte sich, daß das mNV im Vergleich zu anderen, aus der Literatur bekannten Zeitintegrationsverfahren, sehr gute numerische Eigenschaften (bzgl. numerischer Stabilität und erreichbarer Genauigkeit) besitzt.

#### 3.1. Vorgespanntes Seil mit einem Freiheitsgrad

Zunächst wurde ein nichtlineares System untersucht, das aus einer Punktmasse und zwei vorgespannten Federn (Seilen) besteht und im Bild 1 (Seite 16) dargestellt ist. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m\ddot{r} + d\dot{r} + R = f(t) \quad (20)$$

Aus Bild 1 kann man direkt

$$l^* = \sqrt{l^2 + r^2}, \quad \sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}} \quad (21)$$

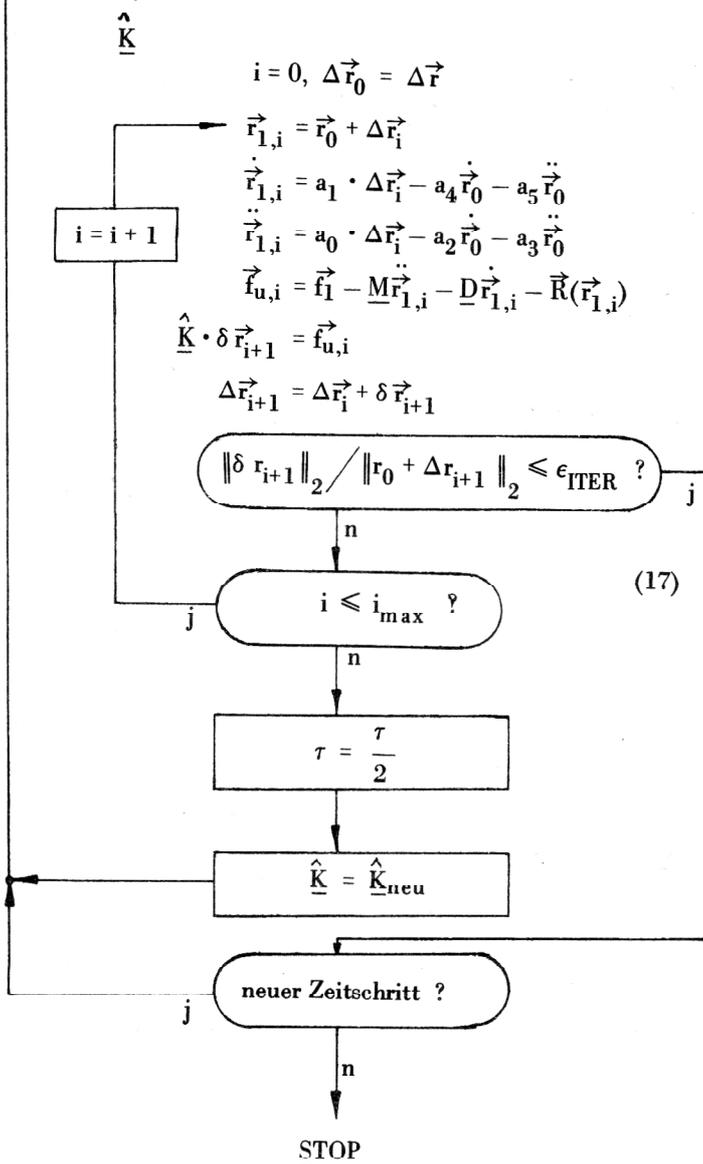
entnehmen. Für die elastische Rückstellkraft  $R$ , die an der Punktmasse wirkt, ergibt sich somit

$$R(r) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot (P_{N0} + E \cdot A \cdot \frac{l^* - l}{l}) \quad (22)$$

Durch Einsetzen von (21) und (22) in (20) erhält man die nichtlineare Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} + d\dot{r} + 2 \cdot P_{N0} \cdot \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}} + 2 \cdot E \cdot A \cdot \frac{r}{l} \cdot \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}\right) = f(t) \quad (23)$$

Dieses Beispiel wurde bereits in [1] ausführlich untersucht, so daß es besonders geeignet war, daran das modifizierte Newmark-Verfahren bezüglich seines Fehlerver-



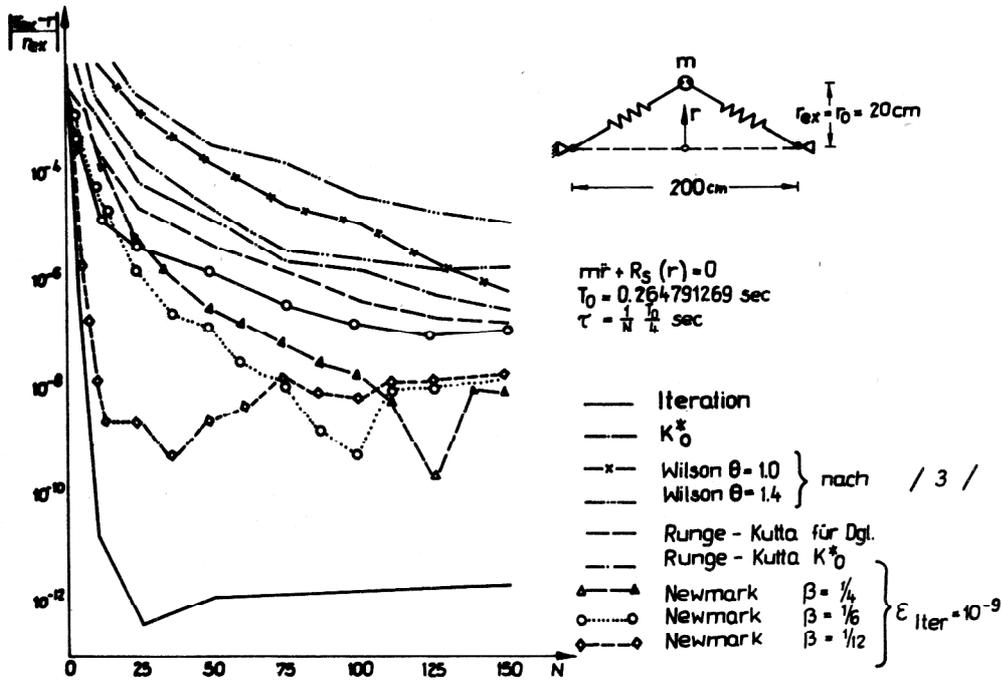
Die Konvergenzschranke für den in [6] ausführlich hergeleiteten Algorithmus (17) lautet:

$$\tau_{\max K} = \sqrt{\frac{1}{(c - (\frac{T_{\min}}{T_{\max}})^2) \cdot \beta}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot T_{\min} \quad (18)$$

Diese unterscheidet sich von der unter (6) angegebenen Konvergenzschranke des expliziten Verfahrens nur durch den Wurzelausdruck

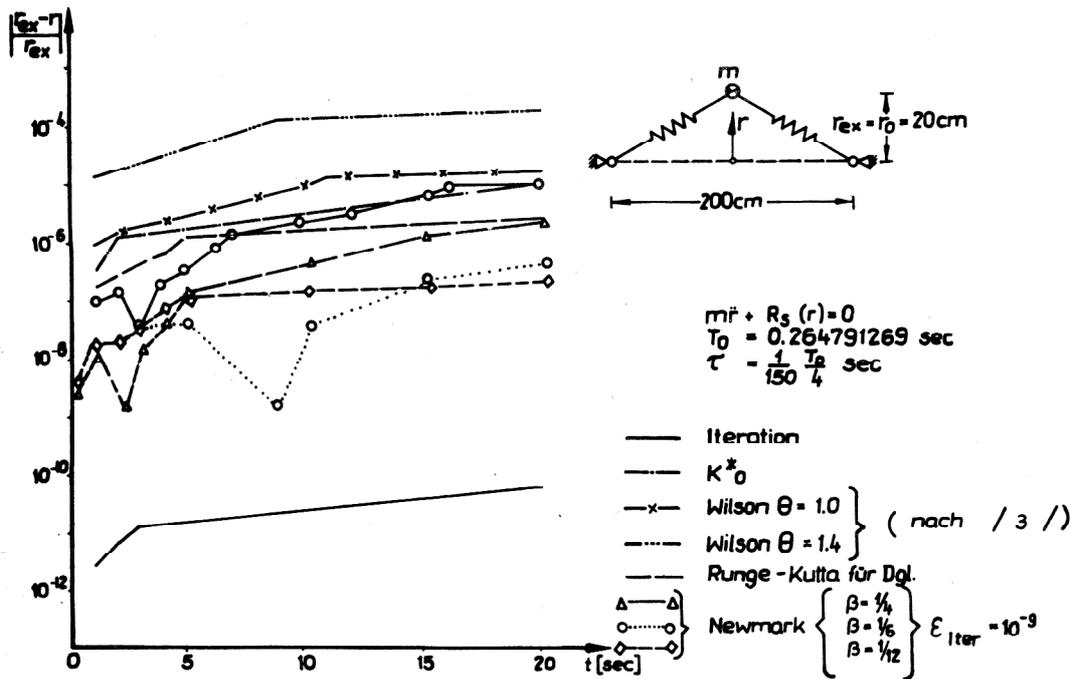
$$w = \sqrt{\frac{1}{c - (\frac{T_{\min}}{T_{\max}})^2}} \quad (19)$$

Dabei ist  $(\frac{T_{\min}}{T_{\max}})$  das Verhältnis der kleinsten zur größten Eigenschwingungsdauer des diskretisierten Systems



**Bild 2**  
Relativer Fehler der Verschiebungen für die freie Schwingung in Abhängigkeit von der Schrittweite  $\tau$  (nach 3 Perioden)

**Bild 3**  
Relativer Fehler der Verschiebungen während 80 Perioden



haltens zu testen. Die Bilder 2 bis 5 konnten deshalb direkt aus [1] entnommen und durch die Resultate des mNV ergänzt werden.

Zunächst wurde die freie, ungedämpfte Schwingung des Systems untersucht, die sich ergibt, wenn die Masse bei einer Anfangsbedingung  $r = 20 \text{ cm}$  mit  $\dot{r} = 0$  losgelassen wird. Das System führt dann periodische Schwingungen mit einer Schwingungsdauer  $T_0 = 0.265 \text{ s}$  aus. Die Integrationsschrittweiten aller folgenden Untersuchungen werden auf diese Zeit  $T_0$  bezogen, wobei wir die Schrittweite  $\tau$  folgendermaßen definieren:

$$\tau = \frac{1}{N} \cdot \frac{T_0}{4} \quad \text{mit } N = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Bild 2 zeigt für den angegebenen Fall den relativen Fehler der Auslenkung in Abhängigkeit von der Anzahl  $N$  der Unterteilungen einer Viertelperiode. Der relative Fehler wird definiert durch

$$f_e = \left| \frac{r_{ex} - r}{r_{ex}} \right| \quad (25)$$

mit

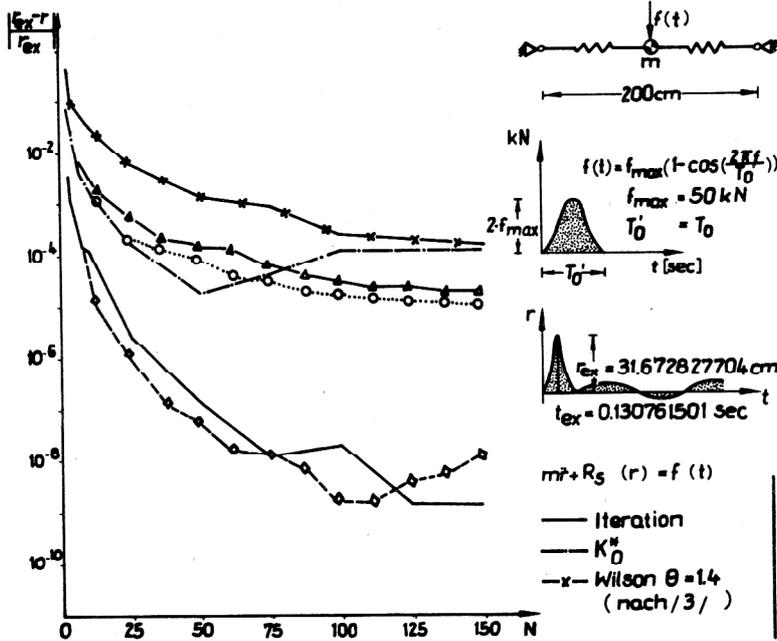
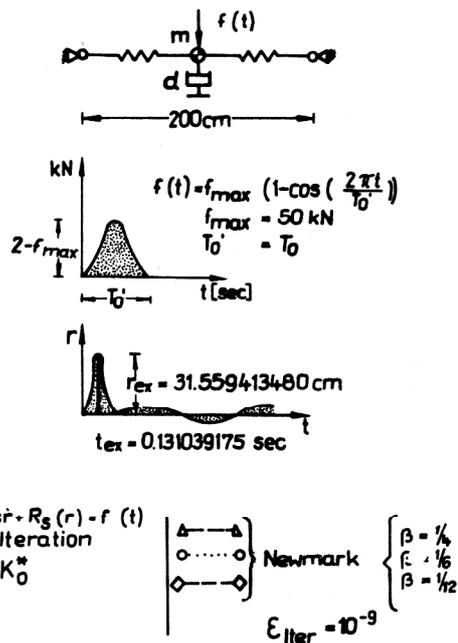
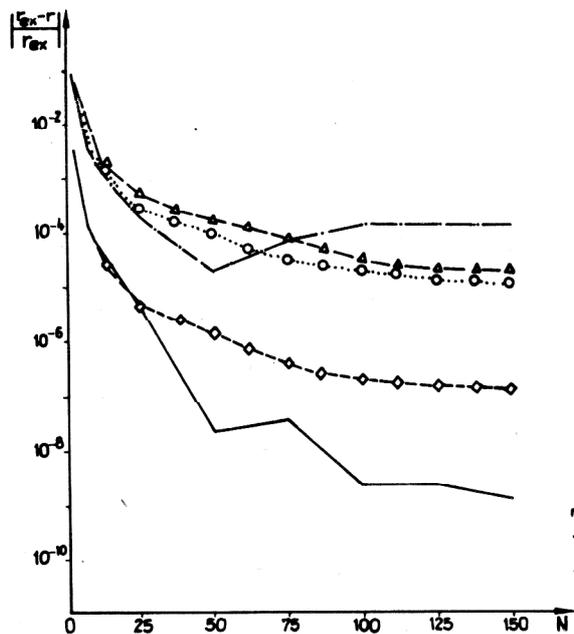


Bild 4  
Relativer Fehler der Verschiebungen für fremderregtes System in Abhängigkeit von der Schrittweite

Bild 5  
Relativer Fehler der Verschiebungen für fremderregtes gedämpftes System in Abhängigkeit von der Schrittweite



$$r_{ex} = 20 \text{ cm}$$

$$r = t(t_{end}) \quad , \quad t_{end} = 3 \cdot T_0 = 0,795 \text{ s.}$$

In [1] wurden bereits die folgenden Verfahren verglichen:

1. ein rein iteratives explizites Verfahren von Argyris/Dunne/Angelopoulos, das in [1] aus einem kubischen Ansatz für  $\vec{r}(t)$  hergeleitet worden war, wobei analog zu (17) die Systemsteifigkeitsmatrix gar nicht mehr aufgebaut wird, sondern die elastischen Knotenkräfte unmittelbar aus den Elementverschiebungen berechnet werden (diese Methode wird in den Bildern 2 bis 5 mit Iteration bezeichnet),

2. ein iteratives explizites Verfahren von Argyris/Dunne/Angelopoulos analog zu 1. wobei die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_0^*$  als Mittelwert aus den Matrizen  $\underline{K}(\vec{r}_0)$  und  $\underline{K}(\vec{r}_1)$  vom Anfang und Ende des Zeitschrittes berechnet wurde,
3. das Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf die Differentialgleichung (23),
4. das Runge-Kutta-Verfahren mit  $\underline{K}_0^*$ ,
5. das Verfahren von Wilson mit tangentialer Steifigkeitsmatrix (ohne Iteration) nach [3] mit  $\Theta = 1,0$  und  $\Theta = 1,4$ .

Bild 2 zeigt neben den Ergebnissen, die nach [1] mit diesen fünf Verfahren erhalten wurden, auch die Kurven, die sich mit dem modifizierten Newmark-Verfahren für  $\beta = \frac{1}{12}$ ,  $\beta = \frac{1}{6}$  und  $\beta = \frac{1}{4}$  ( $\vartheta = \frac{1}{2}$ ) bei einem zulässigen relativen Fehler für die Iteration von  $\epsilon_{\text{Iter}} = 10^{-9}$  ergaben.

Aus Bild 2 wird deutlich, daß sich mit dem mNV schon mit  $\beta = \frac{1}{4}$  sehr gute Ergebnisse erreichen lassen.

In Bild 3 ist das Verhalten des relativen Fehlers der Verschiebung der freien ungedämpften Schwingung während 80 Perioden dargestellt.

Für die in den Bildern 4 und 5 dargestellten Fälle wurde der Fehler auf diejenigen Werte bezogen, welche die Integration der Differentialgleichung (23) nach dem Runge-Kutta-Verfahren mit der Schrittweite  $\tau = 10^{-6}$  s liefert

In allen Fällen ist die rein iterative Lösung nach Argyris/Dunne/Angelopoulos den anderen Methoden überlegen. Doch zeigt sich, daß die Ergebnisse des modifizierten Newmark-Verfahrens mit  $\beta = \frac{1}{4}$ , das aus einem konstanten  $\vartheta$ -Ansatz im Zeitintervall erhalten wurde, vergleichbar mit denen der  $K_0^*$ -Methode von Argyris/Dunne/Angelopoulos sind, welche mit Hilfe eines kubischen Ansatzes im Zeitintervall hergeleitet worden war. Diese Aussage konnte auch bei anderen Rechnungen bestätigt werden.

### 3.2. Abgespannter Antennenmast

Als Beispiel von praktischer Bedeutung wurde das dynamische Verhalten eines abgespannten Antennenmastes mit Hilfe des mNV untersucht. Bisher wurde für den Festigkeits-Nachweis für den Mastschaft das lineare Ersatzmodell eines Durchlaufträgers auf elastischen Stützen (Bild 6a) verwendet, wobei sich die Federsteifigkeiten aus den Belastungsrichtungen der Pardunenbündel ergeben.

Die Federwirkung der Pardunen-Bündel ist nichtlinear und bezüglich der Nullage (Vorspannungszustand) nichtsymmetrisch. Da der Mast bei Windanregung keine periodische Bewegung sondern eine Taumelbewegung ausführt, ist die Berechnung des dynamischen Verhaltens sehr schwierig und wurde bisher nicht durchgeführt.

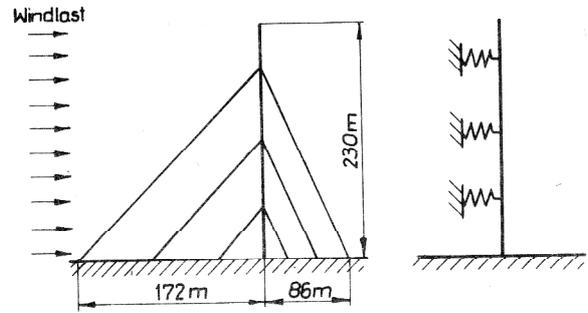
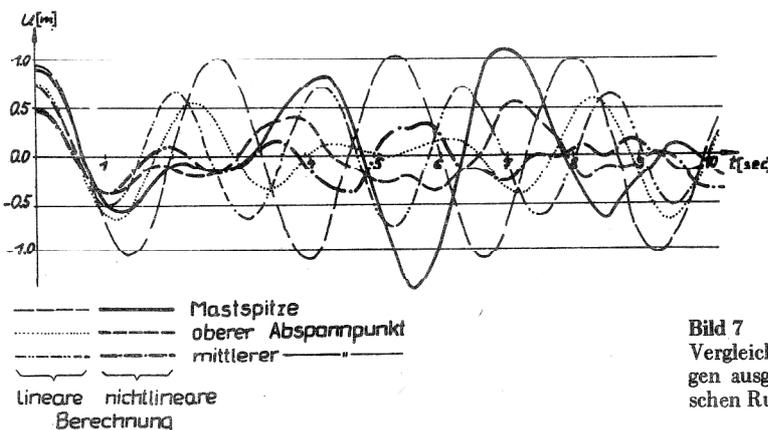


Bild 6  
Abgespannter Antennenmast

Bild 6a  
lineares Ersatzmodell

Stattdessen erfolgte nur eine statische Untersuchung des linearen Ersatzmodells mit statischen Ersatzkräften, die in ihrer Wirkung der gesamten Windlast äquivalent sind. Für den in Bild 6 dargestellten Mast wurde ein Vergleich von linearer und nichtlinearer Berechnung durchgeführt. Dabei zeigte sich, daß man zwar bei der statischen Berechnung eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem linearen und dem nichtlinearen Modell erhält, doch ergeben sich bei der dynamischen Untersuchung wesentliche Abweichungen.

Wie aus Bild 7 ersichtlich, ergibt sich infolge der Rückwirkungen aus den Seilen schon beim einfachen Ausschwingvorgang ein ziemlich komplizierter nichtperiodischer Kurvenverlauf für jeden Mastpunkt und es kommt zu größeren Auslenkungen als bei der linearen Rechnung, was größere Spannungen im Mastschaft zur Folge hat.

Zweifellos ist die nichtlineare Berechnung um ein Vielfaches aufwendiger als die lineare, wie die nachfolgende Gegenüberstellung zeigt:

	nichtlineares Modell	lineares Modell
Anzahl der Freiheitsgrade	109	29
Rechenzeit für die Zeitintegration über 10 s mit $\tau = 0,05$ s	370 s	12 s

Bild 7  
Vergleich der Verschiebungsverläufe der Horizontalverschiebungen ausgewählter Mastpunkte beim Ausschwingen aus der statischen Ruhelage bei linearer und nichtlinearer Berechnung

Das mNV läßt sich in solchen Fällen jedoch sehr gut zur Bestimmung von Stoß- und Biegekeitsfaktoren verwenden, mit deren Hilfe dann auch beim linearisierten Ersatzmodell die maximale Belastung richtig erfaßt wird.

#### 4. Schlußbemerkung

Abschließend kann eingeschätzt werden, daß das in [6] hergeleitete modifizierte Newmark-Verfahren (17) sehr gute numerische Eigenschaften bezüglich numerischer Stabilität und erreichbarer Genauigkeit besitzt, daß es größere Schrittweiten als das rein explizite Newmark-Verfahren zuläßt und daß es zur Behandlung geometrisch nichtlinearer Probleme sehr gut geeignet ist.

#### LITERATUR

- [1] Angelopoulos, T.: Zur Formfindung und Dynamik von vorgespannten Netzwerkkonstruktionen, Dissertation TU Stuttgart, 1975
- [2] Bathe, K.-J.; Wilson, E.L.: Numerical methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, Englewood cliffs, New Jersey, 1976
- [3] Clough, R.W.; Wilson, E.L.: Dynamic Finite Element Analysis of Arbitrary Thin Shells, Computers & Structures, 1 (1972), 33 – 55
- [4] Newmark, N.M.: A Method of Computation for Structural Dynamics, Proceedings ASCE 85, EM 3 (1959)
- [5] Weber, M.: Klassifizierung der Verfahren zur Zeitintegration dynamischer Systeme mit Betrachtungen über Stabilität und Verfahrensfehler. Report R-Mech-01/81. AdW der DDR-IMEch, Berlin 1981
- [6] Weber, M.: Zur Klassifizierung der Zeitintegrationsverfahren für dynamische Systeme und deren Anwendung auf nichtlineare Stabstrukturen, bei der TU Dresden als Dissertation eingereicht, 1982

Anschrift des Verfassers:  
Dipl.-Ing. M. Weber  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Institut für Mechanik  
1199 Berlin  
Rudower Chaussee 5