

Bruchkriterien bei statischer und schwingender Beanspruchung

K.-F. Fischer

1. Einleitung

Innerhalb der Wissenschaftsdisziplin Bruchmechanik sind die Bruchkriterien das entscheidende Bindeglied zwischen der Festkörpermechanik (Ermittlung von Beanspruchungen an Rimodellen bzw. charakteristischer Größen zur Beurteilung der Stabilität von Rissen) und der Werkstoffwissenschaft (Werkstoffprüfung, Ermittlung von kritischen Werten charakteristischer Größen – Werkstoffkennwerten). Der Formulierung von Sprdbruchkriterien, d. h. der Annahme elastischen Werkstoffverhaltens bis zum Bruch, auf der Grundlage der makroskopisch kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise kommt auch heute noch große Bedeutung zu. Während man im Falle statischer Beanspruchung in gewissen Grenzen in der Lage ist, Aussagen zur Ristabilitt sowohl bei einfacher als auch bei Mixed-Mode-Rißöffnung zu machen, ist eine solche allgemeine Beschreibung des Rißwachstums bei schwingender Beanspruchung bisher kaum möglich. In der vorliegenden Arbeit werden Vorschläge betreffs der Übernahme von charakteristischen Größen des statischen Sprödbruchs zur Beschreibung des stabilen Rißwachstums bei schwingender Beanspruchung auch bei Mixed-Mode-Rißöffnung knapp skizziert und diskutiert.

2. Bruchkriterien bei statischer Beanspruchung

2.1. Vorbemerkungen

Zum besseren Verständnis der Gesamtproblematik gehen wir von einem Vergleich der Vorgehensweisen in der konventionellen Festigkeitslehre und der Bruchmechanik aus. Bei einachsiger Beanspruchung fordert man in der Festigkeitslehre z. B., daß die vorhandene Normalspannung einen kritischen (zulässigen) Wert nicht überschreitet:

$$\sigma_{\text{vorh}} < \sigma_c \quad (1)$$

An Kerben und Anrissen führt jedoch eine einachsige Belastung zu mehrachsigen, stark inhomogenen Spannungszuständen. Dann erhält man die vorhandene Spannung aus der von Thum (1932) eingeführten Formzahl:

$$\alpha_K \doteq \sigma_{\text{max}}/\rho.$$

Neuber hat als erster Formzahlen für viele praktisch wichtige Flle berechnet (1938), vgl. [1]. Für ein elliptisches Loch in der unendlichen Ebene unter Zugbelastung senkrecht zur großen Halbachse a mit dem Krümmungsradius ρ ergibt sich als Formzahl:

$$\alpha_K = 1 + 2(a/\rho)^{1/2}.$$

Man erkennt leicht, daß bei verschwindendem Kerbradius (Rimodell) die Spannung in der gewohnten Art nicht mehr als Beanspruchungskenngre verwendet werden kann. Einen gewissen Ausweg gibt Neuber [2] mit der Theorie der Mikrostützwirkung an. Dabei wird angenommen, daß Werkstoffbereiche, die hochbeansprucht sind, stärker an der Kraftübertragung beteiligt werden, als dies eine lineare Theorie zuläßt. Formal erfolgt eine Mittelwertbildung unter Benutzung einer neuen Werkstoffkenngröße, der sogenannten Ersatzstrukturlnge Δr^* :

$$\bar{\sigma}_{\text{max}} = \frac{1}{\Delta r^*} \int_0^{\Delta r^*} \sigma(x, y=0) dx \quad (2)$$

Als erfolgreicher bei der Auffindung geeigneter Beanspruchungskenngren im Falle existierender Risse haben sich jedoch energetische Bilanzen für den Moment der Riinstabilitt erwiesen. Darüber wird im folgenden berichtet.

2.2. Sprdbruchkriterien

Das von Griffith [3] im Jahre 1920 formulierte Sprdbruchkriterium besagt, daß instabiles Rißwachstum dann eintritt, wenn die bei Rivergroerung freiwerdende potentielle Energie größer ist als die zur Bildung neuer Oberflächen notwendige Energie.

Unter Verwendung dieser Grundidee gelangte Irwin [4] (1958) zur Postulierung einer Energiefreisetzungsrates je Riflchenzuwachs in der Form

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta W_{\text{pot}}}{\Delta a} \quad (3)$$

als charakteristische Größe zur Ribeurteilung.

2.2.1. Mode I – Rißöffnung

Im Falle der Mode I – Rißöffnung berechnet man folgende Energiefreisetzungsrates:

$$G_I = \frac{(\kappa + 1)}{8\mu} K_I^2 \quad (4)$$

Für die anderen beiden Riffnungen erhält man:

$$G_{II} = (\kappa + 1) K_{II}^2 / (8\mu), \quad G_{III} = K_{III}^2 / (2\mu).$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß sich der Riß in Ririchtung ausbreitet und die Riform erhalten bleibt. Damit ist es möglich, den Spannungsintensitätsfaktor K_I als charakteristische Größe zur Ribeurteilung heranzuziehen. Instabiles Riverhalten tritt ein, wenn K_I einen kritischen Wert, die sogenannte Bruchzähigkeit des Werk-

stoffes K_{IC} erreicht. K_{IC} ist in gewissen Grenzen eine Werkstoffkenngröße. Das so dargestellte Sprödbrechungskriterium läßt sich in zwei Grundhypothesen angeben (IRWIN-Kriterium):

Hypothese 1:

Der Riß breitet sich instabil in Ririchtung aus.

Hypothese 2:

Der Riß wird dann instabil, wenn der Spannungsintensitätsfaktor die Bruchzähigkeit erreicht.

2.2.2. Mixed-Mode-Rißöffnung

Rikonfigurationen unter allgemeiner ebener (Mixed-Mode-) Rißöffnung weisen eine Riausbreitungsrichtung auf, die im allgemeinen nicht mit der Ririchtung übereinstimmt. Zur Behandlung dieses Problems sind zwei prinzipielle Vorgehensweisen entwickelt worden. Zum einen gibt es Arbeiten, in denen eine Energiefreisetzungsrate für Mixed-Mode-Rißöffnung näherungsweise berechnet wird (vgl. z. B. Palaniswamy/Knauss [5]). Eine zweite Möglichkeit bietet sich durch die Benutzung geeigneter Feldgrößen der Elastizitätstheorie als charakteristische Größen zur Ribeurteilung an.

Liegt eine mehrachsige Beanspruchung in der Festigkeitslehre vor, dann fordert man z. B., daß die Vergleichsspannung σ_v einen kritischen Wert nicht überschreitet. σ_v wird nach einer Vergleichsspannungshypothese ermittelt. Analog dazu fordert man nun in einem Bruchkriterium, daß ein sogenannter Vergleichsintensittsfaktor K_{Iv_i} bei Ristabilitt die Bruchzähigkeit nicht überschreitet. Der Index i verweist auf das verwendete Kriterium. Derartige Vergleichsintensitätsfaktoren lassen sich stets in der günstigen Produktform

$$K_{Iv_i} = m_i \cdot K_I \quad (5)$$

angeben, vgl. [6], [7]. Die spezielle Gestalt von m_i hängt dabei von der verwendeten charakteristischen Größe ab. Solcherart entstandene Bruchkriterien, die immer in Relation zum IRWIN-Kriterium stehen, beinhalten die beiden folgenden Grundhypothesen, vgl. Tabelle 1:

Hypothese 1:

Annahme über die Riausbreitungsrichtung.

Hypothese 2:

Der Riß wird dann instabil, wenn die charakteristische Größe zur Ribeurteilung einen kritischen Wert erreicht.

2.2.3. Diskussion

Die Anwendung der Grundhypothesen auf einfache ebene Rimodelle führt oftmals auf zumindest qualitativ übereinstimmende Aussagen. Dabei konnten die Voraussagen über die Abhängigkeit des Riausbreitungswinkels vom Lastangriffswinkel (Hypothese 1) experimentell in vielen Fllen bestätigt werden, vgl. Bild 1.

Dagegen weichen analytische Voraussagen über die Abhängigkeit der kritischen Belastung vom Lastangriffswinkel (Hypothese 2) oftmals weit voneinander ab, vgl. [18], [19]. Es liegt die Vermutung nahe, daß eine gewisse Zuordnung zwischen benutztem Bruchkriterium einerseits und Prfkrperform und -werkstoff andererseits

Tabelle 1:
Überblick zu einigen entwickelten Bruchkriterien

| Art der charakt. Größe | Kriterium | charakt. Größe |
|------------------------|----------------------------------------|------------------------------------------|
| Spannung | Normalspannungskriterium [8], [9] | σ_0 |
| Verformung | Hauptdehnungskriterium [10] | $\sigma_v \doteq E \epsilon_1$ |
| | Verschiebungskriterium [11] | v_r |
| Energiedichte | SIH-Kriterium [12], [13] | $S \doteq r W^*$ |
| | Spannungsparameterkriterium [14], [15] | $\Phi \doteq \bar{f}_0 / S^{1/2}$ |
| | Kriterium der Mehrachsigeitszahl [16] | $\Omega \doteq 1 - (3 J_2)^2 / \sigma_1$ |
| | Energiedichteverhltniskriterium [17] | S_v / S_G |

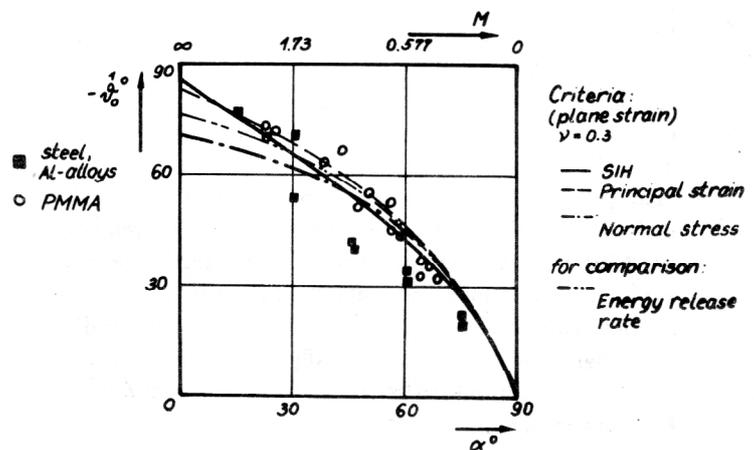


Bild 1

Abhängigkeit des Riausbreitungswinkels v_0 vom Lastangriffswinkel α (Innenri unter schräger Zugbelastung)

existiert. Hierzu sind jedoch weitere umfangreiche Untersuchungen notwendig.

3. Rißwachstumsgleichungen bei schwingender Beanspruchung (Einstufenbelastung)

3.1. Vorbemerkungen

Charakteristischer Unterschied des Riverhaltens bei schwingender Beanspruchung gegenüber statischer Beanspruchung besteht vor allem darin, daß die Rißausbreitung bei Beanspruchungswerten erfolgt, die im statischen Falle zu keiner nachweisbaren Rißausbreitung führen. Die Aufgabe eines entsprechenden Bruchkriteriums liegt jetzt nicht nur in der Beschreibung des instabilen Rißwachstums (Restbruch) sondern auch in der Beschreibung des Rißwachstums in der stabilen Phase bis zum Erreichen einer kritischen Rigre.

Dies setzt die Existenz wachstumsfhiger Risse voraus, d. h. die Phase der Rißbildung soll und kann hier nicht beschrieben werden.

Allgemein ist es üblich, den zeitlichen Rißlängenzuwachs in der folgenden Form zu beschreiben, vgl. [20]:

$$dL(t) = F(L(t), p(t), \lambda(t), t) dt. \quad (6)$$

Dabei beschreibt $L(t)$ die Länge des dominierenden Risses, $p(t)$ die Spannungsbelastung und $\lambda(t)$ zusätzliche Einflüsse, wie Eigenspannungen, Materialeigenschaften, Temperatur usw. Auf experimentelle Erfahrungen begründet wird Gl. (6) meist in der bekannten Produktform

$$\frac{dL(t)}{dt} = F_1(L) F_2(p) \quad (7)$$

verwendet. Dies ist eine Repräsentation der MINER-Hypothese, die eine Berücksichtigung des Reihenfolgeinflusses der Belastung ausschließt, vgl. Hennig [21]. Der Zeiteinfluß bei zyklischer (schwingender) Beanspruchung wird über das Rißwachstum je Schwingspiel erfaßt, d. h. $\dot{L} = da/dN$.

3.2. Rißwachstumsgleichungen

3.2.1. Mode I – Rißöffnung

Erste Versuche zur Beschreibung des Rißwachstums als Funktion der Belastung und der Rißlänge findet man bereits bei Shanley (1952) und Head (1953). Paris (1957), vgl. [22], verwendete als erster die Amplitude des Spannungsintensitätsfaktors in einer Rißwachstumsgleichung: $da/dN \sim (\Delta K_I)^4$.

Man geht dabei von der Annahme aus, daß die Ermüdungsrißausbreitung durch plastische Verformungen vor der Rißspitze unter entsprechender Steuerung durch den zyklischen Spannungsintensitätsfaktor, vgl. [23], bestimmt wird: $\Delta K_I = \Delta(p(\pi a)^{1/2} Q)$. Dabei sind p die Randspannungsbelastung, a im allg. die halbe Rißlänge und Q der Rißformkoeffizient. Falls Q und a im Zyklus konstant sind, gilt:

$$\Delta K_I = (p_{\max} - p_{\min}) (\pi a)^{1/2} Q. \quad (8)$$

Verallgemeinert ergibt sich folgende Wachstumsgleichung nach Paris/Gomez/Anderson:

$$da/dN = C (\Delta K_I)^n. \quad (9)$$

Dabei sind C und n Werkstoffkenngrößen.

Unter Benutzung von Gl. (8) erhält man die Form Gl. (7):

$$da/dN = F_1(a) F_2(p), \text{ wobei}$$

$$F_1 = (CQ \pi^{n/2}) a^{n/2}, F_2 = (p_{\max} - p_{\min})^n.$$

Bei der doppeltlogarithmischen Darstellung der Abhängigkeit der Rißwachstumsgeschwindigkeit von der Amplitude des Spannungsintensitätsfaktors lassen sich drei charakteristische Wachstumsbereiche angeben, vgl. Bild 2.

Gl. (9) eignet sich vor allem zur Beschreibung des Bereiches 2. Romvari u. Mitarbeiter [24] zeigten, daß es oftmals möglich ist, eine gut korrelierte Abhängigkeit zwischen den Kenngrößen C und n anzugeben. Unter den Wachstumsgleichungen, die den Einfluß des Spannungsverhältnisses erfassen, dürfte der Vorschlag von Forman u. Mitarbeitern [25] (1967) am bekanntesten sein:

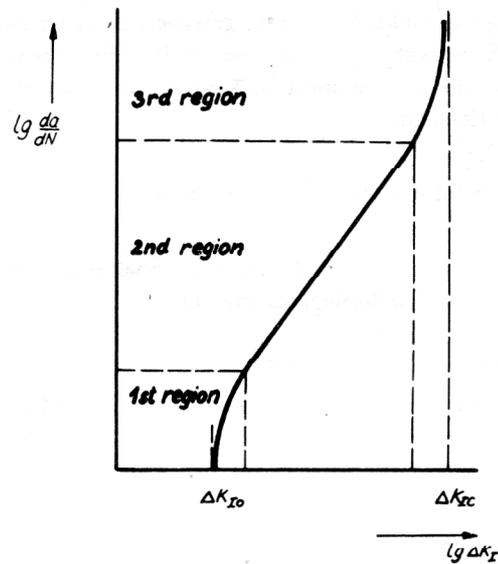


Bild 2
Charakteristische Bereiche beim Rißwachstum unter schwingender Beanspruchung

$$da/dN = C (\Delta K_I)^n / ((1-R)(K_{IC} - K_I)), R = K_{Imin}/K_{Imax}. \quad (10)$$

Immer mehr in den Mittelpunkt bruchmechanischer Forschung rückt die Problematik der Erfassung des Schwellenwertes ΔK_{I0} als Werkstoffkenngröße. Bei $\Delta K_I < \Delta K_{I0}$ findet kein erfaßbarer Rißzuwachs statt. Nach einem Vorschlag von Erdogan/Ratwani [26] (1970) läßt sich Gl. (10) zur zusätzlichen Beschreibung des Bereiches 1 erweitern:

$$da/dN = C (\Delta K_I - \Delta K_{I0})^n / ((1-R)(K_{IC} - K_I)). \quad (11)$$

Es erscheint außerdem notwendig darauf hinzuweisen, daß der Riß in Abhängigkeit von R während eines Teiles des Lastzyklus geschlossen und damit für die Schädigung unwirksam ist, vgl. [27] Elber (1970). Dies führt auf die Benutzung eines effektiven zyklischen Intensitätsfaktors $\Delta K_{Ieff} < \Delta K_I$, vgl. auch [23]. Eine einfache Möglichkeit zur Berechnung der Restlebensdauer (Lastspielzahl bis zum Bruch) ergibt sich aus der Integration der Rißwachstumsgleichungen (9), (10), (11). Jedoch liefern die so gewonnenen Formeln auf Grund notwendiger Vereinfachungen und der Extrapolation in den Bereich 3 oftmals ungenaue (zu pessimistische) Vorhersagen. Als erfolgreicher erweist sich eine Summation endlicher Rißlängenzuwüchse, vgl. z. B. [28].

Bei Überschreitung der Grenzen der LEBM wird erfolgreich versucht, den Rißfortschritt durch die Amplituden geeigneter Feldgrößen und integraler Größen ($\Delta \epsilon_{ges}$, $\Delta \epsilon_{ges} a^{1/2}$, ΔJ) zu beschreiben, vgl. [23].

Es gibt gegenwärtig ca. 100 verschiedene, aber in vielen Merkmalen übereinstimmende Rißwachstumsgleichungen für Mode I – Rißöffnung.

3.2.2. Mixed-Mode-Rißöffnung

Zu dieser Problematik gibt es in der Literatur bisher nur wenige Arbeiten. Dies liegt offensichtlich darin begründet, daß das Rißwachstum im Bereich 2 augenscheinlich meist unter Mode I erfolgt.

Trotzdem wird der Mixed-Mode-Rißöffnung zunehmend mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden müssen. Dies liegt u. a. darin begründet, daß Rißwachstum auch im Bereich 2 oftmals nur näherungsweise unter Mode I erfolgt. Gleichfalls ist die Möglichkeit der Mixed-Mode-Rißöffnung von bereits existierenden Makrorissen gegeben. Weiterhin wird bisher z. B. der Spannungseinfluß in den Rißwachstumsleichungen durch physikalisch kaum begründete Korrekturen erfaßt, während Effekte der Biaxialität überhaupt nicht berücksichtigt werden können.

Ein erster Vorschlag zur Beschreibung der zyklischen Rißausbreitung unter Mixed-Mode-Rißöffnung stammt von Badaliance (1978), [29], Sih/Barthelemy (1980), [30]. Grundlage bildet die Benutzung der charakteristischen Größe des SIH-Kriteriums (Dehnungsenergiedichtefaktor $S \dot{=} W_r$). Rißwachstum um Δr erfolgt dann, wenn die innerhalb einer bestimmten Zyklenzahl akkumulierte Energiedichte einen Wert D annimmt, d. h. $(\Delta W / \Delta V) \Delta N = D$. Damit ergibt sich $(\Delta r / \Delta N) = D (\Delta S)$ bzw. verallgemeinert:

$$da/dN = C_o (\Delta S_{\min})^{n_o}, \quad (12)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_{\min} &= 2(a_{11} \bar{K}_I \Delta K_I + a_{12} (\bar{K}_{II} \Delta K_I + \bar{K}_I \Delta K_{II}) \\ &\quad + a_{22} \bar{K}_{II} \Delta K_{II} + a_{33} \bar{K}_{III} \Delta K_{III}), \\ \Delta K_I &= K_{I\max} - K_{I\min}, \bar{K}_I = (K_{I\max} + K_{I\min})/2 \text{ usw.}, \\ \vartheta &= \vartheta_o. \end{aligned} \right\} (13)$$

Somit ist eine Erfassung der Mittelspannung gegeben. Nach Sih/Moyer (1983) [31] wird das Rißwachstum durch 3 Grundhypothesen beschrieben:

Hypothese 1:

Die Rißausbreitung erfolgt in die Richtung ϑ_o , so daß $W^* \Rightarrow \text{Min}$.

Hypothese 2:

Der Riß wächst stabil um Δr , wenn $W^* = W_C^*$.

Hypothese 3:

Der Riß wird instabil, wenn $S = S_C$.

Die Hypothesen 1 und 3 entsprechen den Grundhypothesen des SIH-Kriteriums bei statischer Belastung. Somit können z. B. über Computersimulation Rißwachstumskurven auch für nichtlineares Verhalten erfaßt werden.

Die vorgestellte Verfahrensweise wird für die in 2.2.2. genannten Bruchkriterien nach folgendem Vorschlag verallgemeinert, vgl. [32]:

Analog zur Benutzung der Vergleichsintensitätsfaktoren bei statischer Beanspruchung sollten bei zyklischer Beanspruchung die entsprechenden zyklischen Vergleichsintensitätsfaktoren (Amplituden der Vergleichsintensitätsfaktoren) zur Beschreibung des stabilen Rißwachstums benutzt werden.

Damit ergeben sich folgende Rißwachstumsleichungen in allgemeiner Form:

$$\begin{aligned} da/dN &= C_i (\Delta K_{Iv_i})^{n_i}, \\ K_{Iv_i} &= m_i K_I. \end{aligned} \quad (14)$$

Der Index i verweist wiederum auf das verwendete Kriterium. C_i, n_i sind Werkstoffkenngrößen.

Die Grundhypothesen lauten:

Hypothese 1:

Annahme über die Rißausbreitungsrichtung.

Hypothese 2:

Annahme über das stabile Wachstum (Wachstumsschritt).

Hypothese 3:

Der Riß wird dann instabil, wenn die charakteristische Größe zur Rißbeurteilung einen kritischen Wert erreicht.

Für die Überprüfung der Eignung dieser vorgeschlagenen Methode zur Beschreibung des stabilen Rißwachstums unter schwingender Mixed-Mode-Rißöffnung sind weitere umfangreiche analytische und vor allem experimentelle Untersuchungen notwendig.

LITERATUR

- [1] Neuber, H.: Kerbspannungslehre. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958.
- [2] Neuber, H.: Konstruktion, 20 (1968) 7, 245 – 251.
- [3] Griffith, A. A.: Trans. Royal Soc. London, A 221 (1920), 163 – 198.
- [4] Irwin, G. R.: J. Appl. Mech., 79 (1957), 361 – 364.
- [5] Palaniswamy, K., Knauss, W. G.: Int. J. Fract., 8 (1972), 114 – 117.
- [6] Fischer, K.-F., Günther, W.: Maschinenbautechnik, 31 (1982) 3, 132 – 135.
- [7] Fischer, K.-F.: Berichte des Weiterbildungszentrums FKW, Dresden 1980, Heft 6, 84 – 115.
- [8] Erdogan, F., Sih, G. C.: J. Basic Eng., 85 (1963), 519 – 527.
- [9] Fischer, K.-F., Günther, W., Schmidberger, W.: Wiss. Beiträge der IH Zwickau, 4 (1978) 2, 119 – 125.
- [10] Fischer, K.-F., Göldner, H.: Int. J. Fract., 17 (1981), R 3.
- [11] Fischer, K.-F.: Zur Formulierung von Stabilitätskriterien der Rißbruchmechanik bei statischer Belastung. Diss. B, Dresden 1982.
- [12] Sih, G. C.: Mechanics of Fracture, Vol. 1, Noordhoff Int. Publ., Leyden, 1973.
- [13] Sih, G. C.: Int. J. Fract., 10 (1974) 3, 305 – 321.
- [14] Chiang, W. T.: Proc. ICF4, Vol. 4, Waterloo 1977, 135 – 154.
- [15] Fischer, K.-F.: ZAMM, 61 (1981) 6, 229 – 234.
- [16] Fischer, K.-F.: Technische Mechanik, 3 (1982) 2, 31 – 36.
- [17] Radaj, D., Heib, M.: Materialprüfung, 20 (1978) 7, 256 – 262.
- [18] Kordisch, H., Sommer, E.: Forschungsbericht So 104/2, 4, Freiburg (BRD) 1978.
- [19] Kordisch, H.: Untersuchungen zum Verhalten von Rissen unter überlagerter Normal- und Scherbeanspruchung. Dr.-Ing. Diss., Karlsruhe 1982.
- [20] Sobczyk, K.: J. d. Mecanique theor. et appl., Numero special, 1982, 147 – 160.
- [21] Hennig, K.: Mauersberger, G., Berichte des Weiterbildungszentrums FKW, Dresden 1979, Heft 1, 107 – 115.

- [22] Paris, P., Erdogan, F.: J. Basic Eng., 85 (1963), 528 – 534.
- [23] Schwalbe, K.-H.: Bruchmechanik metallischer Werkstoffe, Hanser-Verlag, München–Wien 1980.
- [24] Romvari, P., Toth, K., Nagy, G.: Problemy procnosti, 12 (1980) 12, 18 – 28.
- [25] Forman, R. G. u. a.: J. Basic Eng., 89 (1967), 885.
- [26] Erdogan, F., Ratwani, M.: Int. J. Fract. Mech., 6 (1970), 379.
- [27] Elber, W.: Eng. Fract. Mech., 2 (1970), 37.
- [28] Schijve, J.: Fatigue Eng. Mat. and Struct., 5 (1982), 77.
- [29] Badaliane, R.: Proc. Symp. Strain Energy Dens., Budapest 1982.
- [30] Sih, G. C.: Barthelemy, B. M., Eng. Fract. Mech., 13 (1980), 439 – 451.
- [31] Sih, G. C., Moyer, E. T. Jr.: Eng. Fract. Mech., 17 (1983), 269.
- [32] Fischer, K.-F.: Th. a. Appl. Fract. Mech., 1 (1984), 117.