

# Randintegralmethoden für linear-elastische Probleme der Bruch- und Mikromechanik

H. Gründemann

## 1. Einleitung

Neben der universell anwendbaren Methode der finiten Elemente werden in den letzten Jahren zunehmend Randintegralmethoden zur Lösung von hauptsächlich linearen Problemen der Festkörpermechanik eingesetzt [1], [2]. Diese Methoden stellen eine sinnvolle Verbindung von klassischen analytischen Lösungstechniken mit modernen Diskretisierungsverfahren her.

Vorrangige Anwendungsgebiete sind Voll- und Halbraumprobleme und Aufgaben mit Lösungssingularitäten, wie sie für die Bruchmechanik und Mikromechanik typisch sind. Hier liegen auch die Vorteile der Randintegralmethoden gegenüber der Methode der finiten Elemente [4], [6]. Durch die explizite Lösungsdarstellung in Form von Randintegralen tritt eine Dimensionsreduzierung in dem Sinne auf, daß lediglich Informationen über die Randgeometrie und die Randbedingungen (Randverschiebungen, Randbelastungen) benötigt werden, was zu Vereinfachungen bei der rechentechnischen Problemaufbereitung führt.

Trotz erster Fortschritte steht der Einsatz von Randintegralmethoden zur Lösung nichtlinearer Aufgaben noch am Anfang [2], [3].

## 2. Direkte und indirekte Randintegralmethoden in der Elastostatik

Nicht aus prinzipiellen Gründen, sondern der Einfachheit halber und in Konsistenz mit der erfolgten rechentechnischen Umsetzung beschränken wir uns auf den Fall des ebenen isotropen Verzerrungszustandes ohne den Einfluß von Volumenkräften. Das Kräftegleichgewicht im Körpergebiet  $\Omega$ , ausgedrückt in den Verschiebungen  $\underline{u}$ , lautet

$$\Delta \underline{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \underline{u} = \underline{0} \quad (1)$$

Auf den Teilrändern  $\Gamma_u$  und  $\Gamma_t$  des Gesamtrandes  $\Gamma$  sind die Bedingungen

$$\underline{u} = \underline{\hat{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (2)$$

$$\underline{\sigma} \underline{n} = \underline{\hat{t}} \quad \text{auf } \Gamma_t \quad (3)$$

vorgegeben, wobei  $\underline{\hat{u}}$  – Randverschiebung,  $\underline{\hat{t}}$  – Randbelastung ( $\underline{n}$  – äußerer Normalenvektor an  $\Gamma$ ,  $\underline{\sigma}$  – Spannungstensor).

In Anlehnung an die Bezeichnungsweise, wie sie von den finite Element Methoden her bekannt ist, erhält man für die Bestimmungsgleichungen (1) bis (3)

$$L \underline{u} \equiv B^T A_o B \underline{u} = \underline{0} \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

$$\underline{u} = \underline{\hat{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u \quad (5)$$

$$R \underline{u} \equiv N^T A_o B \underline{u} = \underline{\hat{t}} \quad \text{auf } \Gamma_t \quad (6)$$

B wird durch den linearen differentiellen Zusammenhang von Verzerrungen und Verschiebungen definiert.  $N^T$  enthält die Komponenten des Normalenvektors  $\underline{n}$ , und  $A_o$  ist die „Hooke“sche Matrix der Materialparameter.

Finite Element Methoden werden im allgemeinen über eine Variationsformulierung des Randwertproblems (4) bis (6) realisiert. Für die Entwicklung von Randintegralmethoden kommt der Fundamentallösung (Greensche Funktion für den Vollraum) des Differentialausdruckes (4) eine zentrale Rolle zu [1]. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, geben wir den analytischen Ausdruck für die Fundamentallösung  $E(\underline{x}, \underline{y})$  ( $\underline{x}, \underline{y}$  Punkte der Ebene) an

$$E_{ij}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left( (3-4\nu)\delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \quad (7)$$

mit der Abstandsfunktion  $r = \|\underline{x} - \underline{y}\|$  ( $G$  – Schermodul,  $\nu$  – Querkontraktion).

Unter Anwendung der Greenschen Formeln und Ausnutzung von Eigenschaften der Fundamentallösung (7) erhält man bei hinreichend glattem Rand  $\Gamma$  folgende Lösungsdarstellung für das RWP (4) bis (6):

$$f_{\Gamma} [E(\underline{x}, \underline{y})^T \underline{t}(\underline{x}) - RE(\underline{x}, \underline{y})^T \underline{u}(\underline{x})] |d\Gamma(\underline{x})| = \begin{cases} 0 & \underline{y} \notin \bar{\Omega} \\ \frac{1}{2} \underline{u}(\underline{y}) & \underline{y} \in \Gamma \\ \underline{u}(\underline{y}) & \underline{y} \in \Omega \end{cases}$$

mit  $\underline{t}(\underline{x}) = (R\underline{u})(\underline{x})$ . (8)

Nach Substitution der vorgegebenen Randwerte ist der Ausdruck

$$\Phi(\underline{y}) = \int_{\Gamma_t} E(\underline{x}, \underline{y})^T \underline{\hat{t}} |d\Gamma(\underline{x})| - \int_{\Gamma_u} RE(\underline{x}, \underline{y})^T \underline{\hat{u}}(\underline{x}) |d\Gamma(\underline{x})| \quad (9)$$

für jedes  $\underline{y} \in \bar{\Omega}$  berechenbar, und die Integraldarstellung (8) erhält die Form

$$\Phi(\underline{y}) + \int_{\Gamma_u} E(\underline{x}, \underline{y})^T \underline{t} |d\Gamma(\underline{x})| - \int_{\Gamma_t} RE(\underline{x}, \underline{y})^T \underline{u} |d\Gamma(\underline{x})| = \begin{cases} 0 & \underline{y} \notin \bar{\Omega} \\ \frac{1}{2} \underline{u}(\underline{y}) & \underline{y} \in \Gamma \\ \underline{u}(\underline{y}) & \underline{y} \in \Omega \end{cases} \quad (10)$$

Die Gleichungen (8) bzw. (10) werden direkte Randintegraldarstellungen der Lösung des RWP (4) bis (6) genannt. Im Gegensatz zum Funktional  $\Phi(\underline{y})$  sind im allgemeinen die Werte  $\underline{t}$  auf  $\Gamma_u$  und  $\underline{u}$  auf  $\Gamma_t$  nicht verfügbar, sondern Bestandteil der Lösung oder aus dieser ableitbar. Folglich kann  $\underline{u}(\underline{y})$  aus (10) nicht unmittelbar bestimmt werden. Numerisch ist dieses Problem ähnlich wie bei den finite Element Methoden lösbar. Nach Diskretisierung des Randes  $\Gamma$  durch finite Elemente und Definition von Formfunktionen  $N_i(\underline{x})$  in den Knotenpunkten  $\underline{x}_i \in \Gamma$  ( $i = 1, \dots, m$ ) werden die unbekannt Funktionen  $\underline{t}(\underline{x})$  und  $\underline{u}(\underline{x})$  in Form der endlichen Reihen

$$\underline{t}(\underline{x}) \doteq \sum_{i=1}^m \underline{t}_i N_i(\underline{x}) \quad \underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m \underline{u}_i N_i(\underline{x}) \quad (11)$$

angesetzt.

Zur Bestimmung der unbekannt Knotenwerte  $\underline{t}_i$  und  $\underline{u}_i$  findet häufig das Kollokationsverfahren Anwendung. Hier wählt man auf dem Rand  $\Gamma$  Kollokationspunkte  $\underline{y}_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ), die nicht notwendig mit den Knotenpunkten  $\underline{x}_i$  übereinstimmen müssen, und stellt die Forderung, daß die Integralgleichung (8) in diesen Kollokationspunkten erfüllt wird:

$$\sum_{i=1}^m \left[ \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma} RE(\underline{x}, \underline{y}_j)^T N_i(\underline{x}) |d\Gamma(\underline{x})| \right] \underline{u}_i - \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma} RE(\underline{x}, \underline{y}_j)^T N_i(\underline{x}) |d\Gamma(\underline{x})| \underline{t}_i = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (12)$$

Damit entsteht ein lineares Gleichungssystem

$$H \underline{\tilde{u}} - G \underline{\tilde{t}} = 0, \quad (13)$$

aus dem nach Einarbeitung der bekannten Randwerte  $\underline{u}_i$  und  $\underline{t}_i$  der vollständige Satz der Knotenwerte  $\underline{t}_i$  und  $\underline{u}_i$  bestimmbar ist. Zur Bestimmung der Matrizenelemente  $H_{ij}$  und  $G_{ij}$  sind singuläre Integrale über den gesamten Rand  $\Gamma$  auszuwerten. Die resultierende Koeffizientenmatrix des Systems (13) ist voll besetzt und nicht symmetrisch, so daß bei der numerischen Auflösung und rechentechnischen Realisierung Probleme auftreten können. Auf Grund der diagonalen Dominanz der Matrizen  $H$  und  $G$  sind möglicherweise iterative Auflösungsverfahren besser geeignet als direkte.

Treten Verschiebungsunstetigkeiten auf, wie sie aus der Bruchmechanik oder der Theorie singulärer Versetzungen bekannt sind, so können indirekte Randintegralmethoden vorzugsweise bei Voll- und Halbraumproblemen Verwendung finden. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, geben wir hier eine spezielle Variante der indirekten Randintegralmethoden an, die als displacement discontinuity method (DDM) bekannt geworden ist [2], [5], [7].

Vorausgesetzt wird, daß längs des gesamten Randes die Funktion  $\underline{t}(\underline{x})$  stetig ist. Der Verschiebungssprung  $\Delta \underline{u}$  längs  $\Gamma$  ist dann aus dem Integralgleichungssystem

$$\underline{u}_I(\underline{y}) = \frac{1}{2} \Delta \underline{u}(\underline{y}) - \int_{\Gamma} RE(\underline{x}, \underline{y})^T \Delta \underline{u}(\underline{x}) |d\Gamma(\underline{x})| \quad (14)$$

$$\underline{u}_E(\underline{y}) = -\frac{1}{2} \Delta \underline{u}(\underline{y}) - \int_{\Gamma} RE(\underline{x}, \underline{y})^T \Delta \underline{u}(\underline{x}) |d\Gamma(\underline{x})| \quad (15)$$

$$\underline{t}(\underline{y}) = - \int_{\Gamma} R(RE(\underline{x}, \underline{y}))^T \Delta \underline{u}(\underline{x}) |d\Gamma(\underline{x})| \quad (16)$$

für  $\underline{y} \in \Gamma$

zu bestimmen, wobei  $\underline{u}_I$  die Verschiebung der Randpunkte bezüglich des Innengebietes  $\Omega$  und  $\underline{u}_E$  die Verschiebung der gleichen Randpunkte bezüglich des Ausengebietes von  $\Omega$  bezeichnen. Der Lösungsweg verläuft wie folgt:

Zunächst wird der Verschiebungssprung  $\Delta \underline{u}$  unter Einbeziehung der Randwerte aus dem System (14) bis (16) berechnet. Dazu ist auch die Kollokationsmethode als Diskretisierungsverfahren geeignet. Der Verschiebungssprung kann unmittelbare physikalische Bedeutung besitzen, z. B. als Rißöffnungsverschiebung oder Burgersvektor. Zur Bestimmung der Verschiebungs- und Spannungswerte im Gebiet  $\Omega$  tritt  $\Delta \underline{u}$  jedoch als fiktive Zwischengröße in Erscheinung (deshalb indirekte Randintegralmethode). Die Berechnung dieser Feldgrößen erfolgt über die nun auswertbaren Beziehungen

$$\underline{u}(\underline{y}) = - \int_{\Gamma} RE(\underline{x}, \underline{y})^T \Delta \underline{u}(\underline{x}) |d\Gamma(\underline{x})| \quad (17)$$

$\underline{y} \in \Omega$

$$\sigma(\underline{y}) = - \int_{\Gamma} [A_o B RE(\underline{x}, \underline{y})]^T \Delta \underline{u}(\underline{x}) |d\Gamma(\underline{x})| \quad (18)$$

Letztlich ist auch in diesem Fall nach Diskretisierung des Systems (14) bis (16) ein lineares algebraisches Gleichungssystem mit ähnlichen Eigenschaften zu lösen wie bei den direkten Methoden [2].

### 3. Anwendungsbeispiele aus der Bruchmechanik

Zur Berechnung von Verschiebungs- und Spannungsfeldern in der Umgebung beliebiger Rißkonfigurationen im Voll- und Halbraum ist die DDM zweckmäßig einsetzbar [11]. Bei Halbraumproblemen mit unbelasteter Oberfläche ist die Fundamentallösung  $E(\underline{x}, \underline{y})$  durch

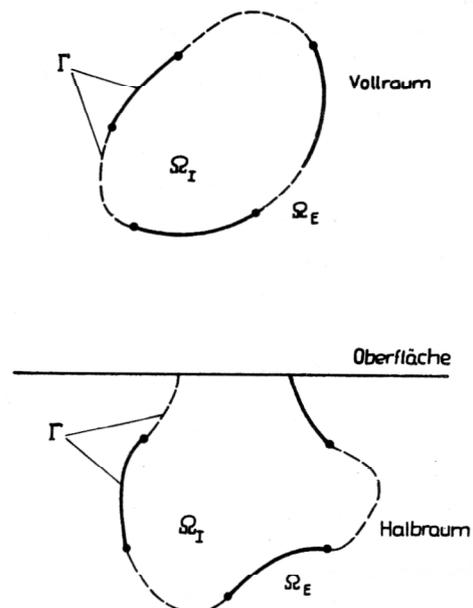


Bild 1  
Rißanordnungen im Voll- und Halbraum

Anwendung von Spiegelungsprinzipien entsprechend zu modifizieren ( $E(\underline{x}, \underline{y})$  ist dann die Greensche Funktion für den Halbraum).

Die numerische Lösung erfolgt aber analog zu Vollraumproblemen, ohne daß die unbelastete Halbraumoberfläche diskretisiert werden muß.

Zur Illustration betrachten wir die in Bild 1 dargestellten Rißanordnungen (durchgezogene Linien). Für den Zustand bei geschlossenen Rissen wird eine stetige Spannungsverteilung längs der Rißufer vorausgesetzt. Diese Rißkonfigurationen werden, wie durch die gestrichelten Randstücke angedeutet, formal zu einem endlichen Gebiet mit hinreichend glattem Rand verbunden. Dann ist längs des entstehenden Randes  $\Gamma$  die Stetigkeit von  $\underline{t}(\underline{y})$  gesichert und auf den gestrichelten Rändern  $\Delta \underline{u} = 0$ . Deshalb treten in den Gleichungen (14) bis (18) nur Integrale über die vorgegebenen Rißufer auf, was zu erheblichen Vereinfachungen bei der numerischen Bestimmung der Rißöffnungsverschiebung  $\Delta \underline{u}$  führt. Nach der Berechnung von  $\Delta \underline{u}$  aus dem System (14) bis (16) sind

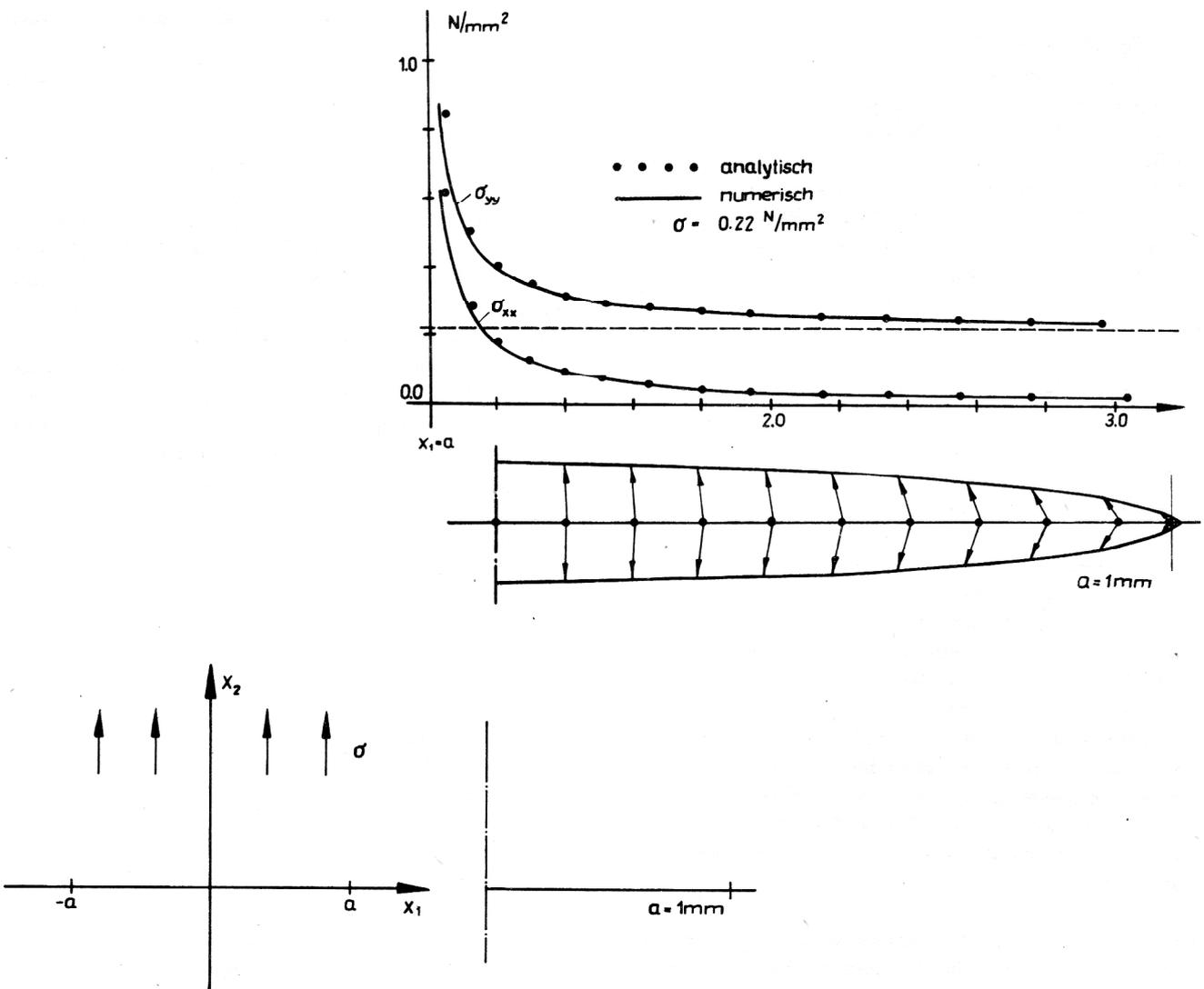
die Verschiebungs- und Spannungszustände für Punkte in den Rißspitzenumgebungen über die nun durch  $\Delta \underline{u}$  aktualisierten Gleichungen (17) und (18) bestimmbar. Damit sind die wichtigsten Werte zur Berechnung bruchmechanischer Kenngrößen bekannt. So ist z. B. das bekannte J-Integral

$$J_k = \int_{\Gamma^*} (W \underline{n}_k - \underline{t}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}) |d\Gamma^*| \quad (19)$$

sofort berechenbar. Wobei  $\Gamma^*$  eine beliebige, die Rißspitze umrundende Kontur (beliebig insofern, daß außer der Spannungssingularität an der Rißspitze keine weitere Singularität innerhalb des durch  $\Gamma^*$  eingeschlossenen Gebietes liegt). Weiterhin ist

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} \quad (\text{Verzerrungsenergiedichte})$$

$$\text{und } \underline{t}_i = \sigma_{ij} n_j$$



GRIFFITH - Riß  
E - Modul :  $1 N/mm^2$   
Querkontraktion  $\nu = 0.2$

Diskretisierung der halben  
Rißlänge:  
50 Elemente mit konstantem  
Verschiebungsansatz

**Bild 2**  
Griffith-Riß: Spannungsverlauf ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ )  
im Ligament und Rißöffnungsverschiebung

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung des J-Integrals (bezüglich einer vorgegebenen Richtung  $\partial a$  der Riausbreitung) ergibt sich aus der Änderung der gesamten Verzerrungsenergie  $H$  bezüglich der Rilänge  $a$  gemäß

$$J = - \frac{\partial H(a)}{\partial a} \quad (20)$$

Während für die numerische Auswertung von (19) Quadraturformeln in Frage kommen, kann die näherungsweise Berechnung von  $J$  aus (20) über

$$J \doteq \frac{H(a - \Delta a) - H(a + \Delta a)}{2 \Delta a} \quad (21)$$

erfolgen, wobei  $\Delta a$  ein endliches Rilängeninkrement bezeichnet. In diesem Falle muß für die Rilängen  $a - \Delta a$  und  $a + \Delta a$  jeweils die Gesamtverzerrungsenergie  $H$  berechnet werden. Diese erhält man durch (numerische) Auswertung von

$$H = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{t}_i \Delta \underline{u}_i |d\Gamma|, \quad (22)$$

wobei  $\Gamma$  die Gesamtheit der Riufer der aktuellen Rikonfiguration bezeichnet.

Über den Spannungsintensitätsfaktor ist die Berechnung des J-Integrals auch aus den Spannungs- bzw. Verschiebungsnahfeld um die Rispitze durch Extrapolation möglich [11].

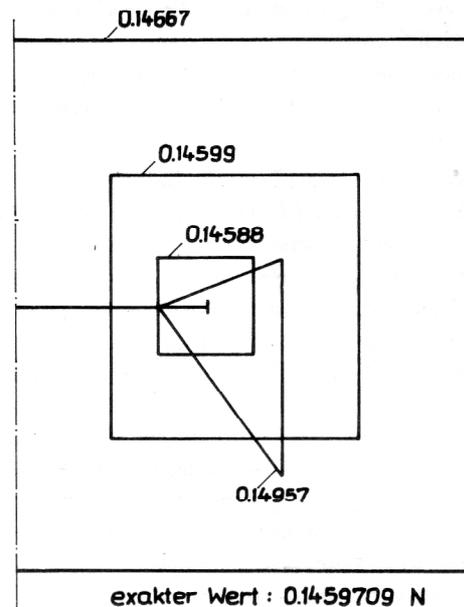
Mit der Riöffnungverschiebung  $\Delta \underline{u}$  und dem J-Integral (und mit diesem auch Spannungsintensitätsfaktoren) stehen relevante Größen für den Einsatz von Riausbreitungskriterien zur Verfügung.

Auf der Grundlage eines Computerprogrammes, in dem die DDM für ebene Probleme rechtechnisch realisiert ist, konnten ausgezeichnete Ergebnisse für Aufgabenstellungen aus der Bruchmechanik erzielt werden. Obwohl zur Diskretisierung der Riufer nur ein elementweise konstanter Ansatz für den Verschiebungssprung  $\Delta \underline{u}$  ( $N_i \equiv 1$  in jedem Element) Verwendung findet, so können doch bis in unmittelbarer Nähe der Rispitzen Spannungs- und Verschiebungswerte berechnet werden, deren relative Fehler weit unterhalb 1 % liegen.

Die Ergebnisse wollen wir hier anhand des bekannten Griffith-Rimodells diskutieren (Bild 2). Aus Symmetriegründen genügt es, nur die halbe Rilänge zu betrachten. Diese wurde im vorliegenden Fall ( $a = 1$ ) durch 50 Elemente diskretisiert. Ein Vergleich mit den exakten (analytischen) Spannungs- und Verschiebungswerten zeigt, daß die relativen Fehler für  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  im Ligament des Risses nur innerhalb des Intervalles  $1 \leq x_1 \leq 1.15$  größer als 1 % ausfallen und für die Riöffnungverschiebung durchweg Abweichungen unterhalb 1 % auftreten.

Die Genauigkeit der J-Integralwerte wurde für verschiedene Wege um die Rispitze getestet (Bild 3). In Frage kommt hier nur die  $x_1$ -Komponente des J-Integrals (19), da die  $x_2$ -Komponente exakt verschwindet.

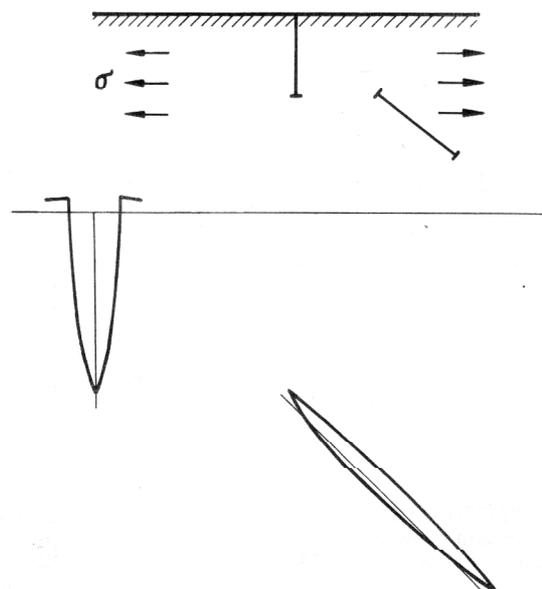
Der relative Fehler liegt zum Teil weit unterhalb von 1 ‰. Für den bezüglich des Ligaments nicht symmetrischen Weg, der zudem noch relativ nahe bei der Rispitze verläuft, ist eine größere Abweichung feststellbar.



**Bild 3**

J-Integralwerte für verschiedene Wege um die Rispitze (Griffith-Ri)

Die Auswertung des J-Integrals über die Beziehung (21), mit der aus (22) numerisch berechneten Gesamtverzerrungsenergie  $H$ , ergab ebenfalls überraschend genaue Resultate. Bei einem Rilängeninkrement  $\Delta a = 0.04$  konnte das J-Integral auf 6 Stellen genau berechnet werden ( $J = 0.1459705$ ). Die Berechnung des J-Integrals über Spannungsintensitätsfaktoren nach dem Extrapolationsverfahren aus der Riöffnungverschiebung bzw. Spannungsverteilung im Ligament liefert nicht den hohen Genauigkeitsgrad. Dies ist in erster Hinsicht auf den geringen Approximationsgrad für den Verschiebungssprung zurückzuführen. Bei Verwendung höhergradiger Formfunktionen  $N_i$  sollte diese Methode jedoch am schnellsten rechtechnisch bei hinreichender Genauigkeit realisierbar sein.



**Bild 4**

Riöffnungverschiebung zweier Risse in Oberflächennähe

Die Rechenzeichen an der IBM 370/145 im Betriebssystem OS/VS 1 (entspricht etwa ES 1055) lagen für die Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems bei ca. 2 min. Für die Berechnung des J-Integrals nach (19) wurden ca. 40 sec und nach (21) ca. 5 sec benötigt.

Ebenfalls mit der DDM ist die Wechselwirkung zwischen Rißanordnungen in der Ebene untersucht worden. Rein qualitativ ist die Rißöffnungsverschiebung zweier Risse in Oberflächennähe unter dem Einfluß einer Zugspannung  $\sigma$  in Bild 4 dargestellt.

#### 4. Schlußbemerkungen

Nach dem Verfahren (14) bis (16) (DDM) kann auch die Wechselwirkung zwischen Riß- und Versetzungsanordnungen untersucht werden. Hier kommt noch der Vorteil hinzu, daß mit dem Burgersvektor die Größe  $\Delta u$  längs der Versetzungslinie vorgegeben ist und somit lediglich die Rißufer vernetzt werden müssen. Läßt man zusätzlich noch die Wechselwirkung zu Volumendefekten z. B. in Form von Voids zu, so ist schon ein breites Feld von Problemen der Mikromechanik für eine quantitative Untersuchung zugänglich. Der längs des Void-Randes berechnete Verschiebungssprung  $\Delta u$  besitzt nur eine fiktive Bedeutung, die realen Verschiebungen des Randes und die Verschiebungen und Spannungen in der Void-Umgebung können mit  $\Delta u$  direkt aus (15) bis (18) ermittelt werden.

Die Übertragung der Randintegralmethoden auf anisotrope oder stückweise homogene Medien ist möglich, wenn für die entsprechenden Differentialausdrücke die Fundamentallösungen konstruierbar oder wenigstens näherungsweise berechenbar sind (beispielsweise für Kristalle mit kubischer bzw. hexagonaler Symmetrie).

Für die Untersuchung von Rißanordnungen in endlichen Körpergeometrien haben sich neben der Methode der finiten Elemente weitestgehend direkte Randintegralmethoden (BEM) durchgesetzt [8] bis [10].

#### LITERATUR

- [1] Brebbia, C. A.: *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press, London, Halstead, New York 1978.
- [2] Brebbia, C. A. (ed.): *Proceedings of the International Seminar on Boundary Element Methods*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York (4 Bd.) 1978, 1980 – 82.
- [3] Telles, J. C. F.; Brebbia, C. A.: *The Boundary Element Method in Plasticity*. Appl. Math. Modelling, 1981, Vol. 5.
- [4] Zienkiewicz, O. C.; Kelly, D. W.; Bettes, P.: *The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures*. Int. J. Num. Meth. Engng. 11 (1977) pp. 355 – 375.
- [5] Crouch, S. L.: *Solution of Plane Elasticity Problems by the Displacement Discontinuity Method*. Int. J. Num. Meth. Engng. 10 (1976) pp. 301 – 343.
- [6] Zienkiewicz, O. C.; Kelly, D. W.; Bettes, P.: *Marriage a la mode – The Best of Both Worlds (Finite Elements and Boundary Integrals)*. In: „Energy Methods in Finite Element Analysis“, John Wiley and Sons Ltd., 1979.
- [7] Pignole, M.: *On the Construction of the Boundary Integral Representation and Connected Integral Equations for Homogeneous Problems of Plane Linear Elastostatics*. In: [2] Third Seminar, pp. 71 – 84.
- [8] Balas, J.; Sladek, J.: *Method of Boundary Integral Equations for Analysis of Three Dimensional Crack Problems*. In: [2] Third Seminar, pp. 183 – 205.
- [9] Benitez, F. G.; Ruiz, C.: *Boundary Element Method for Two-Dimensional Fracture Mechanics Problems*. In: [2] Forth Seminar pp. 428 – 456.
- [10] Smith, R. N. L.; Mason, J. C.: *A Boundary Element Method for Curved Crack Problems in Two Dimensions*. In: [2] Forth Seminar pp. 472 – 484.
- [11] Sladek, V.; Sladek, J.: *Three Dimensional Curved Crack in an Elastic Body*. Int. J. Solids Structures, 19 (1983) 5, pp. 425 – 436.

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. nat. H. Gründemann  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Institut für Mechanik  
Abt. Bruchmechanik/Mikromechanik  
9010 Karl-Marx-Stadt  
PSF 408