

# Behandlung räumlicher Rißprobleme mit der Methode der finiten Elemente

Meinhard Kuna

## 1. Einleitung

Die Abschätzung von Bruchsicherheit und Lebensdauer eines technischen Bauteils mit Riß erfordert oftmals eine echt dreidimensionale (3D) Betrachtungsweise. Aufgrund der komplizierten Körpergeometrie und Belastungsbedingungen kann die entsprechende Randwertaufgabe der Kontinuumsmechanik nur mit Hilfe numerischer Methoden gelöst werden, unter denen die Methode der finiten Elemente (FEM) auch für die Behandlung von Rißproblemen eine vorherrschende Stellung einnimmt, siehe [1]. Im folgenden soll ein Resümee der eigenen Erfahrungen auf diesem Gebiet gegeben werden.

## 2. Rißspitzenelemente

Aus analytischen Betrachtungen für 3D Rißprobleme ist lediglich das asymptotische Verhalten der Spannungen und Verschiebungen unmittelbar an der Rißspitze bekannt, [2].

Mit herkömmlichen Standard-Elementtypen kann die Spannungssingularität nur schlecht erfaßt werden, weshalb effektivere Sonderelemente mit rißspezifischen Ansatzfunktionen entwickelt wurden. Diese Rißspitzenelemente dienen zur Modellierung der Rißfrontumgebung, während der verbleibende Teil des Körpers mit Standard-Elementen vernetzt wird.

Die Formulierung mit Verschiebungsansätzen ist die weitaus gebräuchlichste Methode, sie besitzt jedoch den Nachteil, daß man nicht gleichzeitig die Rißspitzenlösung im Elementinneren und die Kompatibilität der Verschiebungen auf den Kontaktflächen zu den benachbarten Standard-Elementen erfüllen kann. Deshalb kann eine der beiden Bedingungen nur näherungsweise berücksichtigt werden. Unter den Verschiebungs-Rißelementen stellen die sogenannten „knotendistordierten Elemente“ eine verblüffend einfache Variante dar [3]. Hierbei handelt es sich um modifizierte isoparametrische Hexaeder- oder Pentaederelemente mit quadratischem Verschiebungsansatz, deren Seitenmittenknoten lediglich in Richtung Rißfront auf die Viertelpunkt-Position verschoben werden, wodurch eine  $r^{-1/2}$  Singularität für die Dehnungen entsteht.

Bei hybriden Elementformulierungen werden die Feldgrößen im Element und auf dessen Rand zunächst als unabhängig voneinander betrachtet und erst durch das Variationsprinzip erzwingt man ihre Stetigkeit beim Übergang vom Elementinneren zum Rand und somit zu den Nachbarelementen. Dies ist sehr vorteilhaft für die Konstruktion von Rißspitzenelementen, da man im Element vollständig die bekannte Rißsingularität anset-

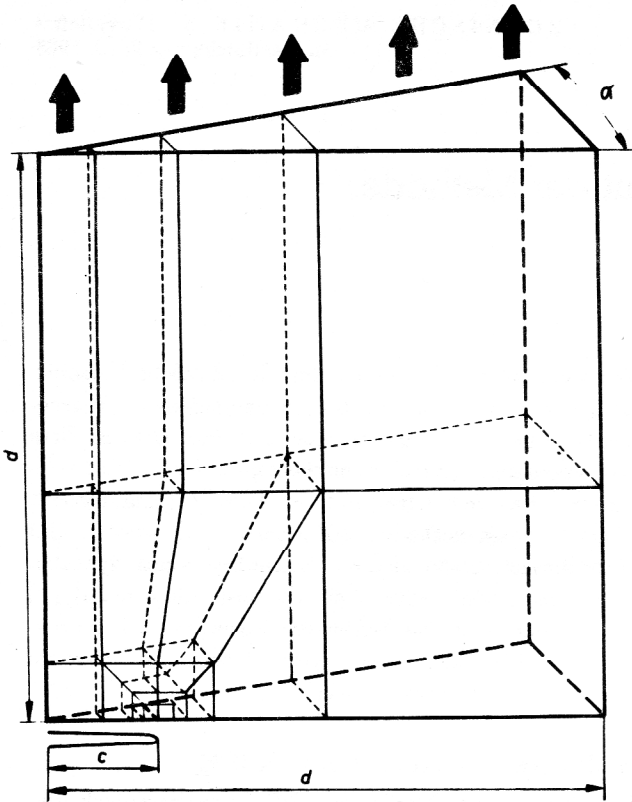
zen kann, während man auf dem Rand solche Verschiebungsfunktionen vorgibt, die mit denjenigen der angrenzenden Standard-Elemente identisch sind. Die auf diese Art erzeugten „verschiebungskompatiblen“ Sonderelemente lassen sich damit in jedes FEM-Programmsystem (Verschiebungsmethode) aufnehmen. Es wurden 3D Rißspitzenelemente auf der Grundlage eines hybriden Spannungsmodells entwickelt, die ausführlich in [6], [7] beschrieben sind. Sie haben die Form von 20-Knoten-Hexaederelementen. Jeweils vier solche Hybridelemente umgeben ein Segment der Rißfront.

## 3. Programmsystem CRACK3DH

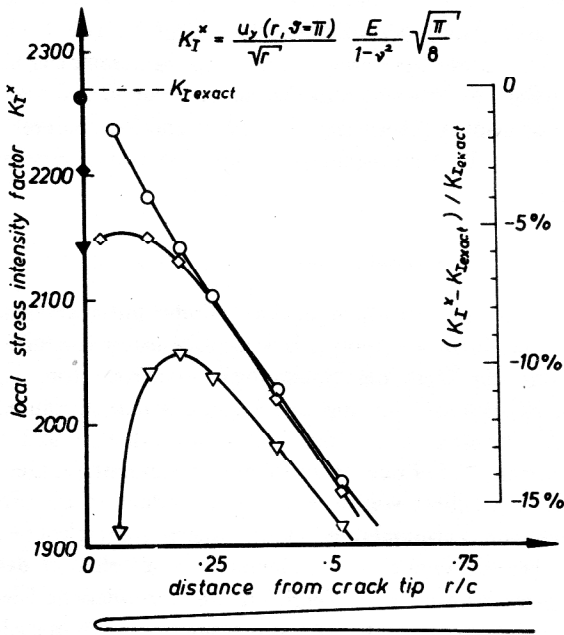
Ein von der TH Magdeburg, WB Festkörpermechanik, übernommenes FEM-Programm [8] wurde insbesondere durch die Einbeziehung der hybriden Rißspitzenelemente weiterentwickelt für die spezielle Behandlung räumlicher elastostatischer Rißprobleme. Das Programm CRACK3DH ist für die EDV-Anlage EC 1040 geschrieben, eine Anwenderdokumentation liegt im IFE Halle vor. Der Elementkatalog umfaßt: a) isoparametrische Hexaeder-(20 Knoten) und Pentaederelemente (15 Knoten); b) knotendistordierte Hexaeder- und Pentaederelemente für die Rißumgebung; c) hybride Rißspitzenelemente;

## 4. Anwendungsbeispiele

Als Testbeispiel diente u. a. ein Zylinder unter axialem Zug mit einem konzentrischen kreisförmigen Innenriß, für das der Wert des Spannungsintensitätsfaktors  $K_I$  nach [2] bekannt ist. Für dieses eigentlich axialsymmetrische Problem wurde das FEM-Netzwerk von Bild 1 entworfen, wobei nur ein keilförmiges Segment der Geometrie modelliert wurde, auf dessen Seitenflächen entsprechende Verschiebungsbehinderungen vorgeschrieben sind. Für die zwei Hexaederelemente unmittelbar an der Rißspitze wurden zum Vergleich drei verschiedene Elementtypen verwendet: ( $\nabla$ ) isoparametrische Standard-Elemente; ( $\diamond$ ) knotendistordierte Rißspitzenelemente; ( $\circ$ ) hybride Rißspitzenelemente. Aus den erhaltenen Knotenpunktverschiebungen  $u_y$  der Rißufer wurde ein lokaler Spannungsintensitätsfaktor  $K_I^*$  errechnet, dessen Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zur Rißspitze in Bild 2 dargestellt ist. Man erkennt, daß die Standardelemente sehr nahe an der Rißspitze die Singularität nicht ausreichend beschreiben können, was mit knotendistordierten Elementen erheblich besser gelingt, während die Hybridelemente ohne Beeinträchtigung die beste Annäherung an den exakten Wert liefern.



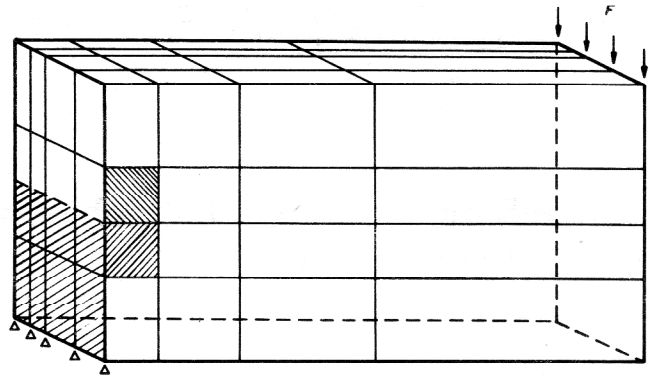
**Bild 1**  
FEM-Netzwerk für einen Zylinder mit kreisförmigem Innenriß  
(20 Elemente, 177 Knoten,  $\alpha = 2.3^\circ$ ,  $c/d = 0.2$ )



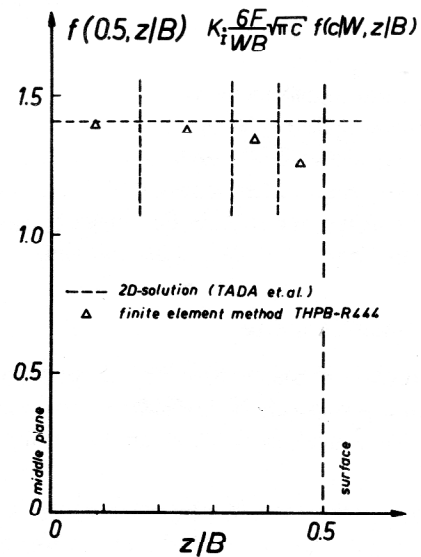
**Bild 2**  
Vergleich verschiedener Elemente bei der Wiedergabe der Rißsingulartät

Ausführliche numerische Studien am Beispiel der Kompakt-Zug-Probe mit unterschiedlichen Netzwerken bestätigten das gewonnene Bild über die Qualität der verschiedenen Rißelemente, siehe [7], [9].

Zur räumlichen Analyse der Dreipunkt-Biege-Probe wurde das in Bild 3 gezeigte Netzwerk entworfen. (Kraft  $F$ , Dicke  $B$ , Weite  $W$ , Spannweite  $= 4W$ , Rißtiefe  $c = W/2$ ). Entlang der Rißfront (Strichlinie auf der lin-



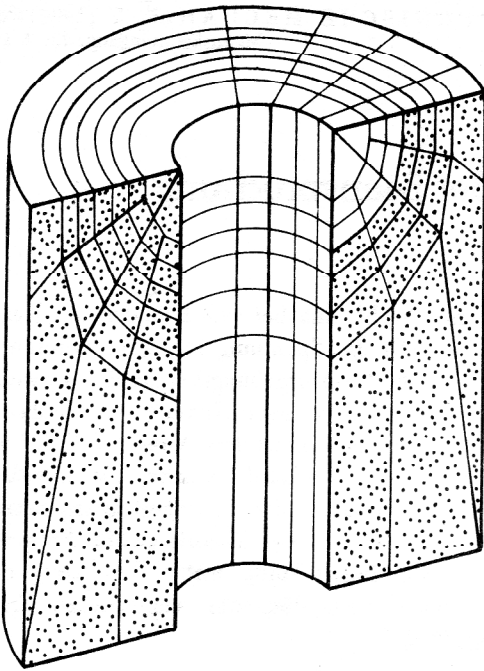
**Bild 3**  
FEM-Netz für ein Viertel der Dreipunkt-Biege-Probe (425 Knoten, 56 Hexaderalelemente, 8 hybride Rißspitzenelemente)



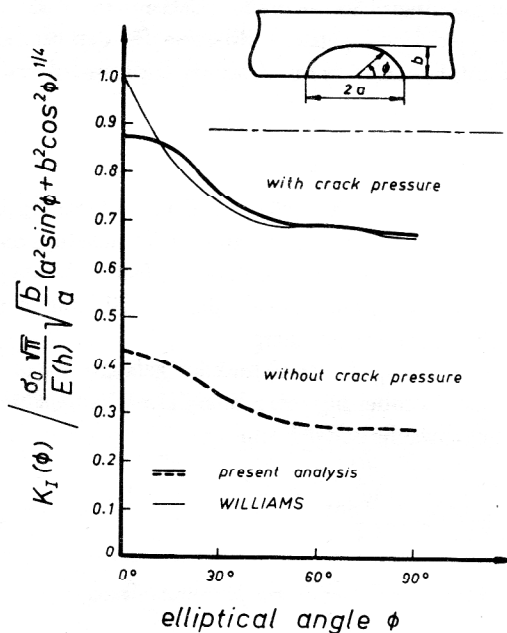
**Bild 4**  
 $K_I$ -Verteilung über die Dicke für die Dreipunkt-Biege-Probe

ken Seitenfläche) wurden acht hybride Rißspitzenelemente angeordnet. Den errechneten Verlauf des normierten Spannungsintensitätsfaktors entlang der Rißfront gibt Bild 4 wieder ( $\Delta$ ). In der Probenmitte ( $z/B = 0$ ) stimmt die 3D-Lösung sehr gut mit dem Ergebnis der 2D-Rechnung [4] überein, an der Probenoberfläche ( $z/B = 0.5$ ) ist sie etwa 10% kleiner.

Abschließend soll noch ein typisches Rißproblem aus der technischen Praxis untersucht werden. Es handelt sich um ein Hochdruck-Rohr mit einem halbelliptischen Oberflächenriß, der von der Innenseite her die halbe Wandstärke durchdringt. (Durchmesser Verhältnis  $R_a/R_i = 2.8$ , Axenverhältnis der Halbellipse  $a/b = 1.5$ ,  $b = 0.5 (R_a - R_i)$ , Länge  $= 4 R_a$ ). Aufgrund der doppelten Symmetrie braucht nur ein Viertel des Rohres vernetzt zu werden, Bild 5. Der weiße Bereich auf der grauen Schnittfläche deutet die Rißfläche an. Es wurden die beiden Belastungsfälle betrachtet, daß der Druck  $p$  nur auf die Rohrwand wirkt (—) oder zusätzlich noch auf die Rißflächen (—). Der Verlauf von  $K_I$  entlang der Rißfront ist in Bild 6 dargestellt, wobei mit der Lösung für einen elliptischen Riß im Vollraum (siehe [2]) unter Zug  $\sigma_0 = 2 p R_a^2 / (R_a^2 - R_i^2)$  normiert wurde. Der Druck auf den Rißflächen bewirkt nahezu eine Verdoppelung des Spannungsintensitätsfaktors. Verglichen werden konnte mit einer Näherungsformel von [5], (—).



**Bild 5**  
Netzwerk für Rohr mit halbeleptischem Innenriß (122 Standardelemente, 8 hybride Rißspitzenelemente, 762 Knoten)



**Bild 6**  
Verteilung von  $K_I$  entlang der Rißfront ( $E(h)$ -vollständiges elliptisches Integral 2. Art)

## 5. Diskussion

Sowohl von den theoretischen Anforderungen als auch von der praktisch erreichbaren Genauigkeit (bei gleichem Netzwerk) sind die hybriden Rißspitzenelemente den knotendistordierten Elementen überlegen. Außerdem haben sie den Vorteil, daß bei ihnen die Spannungsinintensitätsfaktoren unmittelbar und für alle drei Rißöffnungsarten separat ausgegeben werden, so daß eine Auswertung des Verschiebungsfeldes nach der Extrapolationsmethode entfällt. Von Nachteil ist der höhere theoretische und numerische Aufwand zur Erstellung der

hybriden Elemente, wohingegen knotendistordierte Elemente in jedem FEM-Programm durch leichte Modifikation zu gewinnen sind und verglichen mit Standardelementen eine erhebliche Genauigkeitssteigerung liefern. Mit CRACK3DH liegt ein leistungsfähiges FEM-Programmsystem zur Lösung 3D elastostatischer Rißprobleme vor, was auch durch weitere Beispiele in [6], [7] und [9] belegt wird. Zukünftige Arbeiten und Programmweiterungen sollen sich vornehmlich auf Risse mit gemischter Zug-, Scher- und Torsionsbeanspruchung konzentrieren sowie die Berücksichtigung von thermischen Dehnungen und Volumenkräften erproben. Selbstverständlich können die hybriden Rißspitzenelemente auch vorteilhaft eingesetzt werden in Verbindung mit speziellen FEM-Techniken für Rißprobleme, wie virtuelle Rißausbreitung, Superpositionsmethode oder verallgemeinerte J-Integrale. Theoretisch noch nicht ausreichend geklärt ist der Spannungszustand am Schnittpunkt der Rißfront mit einer Körperoberfläche.

## LITERATUR

- [1] A. R. Luxmoore, D. R. J. Owen: Numerical Methods in Fracture Mechanics. Proc. 1. u. 2. int. Conf. Swansea 1978 und 1980, Pineridge Press.
- [2] M. K. Kassir, G. C. Sih: Three-dimensional crack problems. Noordhoff 1975.
- [3] R. S. Barsoum: On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. Int. J. Numer. Meth. Eng. 10, 25 – 37 (1976).
- [4] H. Tada u. a.: The stress analysis of cracks. Hellertown 1973.
- [5] J. G. Williams: An approximate solution for an elliptical crack in a thick walled cylinder. Int. J. Fracture 16, R 127 – R 131 (1980).
- [6] M. Kuna: Hybride Sonderelemente zur Spannungsanalyse dreidimensionaler rißbehafteter Körper. IX. IKM Weimar 1981, Bd. 2, 27 – 30.
- [7] M. Kuna: Konstruktion und Anwendung hybrider Rißspitzenelemente für dreidimensionale bruchmechanische Aufgaben. Technische Mechanik 3 (1982) 2, 37 – 43.
- [8] L. Wiltinger: Zur Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Behandlung räumlicher statistischer Rißprobleme. Dissertation TH Magdeburg 1980.
- [9] M. Kuna, L. Wiltinger, J. Altenbach: Erfahrungen bei der Anwendung der FEM auf dreidimensionale elastostatische Rißprobleme. VI. Symposium Verformung und Bruch, Magdeburg 1982, Bd. I, S. 146 – 152.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Meinhard Kuna  
Akademie der Wissenschaften der DDR  
Institut für Festkörperphysik und  
Elektronenmikroskopie  
4020 Halle  
Weinberg, Postfach 250