TECHNISCHE MECHANIK 5 (1984) Heft 3
Manuskripteingang: 23. 9. 1983

Anwendung der Randintegralmethode auf bruchmechanische Aufgaben

H. G. Maschke

1. Einleitung

Unter den Abkürzungen BIM (Boundary Integral Method), BIEM (Boundary Integral Equation Method) oder BEM (Boundary Element Method) sind international etwa im letzten Jahrzehnt kontinuumsmechanische Berechnungsverfahren bekannt geworden, die als rechentechnische Realisierung spezieller Rand-Integralmethoden entwickelt worden sind. Im folgenden soll der Bezeichnung BEM der Vorzug gegeben werden.

Als kontinuumsmechanische (und damit bruchmechanische) Berechnungsmethode hat sich die BEM heute dem Vergleich mit der bekannteren FEM (Finite Element Method) zu stellen. Die weite Verbreitung der FEM ist ein Indiz für die Leistungsfähigkeit und Anwenderfreundlichkeit der Methode. International werden mit ihr heute sehr komplexe Probleme gelöst, z. B. Aufgaben der dreidimensionalen, geometrisch nichtlinearen, elastisch-plastischen und zeitabhängigen Kontinuumsmechanik. Auch mit EDV-Anlagen mittlerer Leistungsfähigkeit (ES 1040) lassen sich dreidimensionale elastostatische bruchmechanische Rechnungen durchführen [1]. Die größten Schwierigkeiten (abgesehen von Rechenzeiten in der Größenordnung von Stunden) entstehen in diesem Fall bei der Verwaltung der großen Menge zu verarbeitender Daten. Auch die 3-dimensionale Vernetzung einer räumlichen Struktur ist in der Regel recht aufwendig.

Demgegenüber hat die BEM den evidenten Vorzug, daß nur die Berandung des Gebietes, das der Verformung unterliegt, zu vernetzen ist. Damit verringert sich die Zahl der unbekannten Knotenvariablen gegenüber der FEM umso mehr, je feiner die Diskretisierung gewählt wird, je größer also die angestrebte Genauigkeit ist. Die BEM basiert auf der Umwandlung des zugrunde liegenden Differentialgleichungssystems in ein Integralgleichungssystem über den Rand. Auf der Grundlage der Diskretisierung wird dieses in ein lineares Gleichungssystem übergeführt und rechentechnisch gelöst. Damit verschafft man sich im ersten Schritt vollständige Kenntnis über die Randwerte von Spannungs- und Verschiebungsvektor (oder über gewisse Hilfsfunktionen), welche hinreichend ist, um alle übrigen interessierenden Größen durch numerische Auswertung weiterer Randintegrale zu berechnen.

2. Grundzüge des Verfahrens

Im folgenden kann nur punktuell auf das Vorgehen der BEM eingegangen werden. Die Grundgleichungen der linearen Kontinuumsmechanik lassen sich auf verschiedene Weise in ein Integralgleichungssystem überführen. Dementsprechend gibt es mehrere Varianten der BEM. In der Literatur wird zwischen direkter und indirekter BEM unterschieden.

a) indirekte BEM

Ihre Grundlage ist die wesentlich von Kupradze [2] entwickelte Potentialtheorie für Aufgaben der linearen Elastostatik. Dabei fungiert das Verschiebungsfeld als vektorielles Ein- oder Doppelschichtpotential mit einer fiktiven Kraft- oder Momentendichte als Quellfunktion. Die Feldgrößen der Elastostatik werden damit im Gebiet und auf dem Rand einheitlich in Form einer Vollraumlösung dargestellt:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{r}) &= \int \tilde{G}(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \vec{f}(\vec{r}\,')\, dF' \\ \tilde{\sigma}(\vec{r}) &= \int \tilde{S}(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \vec{f}(\vec{r}\,')\, dF' \\ \vec{t}(\vec{r}) &= \int \tilde{T}(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \vec{f}(\vec{r}\,')\, dF' \end{aligned} \tag{1}$$

$\vec{u}$, $\tilde{\sigma}$ und $\vec{t}$ bezeichnen in dieser Reihenfolge Verschiebungsvektor, Spannungstensor und Randspannungsvektor. $\tilde{G}$ ist die Fundamentallösung der Gleichung für den Verschiebungsvektor (Greenscher Tensor) oder, im Falle eines Doppelschichtpotentials, ein daraus abgeleiteter Tensor. $\tilde{S}$ und $\tilde{T}$ sind diejenigen Tensoren, die man aus $\tilde{G}$ erhält, wenn man aus $\vec{u}$ nach den üblichen Regeln $\tilde{\sigma}$ bzw. $\vec{t}$ bildet. Die Quellfunktion $\vec{f}(\vec{r})$ gewinnt man als Lösung des Integralgleichungssystems, welches (1) bei Vorgabe der Randwerte von $\vec{u}$ bzw. $\vec{t}$ darstellt. Die übrigen, zunächst unbekannten Randwerte und die Werte im Innern berechnet man nach Bedarf im Anschluß durch Auswertung der Integrale (1).

Sofern ein Doppelschichtpotential angesetzt wird, erhält man eine Variante, die als DDM (Displacement Discontinuity Method) bekannt geworden ist [3]. Die Bezeichnung ergibt sich aus dem Umstand, daß einer flächigen Momentdichte eine Verschiebungsunstetigkeit am Ort der Fläche entspricht. Offenbar bietet sich diese Variante für die Berechnung von Rißproblemen an, da damit nicht beide Rißufer vernetzt werden müssen, so daß man bei der Vernetzung der Risse gegenüber anderen Verfahren mit der Hälfte der Knoten auskommt.

b) direkte BEM

An der indirekten BEM kann als Nachteil empfunden werden, daß mit der Quellfunktion $\vec{f}(\vec{r})$ eine Größe eingeführt wird, die eigentlich nicht interessiert. Diesen Umweg vermeidet die direkte BEM. Mit Hilfe von BETTIs Reziprozitätssatz gewinnt man die folgende Beziehung für das Innere des Gebietes, die als SOMIGLIANA-Formel bekannt ist:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \int [\tilde{G}(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \vec{t}(\vec{r}\,') - \tilde{T}(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \vec{u}(\vec{r}\,')]\, dF' \tag{2}$$

wobei das Integral über die Berandung zu bilden ist. Für den Rand selbst erhält man:

$$\tilde{c} \cdot \vec{u}(\vec{r}) = \int [\tilde{G}(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \vec{t}(\vec{r}\,') - \tilde{T}(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \vec{u}(\vec{r}\,')] \, dF' \quad (3)$$

Der Tensor $\tilde{c}$ ergibt sich aus der lokalen Geometrie des Randes. Wiederum erhält man mit der Vorgabe von Randwerten für $\vec{u}$ bzw. $\vec{t}$ ein Integralgleichungssystem für die zunächst unbekannten Randwerte.

Voraussetzung für das Verfahren der BEM ist die Kenntnis des Greenschen Tensors für den Vollraum. Dieser ist für isotropes Material in analytisch geschlossener Form bekannt. Im anisotropen Fall trifft dies nur für ebene Probleme zu. Dreidimensionale Rechnungen erfordern hier weitere numerische Integrationen zur Gewinnung des Greenschen Tensors. Dessen Kenntnis für spezielle Gebiete bringt für die Behandlung entsprechender Probleme meist erhebliche Vorteile. Da der Greensche Tensor für einen geraden Schlitz in der (auch anisotropen) Vollebene bekannt ist, sind ebene elastische Rißprobleme mit der BEM besonders effektiv zu lösen [4]. Macht man hier von dem speziellen Tensor Gebrauch, so erübrigt sich die Vernetzung des Risses völlig und die Spannungsverhältnisse können gerade in Rißspitzennähe sehr genau berechnet werden. Bei Anwendung einer Substrukturtechnik kann mit vergleichsweise geringem rechentechnischen Aufwand eine große Zahl von Rissen einbezogen werden [5].

In vielen Fällen wird auch der Greensche Tensor für den Halbraum von Nutzen sein, der in ebenen Fällen sowie im isotropen räumlichen Fall bekannt ist.

3. Einige Bemerkungen zur rechentechnischen Realisierung und zum Vergleich mit der FEM

Die Entwicklung der Randintegralmethode bis hin zu allgemein anwendbaren Computerprogrammen wurde erst mit der Verfügbarkeit moderner Großrechenanlagen möglich. Als erste Arbeiten zur BEM werden gewöhnlich diejenigen von Jaswon und Ponter [6] sowie von Symm [7] genannt, welche 1963 einige einfache Randwertaufgaben der ebenen Laplacegleichung mit der Randintegralmethode lösten. Die Berandung wird von ihnen durch Geradenstücke angenähert, über welche die unbekannte Quellfunktion jeweils als konstant angesehen wird. Die Integralgleichung wird für die Elementmittelpunkte formuliert, und die Integrale werden mit der Simpson-Regel ausgewertet. Rizzo [8] formulierte ein analoges Vorgehen für die ebene Elastizitätstheorie. Er führt die Integration analytisch aus (was nur für gerade Segmente und bereichsweise konstante Quellfunktion möglich ist). Auf gleiche Weise verfährt Crouch [3] bei der Realisierung seines DDM-Programms. Cruse [9] verallgemeinerte diese Vorgehen für die dreidimensionale Elastostatik, wobei er die Oberfläche durch ebene Dreiecke annäherte. Eine wesentliche Verbesserung des Verfahrens wurde durch die Benutzung isoparametriger Randelemente sowie die Anwendung der Gaußschen Quadraturregel zunächst im zweidimensionalen Fall erzielt [10]. Die Vernetzung des Randes und die Genauigkeit und Effektivität der numerischen Integration sind von erheblichem Einfluß auf die Güte des Verfahrens. Diesbezüglich optimale Methoden wurden von Lachat und Watson [11] entwickelt.

Eingangs wurde die gegenüber der FEM bei gleicher Vernetzungsdichte geringere Knotenzahl als Vorteil der BEM herausgestellt. Dem stehen aber Nachteile für die rechentechnische Realisierung gegenüber: Die Ausführung der Integration bei der Erstellung der Koeffizientenmatrix ist (wegen gewisser Singularitäten im Integranden) aufwendiger und das resultierende Gleichungssystem hat nicht die günstigen Eigenschaften wie im Falle der FEM. Die Koeffizientenmatrix ist unsymmetrisch, vollbesetzt und nicht positiv definit. Das führt dazu, daß die Vorteile hinsichtlich Rechenzeit und zu verwaltender Datenmenge stark eingeschränkt werden bzw. nur bei entsprechend feiner Vernetzung bestehen bleiben. Ein wesentlicher Vorzug der BEM ist aber der Umstand, daß die Genauigkeit der Ergebnisse im Innern des Gebietes mit wachsendem Abstand vom Rand stark ansteigt. Die Fehler, die durch die Diskretisierung des Randes erzeugt werden, heben einander im Innern soweit auf, daß die BEM bei gleicher Vernetzungsdichte erheblich genauer ist als die FEM. Eigene Erfahrungen mit dem von Crouch [3] angegebenen Programm bestätigen dies. Inzwischen wurde die BEM auch auf dynamische, anisotrope und elastisch-plastische Fälle angewandt [12] bis [14]. Das Verfahren wird in den ersten beiden Fällen kompliziert durch die aufwendigere Form der Fundamentallösung, im letzteren dadurch, daß bei jedem Lastschritt auch die Spannungen im Innern berechnet werden müssen. Die Sichtung der internationalen Literatur zeigt aber, daß gegenwärtig gerade diese Gebiete intensiv bearbeitet werden. Zweifellos erfordert die BEM höheren mathematischen Aufwand, andererseits bietet sie die Möglichkeit der unmittelbaren und vorteilhaften Nutzung analytischer Kenntnisse. Vor dem Hintergrund begrenzter Rechnerkapazität liegt in letzterem Umstand offenbar ihr Hauptvorzug. Im übrigen ist die BEM gegenüber der FEM nach dem vorangegangenen umso vorteilhafter, je höher die angestrebte numerische Genauigkeit ist. Dies wird relativiert dadurch, daß die BEM nicht ganz so allgemein anwendbar ist, daß also u. U. Abstriche schon am mathematischen Modell gemacht werden müssen.

Offenbar sind vermehrte eigene Erfahrungen unerläßlich. Bei der weiteren Entwicklung von BEM-Programmen am IFE Halle ist zunächst die Beschränkung auf den elastostatischen Fall vorgesehen. Gegenwärtig wird ein für allgemeine bruchmechanische Aufgaben einsetzbares Programmsystem entwickelt mit folgenden Charakteristika:

- isoparametrige Vernetzung
- konsequente Nutzung Greenscher Tensoren für spezielle Gebiete, soweit verfügbar
- Einbeziehung der DDM, zumindest für die Diskretisierung räumlicher oder gekrümmter ebener Risse
- Substrukturtechnik, u. a. um die Vorteile spezieller Greenscher Tensoren voll zu nutzen.

LITERATUR

[1] Kuna, M.: Konstruktion und Anwendung hybrider Rißspitzenelemente für dreidimensionale bruchmechanische Aufgaben. Technische Mechanik 3 (1982) 2, 37 – 43.

[2] Kupradze, W. D.: Metody potenciala w teorii uprugosti, Moskau 1963.

[3] Crouch, S. L.: Solution of Plane Elasticity Problems by the Displacement Discountinuity Method. Int. J. Num. Mech. Eng. 10, 301 – 343 (1976).

[4] Snyder, M. D., Cruse, T. A.: Boundary Integral Equation Analysis of Cracked Anisotropic Plates. Int. J. Fracture 11, 315 – 328 (1975).

[5] Kuhn, G.: Numerische Behandlung von Mehrfachrissen in ebenen Scheiben. ZAMM 61, T 105 – T 106 (1981).

[6] Jaswon, M. A. und Ponter, A. R.: An integral equation solution of the torsion problem. Proc. Roy. Soc. A 273, 237 – 246 (1963).

[7] Symm, G. T.: Integral equation methods in potential theory II. Proc. Roy. Soc. A 275, 33 – 46 (1963).

[8] Rizzo, F. J.: An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Q. Appl. Math. 25, 83 – 95 (1967).

[9] Cruse, T. A.: Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. Int. J. Sol. Struct. 5, 1259 – 1274 (1969).

[10] Boissenot, J. M., Lachat, J. C. and Watson, J. O.: Etude par equations integrales d'une eprourette C. T. 15. Revue de Physique Appliquee 9, 611 – 615 (1974).

[11] Lachat, J. C. and Watson, J. O.: Effektive numerical treatment of boundary integral equations. Int. J. Num. Mech. Eng. 10, 991 – 1005 (1976).

[12] Cruse, T. A. and Rizzo, F. J.: A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I u. II. J. Math. Anal. Appl. 22, 244 – 259, 342 – 355 (1968).

[13] Swedlow, J. L. and Cruse, T. A.: 7. Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow. Int. J. Solids Structures 7, 1678 – 1684 (1971).

[14] Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A.: The boundary element method in plasticity. Appl. Math. Modelling 5, 275 – 281 (1981).

Anschrift des Verfassers:

Dr. H. G. Maschke
Akademie der Wissenschaften der DDR
Institut für Festkörperphysik und
Elektronenmikroskopie

4020 Halle
Weinberg, Postfach 250