

## Bewertung gekerbter Bauteile

S. Sähn

### 1. Einleitung

Für das Bruchverhalten gekerbter und angerissener Bauteile ist in vielen Fällen der örtliche Beanspruchungszustand vor der Rispspitze bzw. im Kerbgrund sowohl bei statischer als auch bei zyklischer Belastung maßgebend. Das betrifft insbesondere Bauteile, die in Bereichen kleiner Nennbeanspruchungen versagen. Ziel der Arbeit ist, aus den örtlichen Beanspruchungen globale Bruchparameter zur Bewertung gekerbter Bauteile abzuleiten.

### 2. Bruchverhalten bei statischer Belastung

In Bauteilen mit kleinen plastisch verformten Gebieten (Kleinbereichsfließen vor der Rispspitze bzw. im Kerbgrund mit  $r_{pl} \ll a$ ,  $r_{pl}$  – Ausdehnung der plastischen Zone,  $a$  – Kerb- oder Risptiefe) bestimmt das elastische Beanspruchungsfeld wesentlich den Beanspruchungszustand auch in der plastischen Zone. Daraus resultiert die Eignung globaler Kenngrößen (Bruchparameter) der LEBM zur Beschreibung des stabilen und instabilen Riswachstums.

Unter der Voraussetzung  $r_{pl} \ll a$  entspricht die Dehnungsverteilung auch in der plastischen Zone (im Gegensatz zur Spannungsverteilung) noch näherungsweise der linearelastischen Dehnungsverteilung.

In unmittelbarer Nähe des Kerbgrundes gilt für Spitzkerben bei linearelastischem Materialgesetz im Ligament ( $\varphi = 0$  bzw.  $y = 0$ ; vgl. Bild 1) für den EVZ:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \approx \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\rho}{2r} \\ 1 + \frac{\rho}{2r} \\ 2\nu \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit  $K = \sigma_o \cdot \sqrt{\pi a} \cdot f(\text{Geometrie})$  – Spannungsintensitätsfaktor,  $\rho$  – Krümmungsradius

$$\epsilon_1 = \epsilon_y = \frac{K}{E\sqrt{2\pi r}} \cdot \left[ 1 - \nu(1+2\nu) + \frac{\rho}{2r}(1+\nu) \right] \quad (2)$$

Zur Bewertung des Beanspruchungszustandes werden geeignete über ein von der Struktur des Materials abhängendes Volumen  $V_o^*$  gemittelte Vergleichsdehnungen benutzt (vgl. [1]). Treten wesentliche Beanspruchungsgradienten nur in einer Richtung auf, so genügt die Mittelung über einer von der Struktur abhängenden Länge  $d_o^*$ , z. B.:

$$\epsilon_{vm} = \epsilon_{1m} = \frac{1}{d_o^*} \int_{(d_o^*)} \epsilon_1(r) dr \quad (3)$$

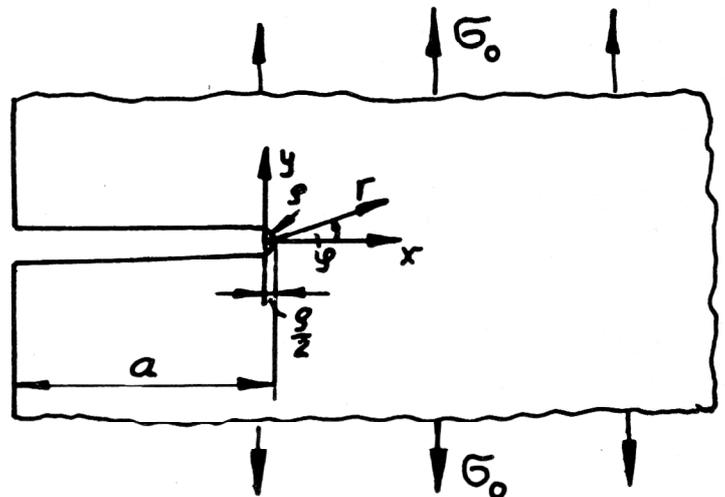


Bild 1  
Außenkerbe im Zugspannungsfeld

Mit (2) ergibt sich aus (3)

$$\epsilon_{1m} = \frac{1}{d_o^*} \int_{\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2} + d_o^*} \epsilon_1(r) dr$$

$$\epsilon_{1m} = \frac{K}{E\sqrt{2\pi} d_o^*} [2(1-\nu(1+2\nu))(\sqrt{\frac{\rho}{2} + d_o^*} - \sqrt{\frac{\rho}{2}}) + \rho(1+\nu) \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{2} + d_o^*}} \right) ] \quad (4)$$

Als Bruchkriterium wird verwendet

$$\epsilon_{1m} = \epsilon_{krit} \quad (5)$$

Die Ersatzstrukturlänge  $d_o^*$  und  $\epsilon_{krit}$  hängen vom Werkstoff, die kritische Dehnung  $\epsilon_{krit}$  u. a. auch vom Beanspruchungszustand ab. Deshalb und aus statistischen Gründen dürfen sowohl  $d_o^*$  als auch  $\epsilon_{krit}$  nur an „ähnlichen“ gekerbten Proben ermittelt werden.

Beim Erreichen kritischer (zum Bruch führender) Zustände gilt nach (5):

für den idealen RiB,  $\rho \Rightarrow 0$

$$K_{krit} = K_{cR} = K_{Ic} = \sigma_{ocR} \sqrt{\pi a_R} \cdot f(\text{Geometrie})$$

$$\epsilon_{krit} = \frac{K_{Ic}}{E\sqrt{2\pi} d_o^*} 2 [1 - \nu(1+2\nu)] \quad (6)$$

$$= \frac{K_{Ic}}{E\sqrt{2\pi} d_o^*} \quad \text{für } \nu = 0,31$$

für die gekerbte Probe

$$K_{krit} = K_{ck} = \sigma_{ock} \sqrt{\pi a_k} f(\text{Geometrie})$$

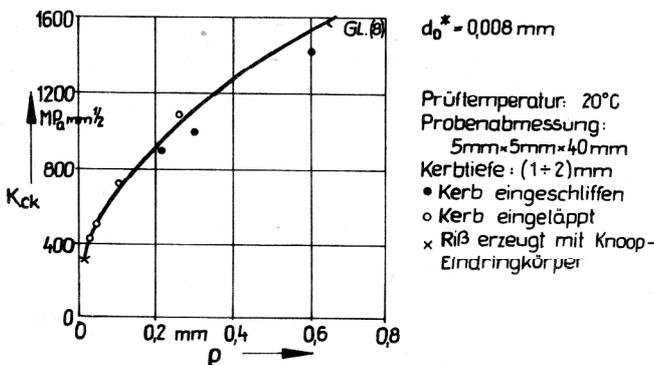
$$\epsilon_{krit} = \frac{K_{ck}}{E \sqrt{2\pi d_o^*}} [2(1-\nu(1+2\nu))(\sqrt{\frac{\rho}{2d_o^*}+1} - \sqrt{\frac{\rho}{2d_o^*}}) + (1+\nu)\sqrt{\frac{\rho}{2d_o^*}} \cdot (\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2\frac{d_o^*}{\rho}}})] \quad (7)$$

Nimmt man gleiche kritische Dehnungen für Riß und Kerb an, erhält man mit  $\nu = 0,31$  aus (6) und (7)

$$\frac{K_{cR}}{K_{ck}} = \frac{\sigma_{ocR} \sqrt{a_R}}{\sigma_{ock} \sqrt{a_k}} = \frac{1 + 0,81 \frac{\rho}{d_o^*} [\sqrt{1 + 2 \frac{d_o^*}{\rho}} - 1]}{\sqrt{1 + \frac{\rho}{2d_o^*}}} \quad (8)$$

- $K_{cR}$  – kritischer Spannungsintensitätsfaktor des Risses (Bruchzähigkeit  $K_{Ic}$ )
- $K_{ck}$  – kritischer Spannungsintensitätsfaktor des Kerbes
- $\sigma_{ocR}$  – Nennspannung in der Probe mit Riß beim Bruch
- $\sigma_{ock}$  – Nennspannung in der scharf gekerbten Probe beim Bruch

In Bild 2 ist der mit Gleichung (8) berechnete Spannungsintensitätsfaktor  $K_{ck}$  dargestellt. Unter Verwendung der experimentell bestimmten Bruchzähigkeit  $K_{cR} = 300 \text{ MPa mm}^{1/2}$  und eines Wertes für  $\rho \neq 0$  wurde  $d_o^* = 0,008 \text{ mm}$  für den vorliegenden Werkstoff (Hartmetall WC + 6 % C<sub>0</sub>) ermittelt und damit eine sehr gute Beschreibung der experimentellen Daten erreicht.



**Bild 2**  
 Kritischer Spannungsintensitätsfaktor gekerbter Proben aus Hartmetall WC + 6 % C<sub>0</sub> [3]

### 3. Bewertung zyklisch belasteter gekerbter Bauteile

Bei zyklischer Belastung sind die Bedingungen für Kleinbereichsfließen ( $\Delta r_{pl} \ll a$ ) auch für Konstruktionswerkstoffe häufig erfüllt wegen

$$\Delta r_{pl} \approx \frac{r_{pl}}{4} \quad \text{und der i. a. kleineren Nennbeanspruchungen}$$

$\Delta r_{pl}$  – Ausdehnung des zyklisch plastifizierten Gebietes

$r_{pl}$  – Ausdehnung der plastischen Zone bei statischer Belastung (und gleicher Belastungshöhe)

Das gilt insbesondere im Bereich großer Bruchlastzyklen (kleiner Nennbeanspruchungen). Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf den Dauerschwingbereich. Es ist üblich, die Dauerschwingfestigkeit gekerbter Proben  $\sigma_{ADK}$  mit der Dauerschwingfestigkeit ungekerbter Proben  $\sigma_{AD}$  zu vergleichen:

$$\text{Kerbwirkungszahl: } \beta_K = \frac{\sigma_{AD}}{\sigma_{ADK}} \quad (9)$$

Das Hauptnormalspannungskriterium ist für die Bewertung zyklisch belasteter gekerbter Proben für viele Werkstoffe brauchbar.

Die Formzahl  $\alpha_K$  (Annahme linearelastischen Materialverhaltens) ist dabei wie folgt definiert:

$$\alpha_K = \frac{\sigma_{1amax}}{\sigma_{oa}} \quad (10)$$

$\sigma_{1amax}$  – maximale Spannungsamplitude im Kerbgrund

$\sigma_{oa}$  – Nennspannungsamplitude

Es gibt eine große Zahl von Ansätzen, die Zusammenhänge zwischen  $\beta_K$  und  $\alpha_K$  darstellen, in denen sich der häufig beobachtete Zusammenhang  $1 < \beta_K < \alpha_K$  widerspiegelt. Ein solcher Zusammenhang folgt ebenso aus einem Gl. (3) entsprechenden Ansatz, wenn man die über ein bestimmtes (kleines) von der Struktur des Materials abhängendes Volumen gemittelten Spannungen  $\sigma_{ADm}$  mit den entsprechenden Spannungsamplituden im ungekerbten Probestab vergleicht.

$$\sigma_{AD} = \sigma_{ADm} = \frac{1}{d^*} \int_{\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2} + d^*} \sigma_{ya}(r) dr \quad (11)$$

$d^*$  – Ersatzstrukturlänge

$$\text{Mit } \sigma_{1a} = \sigma_{ya} = \frac{K_a}{\sqrt{2\pi r}} [1 + \frac{\rho}{2r}]; K_a = \sigma_{oa} \sqrt{\pi a} \cdot f$$

für die scharf gekerbte Probe mit Außenkerb ergibt sich

$$\sigma_{yamax} = \sigma_{ya}(r = \frac{\rho}{2}) = 2\sigma_{oa} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \cdot f$$

$$\text{und aus (11) } \sigma_{am} = 2\sigma_{oa} \sqrt{\frac{a}{\rho + 2d^*}} \cdot f$$

Hieraus folgt mit den Gln. (9) und (10)

$$\alpha_K = 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \cdot f$$

$$\beta_K = 2 \sqrt{\frac{a}{\rho + 2d^*}} \cdot f$$

und damit

$$\frac{\alpha_K}{\beta_K} = \sqrt{1 + 2 \frac{d^*}{\rho}} \quad (12)$$

Eine analoge Beziehung findet Lukas [2] mit einem Bruchmechanikmodell

$$\frac{\alpha_K}{\beta_K} = \sqrt{1 + 4,5 \frac{a_c}{\rho}} \quad (13)$$

$a_c$  – kritische Rißlänge ( $a_c \approx 0,01 \dots 0,2$  mm, strukturabhängig!)

Die durch Schwingbeanspruchungen oberhalb der Dauerschwingfestigkeit erzeugten Anrisse  $a = a_c$  sind für  $\sigma_a < \sigma_{AD}$  und  $\sigma_{aK} < \sigma_{ADK}$  nicht ausbreitungsfähig, d. h. zwischen dem Schwellenwert  $\Delta K_o$  der Spannungsintensitätsfaktorschwingbreite und der Dauerschwingfestigkeit gilt der Zusammenhang

$$\Delta K_o = 2 \sigma_{AD} \sqrt{\pi a_c} \cdot f \quad (14)$$

Den beiden Beziehungen (12) und (13) haftet der prinzipielle Mangel an, aus einem Vergleich von gekerbten und ungekerbten Proben abgeleitet worden zu sein:

- Gekerbte und ungekerbte Proben sind aber „statistisch nicht gleichwertig“ (die ungekerbte Probe besitzt eine größere Oberfläche (bzw. größeres Volumen), in der mit größerer Wahrscheinlichkeit eine Fehlstelle als im begrenzten Bruchgebiet der gekerbten Probe auftreten kann)
- und die Bruchmechanismen können sich im Dauerschwingbereich bei gekerbten von ungekerbten Proben unterscheiden (Einfluß der Mehrachsigkeit des Spannungszustandes).

Daraus folgert man, daß i. a.  $\sigma_{AD} \neq \sigma_{ADm}$  ist. Die erwähnten Unterschiede wollen wir mit einem Korrekturfaktor  $F_K$  erfassen, der u. a. in den Normen als bekannter Größeneinflußfaktor enthalten ist.

$$\sigma_{AD} = F_K \sigma_{ADm} \quad (15)$$

Damit werden Einflüsse der so von Neuber benannten „Mikrostützwirkung“ von anderen Einflüssen getrennt.

Die „Ersatzstrukturlänge“  $d_1^*$  wird im Gegensatz zu Gl. (11) aus einem Vergleich zweier gekerbter „statistisch gleichwertiger“ Proben aus Ergebnissen im Dauerschwingbereich ermittelt:

$$\sigma_{ADm} = \frac{1}{d_1^*} \int_{\frac{\rho_1}{2}}^{\frac{\rho_1}{2} + d_1^*} \sigma_{ya1}(r) dr = \frac{1}{d_1^*} \int_{\frac{\rho_2}{2}}^{\frac{\rho_2}{2} + d_1^*} \sigma_{ya2}(r) dr \quad (16)$$

Aus Versuchsergebnissen an gekerbten Rundproben aus St42K mit den Kerbradien  $\rho_2 = 0,3$  mm und  $\rho_1 = 3,5$  mm findet man unter Verwendung der elastischen Spannungsverteilung eine Ersatzstrukturlänge

$$d_1^* = 0,015 \text{ mm,}$$

die sich von der von Neuber für diesen Werkstoff angegebenen ( $d^* \approx 0,05$  mm) erheblich unterscheidet.

Wir definieren damit eine  $\beta_K^*$ -Zahl:

$$\beta_K^* = \frac{\sigma_{ADm}}{\sigma_{ADK}} = \frac{\frac{1}{d_1^*} \int_{\frac{\rho_1}{2}}^{\frac{\rho_1}{2} + d_1^*} \sigma_{ya}(r) dr}{\sigma_{oa}} \quad (17)$$

aus der wir die Dauerschwingfestigkeit „statistisch gleichwertiger“ Proben ermitteln können:

$$\sigma_{ADK_2} = \frac{\beta_{K_1}^*}{\beta_{K_2}^*} \sigma_{ADK_1} \quad (18)$$

Mit der bekannten Kerbwirkungszahl  $\beta_K$  besteht dann folgender Zusammenhang:

$$\beta_K = \frac{\sigma_{AD}}{\sigma_{ADK}} = \frac{\sigma_{AD}}{\sigma_{ADm}} \cdot \frac{\sigma_{ADm}}{\sigma_{ADK}} = F_K \cdot \beta_K^* \quad (19)$$

$F_K$  muß beim Vergleich statistisch ungleicher Proben bzw. Bauteile experimentell oder theoretisch durch statistische Betrachtungen bestimmt werden.

In Tabelle 1 sind die berechneten  $\beta_K$ -Werte nach Gl. (19) sowie Gln. (12) und (12 a) den experimentell ermittelten gegenübergestellt.

$$\beta_K = 1 + \frac{\alpha_K - 1}{1 + \sqrt{\frac{d^*}{\rho}}} \quad (12 a)$$

wobei  $F_K$  aus dem Experiment mit  $\rho = 3,5$  mm ermittelt wird:

$$F_K = \left( \frac{\beta_K^{exp}}{\beta_K^*} \right) \quad \rho = 3,5 \text{ mm}$$

Verwendet man zum Vergleich mit dem ungekerbten Stab „statistisch gleichwertig“ gekerbte Proben (Tabelle 1), so kann man zeigen, daß die „Ersatzstrukturlängen“  $d^*$ , wie sie Neuber benutzt, auch noch von der Kerbgeometrie abhängen (Tabelle 1 – drittletzte Spalte –  $d^*$  wurde aus den experimentell ermittelten  $\beta_K$  aus Gl. (12 a) berechnet).

Man erkennt weiter, daß die mit den Ersatzstrukturlängen  $d_1^* = \text{konst}$  ermittelten  $d^*$  prinzipiell richtig die Abhängigkeit  $d^*$  von der Kerbgeometrie bestätigen (Gln. (20) und (21)). Damit kann  $d_1^*$  eher als  $d^*$  als ein werkstoffspezifischer Wert angesehen werden.

$$F_K = \frac{\beta_K(d^*)}{\beta_K^*(d_1^*)}$$

$$d^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{F_K^2} - 1 \right] \rho + \frac{d_1^*}{F_K^2} \quad (20)$$

und aus Gl. (12 a)

$$\sqrt{\frac{d^*}{\rho}} = \frac{\sqrt{\frac{d_1^*}{\rho} (\alpha_K - F_K) + \alpha_K (1 - F_K)}}{\sqrt{\frac{d_1^*}{\rho} (F_K - 1) + \alpha_K F_K - 1}} \quad (21)$$

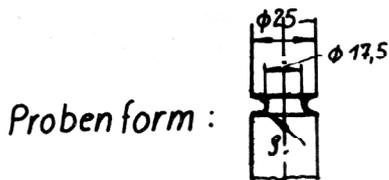
#### LITERATUR

- [ 1 ] Sähn, S.: Ein Beitrag zum Bruchverhalten von Konstruktionswerkstoffen. Dissertation B, TU Dresden, 1981.
- [ 2 ] Lukas, P.: Ermüdungsausbreitung in gekerbten Körpern. VI. Symposium Verformung und Bruch, Magdeburg, 1982.
- [ 3 ] Blumenauer, H.; Pusch, G.: Technische Bruchmechanik. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1982.

Anschrift des Verfassers:

Dr. sc. techn. S. Sähn  
 Technische Universität Dresden  
 Sektion Grundlagen des Maschinenwesens  
 8027 Dresden  
 Mommsenstraße 13

Tabelle 1



$s/mm$	$\alpha_K$	$d^* = 0,05mm$		$d_1^* = 0,015mm$		Experiment $\beta_K$	$\beta_K = F_K \cdot \beta_K^*$		Exper. $d^*/mm$	$d_1^* = 0,015mm$	
		$\beta_K(12)$	$\beta_K(12a)$	$\beta_K^*(12)$	$\beta_K^*(12a)$		(12)	(12a)		$d^*/mm$ (20)	$d^*/mm$ (21)
3,5	1,71	1,69	1,63	1,70	1,67	1,50	1,50	1,50	0,62	0,52	0,65
1,0	2,70	2,57	2,39	2,66	2,51	2,43	2,35	2,25	0,077	0,16	0,12
0,3	4,60	3,98	3,56	4,39	3,94	3,77	3,87	3,54	0,027	0,062	0,052