TECHNISCHE MECHANIK 5 (1984) Heft 3
Manuskripteingang: 15. 7. 1983

Die Berücksichtigung von Starrkörperbewegungen bei der numerischen Behandlung von Kontaktproblemen

Rolf Schmidt

1. Einleitung

Werden geometrische Kontaktbedingungen in einem vom Kontaktbereich weit entfernten Koordinatensystem beschrieben, dann bereitet die Lösung des Problems unter Umständen numerische Schwierigkeiten. Im Fall einer Diskretisierung des Kontaktproblems ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen, dessen Konditionszahl ein Maß für den erforderlichen numerischen Aufwand darstellt [1]. Dieser Aufwand wird sehr groß, wenn die Verformungsgrößen in den Kontaktbedingungen relativ große Starrkörperanteile beinhalten.
Die auftretende Schwierigkeit kann beseitigt werden, indem eine numerische Transformation der Kontaktbedingungen durchgeführt wird, die die Kondition der Systemmatrix „optimal" verbessert. Die Transformation bewirkt gleichzeitig die Elimination der Starrkörpervariablen.
Die Vorgehensweise wird am Beispiel eines ebenen Kontaktproblems vorgestellt.

2. Formulierung eines Kontaktproblems

Zwei Bauteile seien längs einer Kontaktlinie verbunden.
Bezüglich der Kontaktlinie sei das Kontaktproblem eben. Gesucht seien die Verformungen und die Linienlasten längs der Kontaktlinie infolge einer vorgegebenen Belastung der Bauteile. Als Beispiel für derartige Problemstellungen kann ein Laufrad, bestehend aus einer Rotationsschale mit gleichmäßig am Umfang verteilten Schaufeln angesehen werden. Die Schaufeln seien im Vergleich zur Rotationsschale starr. Die Belastung der Bauteile resultiert im Beispiel aus der Zentrifugalkraft. Die Formulierung der Kontaktbedingungen erfolgt im Koordinatensystem u,w (vgl. Bild 1).

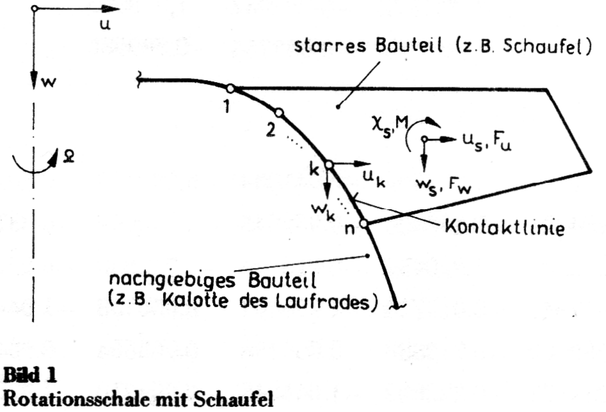

Bild 1
Rotationsschale mit Schaufel

Die Diskretisierung erfolgt für n Kontaktpunkte; deren Verformungen u_k, w_k (k = 1 bis n) sind im Vektor $\vec{v}^T = (u_1, w_1, u_2, w_2$ bis $u_n, w_n)$ zusammengefaßt. Für die unbekannten Kraftgrößen längs der Kontaktlinie wird ein Ansatz

$$\vec{L}(s) = \vec{X}^T \vec{l}(s) \tag{1}$$

mit $\vec{X}^T = (x_1, \ldots, x_i, \ldots x_m)$ Koeffizentenvektor
und $\vec{l}^T = (\vec{l}_1(s), \ldots, \vec{l}_m(s)$ m Einheitslastfunktionen

gewählt. Durch Integration längs der Kontaktlinie erhält man für die m Koeffizienten die Gleichgewichtsbedingung

$$\underline{L}\,\vec{X} - \vec{F} = \vec{0} \tag{2}$$

mit dem Kraftvektor $\vec{F}^T = (F_u, F_w, M)$, der die Belastung des starren Bauteils widerspiegelt.
Die Nachgiebigkeit des elastischen Bauteils unter dem Einfluß der Einheitslasten und einer gegebenen Belastung (z. B. Zentrifugalkraft) wird für die n Kontaktpunkte durch

$$\vec{v} = \underline{Q}\vec{X} + \vec{v}_0 \tag{3}$$

beschrieben.
Die Bewegung der Kontaktpunkte bezogen auf die Starrkörperbewegung des starren Bauteils lautet:

$$\vec{v} = \underline{Z}\vec{s}$$

mit $\vec{s}^T = (w_s, u_s, \chi_s)$. Die Matrix $\underline{Z}$ enthält die Starrkörperverschiebungsfunktionen aller n Kontaktpunkte.
Der übliche Weg entspricht dem direkten Aufbau und Lösen eines Gleichungssystems aus den Beziehungen (2), (3), (4) mit (m + 3) Unbekannten.

3. Lösungsstrategie

Ehe auf die angekündigte Transformation eingegangen wird, soll der Aufbau eines verträglichen Gleichungssystems angedeutet werden. Für den Fall, daß mehr Kontaktforderungen als Freiwerte vorliegen (2n > m), wird davon ausgegangen, daß die verbleibende Verformungsdifferenz

$$\vec{\varepsilon} = \underline{Q}\vec{X} + \vec{v}_0 - \underline{Z}\,\vec{s} \tag{5}$$

ninimal wird. Das zugehörige Variationsproblem

$$(\vec{X}, \vec{s}) = \vec{\varepsilon}^T \vec{\varepsilon} + \vec{g}^T \vec{\lambda} \tag{6}$$

erücksichtigt, daß die Gleichgewichtsgleichungen (2) ls Nebenbedingung

$$\vec{g} = \underline{L}\,\vec{X} - \vec{F} \tag{7}$$

zu verwenden sind. Aus

$$\delta I(\vec{X}, \vec{s}) = \vec{0}$$

und den Beziehungen (2) folgt das zu lösende verträgliche Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}^T\underline{Z} & -\underline{Z}^T\underline{Q} & 0 \\ -\underline{Q}^T\underline{Z} & \underline{Q}^T\underline{Q} & \underline{L}^T \\ \underline{0} & \underline{L} & \underline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s} \\ \vec{X} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{Z}^T\vec{v}_0 \\ -\underline{Q}^T\vec{v}_0 \\ \vec{F} \end{pmatrix} . \qquad (8)$$

Ein beliebiger Verschiebungszustand der Kontaktpunkte kann stets eindeutig zerlegt werden in eine Starrkörperbewegung und eine minimale Verformungsdifferenz. Für die Matrix $\underline{Q}$ lautet die Zerlegung

$$\underline{Q} = \underline{Z}\,\underline{S} + \underline{D}\,, \qquad (9)$$

die durch die Forderung „möglichst kleiner" Diagonalelemente ($\underline{D}^T\underline{D} \rightarrow$ Minimum) eindeutig wird.
Mittels einer Transformationsmatrix $\underline{T}$ lassen sich die minimalen Verformungsdifferenzen berechnen:

$$\underline{D} = \underline{T}\,\underline{Q}\,; \quad \vec{d}_0 = \underline{T}\,\vec{v}_0 \qquad (10)$$

Die Matrix $\underline{T}$ ist symmetrisch

$$\underline{T}^T = \underline{T} \qquad (11)$$

und eliminiert Starrkörperverschiebungsanteile, weil gilt:

$$\underline{T}\,\underline{Z} = \underline{0}\,. \qquad (12)$$

Die Multiplikation der Kontaktforderung (5) mit der Transformationsmatrix T entspricht dem Formulieren der Kontaktbedingungen in einem Koordinatensystem, in dem die Verschiebungen minimal und frei von Starrkörperanteilen sind. Der anschließende Aufbau eines verträglichen Gleichungssystems führt zu

$$\begin{pmatrix} \underline{D}^T\underline{D} & \underline{L}^T \\ \underline{L} & \underline{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{X} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{D}^T\vec{d}_0 \\ \vec{F} \end{pmatrix} . \qquad (13)$$

Die Formulierung (13) ist äquivalent der Formulierung (8) mit den Vorteilen einer geringeren Dimension und verbesserten Kondition.
Die Vorschrift zur Bildung der Transformationsmatrix ergibt sich aus der Forderung (12).
Die Matrix der Starrkörperverschiebungsfunktionen kann in Untermatrizen geschrieben werden:

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 \\ \vdots \\ \underline{Z}_k \\ \vdots \\ \underline{Z}_n \end{pmatrix} . \qquad (14)$$

Dann gilt:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} \underline{E} - \underline{Z}_1\underline{R}\underline{Z}_1^T & -\underline{Z}_1\underline{R}\underline{Z}_2^T & \cdots & -\underline{Z}_1\underline{R}\underline{Z}_n^T \\ -\underline{Z}_2\underline{R}\underline{Z}_1^T & \underline{E} - \underline{Z}_2\underline{R}\underline{Z}_2^T & \cdots & -\underline{Z}_2\underline{R}\underline{Z}_n^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\underline{Z}_n\underline{R}\underline{Z}_1^T & -\underline{Z}_n\underline{R}\underline{Z}_2^T & \cdots & \underline{E} - \underline{Z}_n\underline{R}\underline{Z}_n^T \end{pmatrix} \qquad (15)$$

$$\text{mit } \underline{R} = \left(\sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k^T \underline{Z}_k \right)^{-1} . \qquad (16)$$

Im Sonderfall der ebenen Bewegung, das heißt

$$\underline{Z}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_k \\ 1 & 0 & b_k \end{pmatrix} , \qquad (17)$$

lassen sich die Elemente von $\underline{T}$ analytisch berechnen.
Die typischen Terme vereinfachen sich zu:

$$\underline{Z}_r\underline{R}\underline{Z}_s^T = \frac{1}{n}\left(\underline{E} + \vec{e}_s\vec{e}_r^{\,T}\right) , \qquad (18)$$

mit den Abkürzungen

$$\vec{e}_k = \frac{1}{\sqrt{e}} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \right\}$$

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad b = \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad c = \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

$$e = n\,(nc - a^2 - b^2). \qquad (19)$$

4. Beispiel

Im numerischen Beispiel wird ein Kontaktproblem für n = 3 Kontaktpunkte und m = 4 Einheitslastfunktionen behandelt. Die Starrkörperverschiebungsfunktionen seien beschreibbar durch

k	1	2	3
a_k	0,8962	−0,1207	−3,0330
b_k	−5,5793	−3,3598	−1,7150

.

Für die Transformationsmatrix erhält man dann über

k	1	2	3
$\vec{e}_k$	−0,735972	−0,282032	1,018005
	0,845741	−0,055754	−0,789986

;

(Kontrollmöglichkeit: $\sum \vec{e}_k = \vec{0}$)

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1.458344 & 0.622442 & -1.207568 & -0.041034 & -0.250775 & -0.581408 \\ 0.622442 & 1.284721 & 0.238526 & -0.952845 & -0.860969 & -0.331875 \\ -1.207568 & 0.238526 & 1.920457 & -0.015724 & -0.712888 & -0.222802 \\ -0.041034 & -0.952845 & -0.015724 & 1.996891 & 0.056758 & -1.044045 \\ -0.250775 & -0.860969 & -0.712888 & 0.056758 & 0.963664 & 0.804210 \\ -0.581408 & -0.331875 & -0.222802 & -1.044045 & 0.804210 & 1.375921 \end{pmatrix} .$$

Die Einheitslastverformungen seien gegeben durch:

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} -6.94260 & 7.05602 & 5.67022 & 4.22535 \\ 176.42807 & -159.82813 & -135.69979 & -99.76632 \\ -3.09410 & 3.58714 & 3.78345 & 3.49548 \\ 171.95267 & -155.57241 & -134.39957 & -100.19355 \\ -0.09026 & 0.09744 & 0.39618 & 0.03488 \\ 169.17230 & -152.53375 & -132.01416 & -97.36854 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0.74704 \\ -5.88885 \\ 1.72261 \\ -8.18432 \\ 0.85786 \\ -8.3273 \end{pmatrix}.$$

Die Starrkörperverschiebungsanteile sind besonders in den Komponenten w_k sichtbar.
Im Ergebnis der Transformation erhält man:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} -1.963504 & 1.5182966 & 1.4047847 & 0.5556695 \\ 1.690678 & -1.3121538 & 1.6286743 & 3.0451012 \\ 4.192904 & -3.3932702 & -0.7052727 & 1.0581399 \\ -1.033119 & 0.5421307 & -1.5212481 & -3.5828931 \\ -2.229400 & 1.8749726 & -0.6995126 & -1.6138097 \\ -0.6575606 & 0.77002263 & -0.1074271 & 0.5377913 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_0 = \begin{pmatrix} 0.3060691 \\ 3.1337785 \\ 2.3739257 \\ -2.0470020 \\ -2.6799948 \\ -1.0867768 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem (13) hat folgende Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} 30.764 & -24.674 & 0.2399 & 15.440 & 6.0337 & 5.6247 & 58.87 \\ & 19.944 & 0.1700 & -11.297 & 3.348 & -4.8066 & -48.156 \\ & & 7.9385 & 11.515 & 7.0687 & -4.2374 & -54.147 \\ & & & 26.432 & 2.7652 & -3.0725 & -34.026 \\ & \text{sym.} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

und rechte Seite:

$$\begin{pmatrix} -23.455 \\ 18.674 \\ -8.965 \\ -23.300 \\ 37.37 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Auf die Darstellung der Systemmatrix ohne die eingeführte Transformation wird verzichtet. Im vorliegenden Beispiel wird die Konditionszahl von ursprünglich $1{,}2 \cdot 10^7$ durch die Transformation auf $1{,}1 \cdot 10^3$ verbessert. Die numerischen Vorteile der eingeführten Transformation sind damit deutlich sichtbar.

LITERATUR

[1] Beresin, I.S.; Shidkow, N.P.: Numerische Methoden 2. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971.

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. Rolf Schmidt
8045 Dresden
Wilhelm-Liebknecht-Straße 99