

# Test eines Auswerteverfahrens für axialsymmetrische Spannungszustände am Beispiel der diametral gedrückten Kugel

Martin Stockmann, Klaus Ullmann

## 1. Einleitung

In der vorangegangenen Arbeit [1] wurde ein Verfahren zur vollständigen Auswertung eines axialsymmetrischen Spannungszustandes aus den Isothermen der Meridianebene vorgestellt. Zur Vereinfachung ist dabei Inkompressibilität, also  $\nu = 1/2$  vorausgesetzt. Da beim praktischen Erstarrungsversuch, zu dessen Auswertung das Verfahren vordergründig dienen soll,  $\nu = 0,49$  ist, soll an einem geeigneten Testbeispiel der dadurch entstehende systematische Fehler abgeschätzt werden. Weiter wird das Beispiel auch eine Aussage zu den Unsicherheiten des Auswerteverfahrens hinsichtlich der enthaltenen numerischen Differentiation und Integration gestatten.

## 2. Testbeispiel

Von einem Testbeispiel, das zur Beurteilung eines Auswerteverfahrens für experimentelle Daten dient, ist allgemein zu fordern, daß eine exakte theoretische Lösung vorliegt, daß das Beispiel eine saubere Versuchsdurchführung erlaubt (exakte Einhaltung der Randbedingungen bei möglichst einfachem Versuchsaufbau) und daß es für eine Klasse praktischer Probleme repräsentativ ist. Unter diesen Gesichtspunkten wird als Beispiel für axialsymmetrische Probleme die diametral gedrückte Kugel ausgewählt.

Über die Technologie der experimentellen Untersuchungen wurde bereits in der Arbeit [2] berichtet. Bevor die eigentlichen Testergebnisse diskutiert werden, wird deshalb nur noch auf einige Eigenschaften der theoretischen Lösung und deren numerische Umsetzung eingegangen.

### 2.1. Theoretische Lösung für die Verschiebungen

Die theoretische Lösung für die Verschiebungen erfolgt nach Lurje [3]. Ausgangspunkt seiner Theorie ist der Dreifunktionenansatz nach Papkovič und Neuber für die elastischen Grundgleichungen, der auf sphärische Koordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  transformiert wird. Lösungen sind dann räumliche Kugelfunktionen der Form  $r^n P_n(\mu)$ , wobei  $P_n(\mu)$  Legendresche Polynome darstellen. Entsprechend wird auch die äußere Belastung in Reihen dieser Polynome entwickelt.

Wegen der schlechten Konvergenz der erhaltenen Lösung werden die Reihen mittels Partialbruchzerlegung der Koeffizienten in langsam konvergierende Anteile und in relativ gut konvergierende Reste zerlegt. Die langsam konvergierenden Teile werden derart angesetzt, daß nach Integration eine Darstellung in geschlossener Form möglich ist. Die endgültigen Lösungen für die radiale und meridionale Verschiebung lauten dann

$$u_r = \frac{F\rho}{8\pi G r_0} \left\{ \frac{2(m-2)}{m+1} + \frac{1-\rho^2}{2\rho^2} \left( \frac{1-\rho^2}{s^3} + \frac{1-\rho^2}{s_*^3} - 2 \right) + \frac{4(m-1)}{m} \right. \\ \cdot \frac{1+\rho^2}{2\rho^2} (1/s + 1/s_* - 2) + 1/2 \cdot \left( \frac{\alpha_1}{\rho} + \frac{\beta_1}{\rho^3} \right) \left( \ln \frac{s+\rho-\mu}{s_*-\rho-\mu} - 2\rho \right) \\ + 1/2 \cdot \left( \frac{\alpha_2}{\rho^2} + \frac{\beta_2}{\rho^4} \right) \left[ (\rho-\mu) \ln \left| \frac{s+\rho-\mu}{1-\mu} \right| - (\rho+\mu) \ln \left| \frac{s_*-\rho-\mu}{1-\mu} \right| \right. \\ \left. \left. + 2-s-s_*-\rho^2 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} (L_{2k}^{(3)} + M_{2k}^{(3)} \rho^{-2}) \rho^{2k} P_{2k}(\mu) \right\}, \quad (1)$$

$$u_{\vartheta} = - \frac{F\rho \sin \vartheta}{8\pi G r_0} \left\{ \frac{1-\rho^2}{\rho} \left( \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s_*^3} \right) + 1/2 \cdot \left( \frac{\gamma_1}{\rho} + \frac{\delta_1}{\rho^3} \right) \right. \\ \cdot \left[ \frac{\mu\rho-1}{(1-\mu^2)s} + \frac{\mu\rho+1}{(1-\mu^2)s_*} \right] + 1/2 \cdot \left( \frac{\gamma_2}{\rho^2} + \frac{\delta_2}{\rho^4} \right) \left[ \frac{\mu(s+s_*-2)}{1-\mu^2} \right. \\ \left. \left. - \ln \frac{(s+\rho-\mu)(s_*-\rho-\mu)}{(1-\mu^2)^2} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} (Q_{2k}^{(3)} + S_{2k}^{(3)} \rho^{-2}) \rho^{2k} P'_{2k}(\mu) \right\} \quad (2)$$

Dabei bedeuten  $\rho = r/r_0$  die dimensionslose Radiuskoordinate,  $m$  die Poissonsche Konstante,

$$\mu = \cos \vartheta, \quad (3)$$

$$s = \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho\mu}, \quad (4)$$

$$s_* = \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho\mu}. \quad (5)$$

Die Glieder  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  hängen nur von  $m$ , die Koeffizienten  $L_{2k}^{(3)}, M_{2k}^{(3)}, Q_{2k}^{(3)}, S_{2k}^{(3)}$  von  $k$  und  $m$  ab, vgl. [3, S. 362 - 364].

Die vorstehende Lösung zeigt zwar die erwartete Konvergenz, bereitet dafür aber für  $\rho \ll 1$  numerische Schwierigkeiten, weil in den endlichen Summen Differenzen näherungsweise gleichgroßer Zahlen auftreten. Infolge der daraus entstehenden Rundungsfehler erhält man beispielsweise für  $\rho = 1/25$  ein auf 3 Stellen genaues Ergebnis erst dann, wenn die Zahlenrechnung mit 14 Ziffern ausgeführt wird. Im Falle  $\rho = 0$  versagen die Gleichungen überhaupt.

In diesen Fällen, d. h. praktisch für  $0 \leq \rho \leq 1/4$ , ist es daher zweckmäßig, mit den nichtzerlegten Reihen zu rechnen. Nach einigen Umformungen der ursprünglichen Lurjeschen Lösung erhält man

$$u_r = \frac{F\rho}{8\pi G r_0} \left\{ \frac{2(m-2)}{m+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{\Delta} [-(2k+1)(2k-2+4/m) + \frac{2k}{2k-1} (4k^2+4k-1+2/m)\rho^{-2}] \rho^{2k} P_{2k} \right\}, \quad (6)$$

$$u_\vartheta = -\frac{F\rho \sin\vartheta}{8\pi G r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{\Delta} \left[ -2k-5+4/m + \frac{1}{2k-1} (4k^2+4k-1+2/m) \cdot \rho^{-2} \right] \rho^{2k} P'_{2k}, \quad (7)$$

wobei

$$\Delta = 2k(2k-1) + (4k+1) \frac{m+1}{m}. \quad (8)$$

Dazu kommt, daß letztere Gleichungen einfacher sind als (1), (2) und somit kürzere Rechenzeiten erfordern.

Ferner ist zu bemerken, daß auch die Verschiebung längs der Achse besonders zu behandeln ist, nämlich durch Grenzübergang der Gleichungen (1), (2) für  $\mu \rightarrow 1$ . Es folgt

$$u_r^a = \frac{F\rho}{8\pi G r_0} \left\{ \frac{2(m-2)}{m+1} + \frac{4(m-1)}{m} \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} + 1/2 \cdot \left( \frac{\alpha_1}{\rho} + \frac{\beta_1}{\rho^3} \right) \cdot \left( \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} - 2\rho \right) + 1/2 \cdot \left( \frac{\alpha_2}{\rho^2} + \frac{\beta_2}{\rho^4} \right) [(1+\rho) \ln(1+\rho) + (1-\rho) \cdot \ln(1-\rho) - \rho^2] + \sum_{k=1}^{\infty} (L_{2k}^{(3)} + M_{2k}^{(3)}) \rho^{-2} \rho^{2k} \right\}. \quad (9)$$

Bei kleinen Werten  $\rho$  ist wiederum nach Gl. (6) zu rechnen. Für die Verschiebung in der Äquatorebene schließlich berechnet sich mit  $\mu = 0$

$$u_r^a = \frac{F\rho}{8\pi G r_0} \left\{ \frac{2(m-2)}{m+1} + \frac{4(m-1)}{m} (\sqrt{2}-2) + 1/2 \cdot \left( \frac{\alpha_1}{\rho} + \frac{\beta_1}{\rho^3} \right) \cdot \left( \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2 \right) + 1/2 \cdot (\alpha_2 + \beta_2) \left( \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + 1 - 2\sqrt{2} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (L_{2k}^{(3)} + M_{2k}^{(3)}) P_{2k}(0) \right\}, \quad (10)$$

wobei das Legendresche Polynom sich vereinfacht zu

$$P_{2k}(0) = \pi \frac{k}{i=1} \frac{1-2i}{2i}. \quad (11)$$

Ansonsten werden die Polynome und deren Ableitung zweckmäßig nach den bekannten Rekursionsformeln berechnet.

## 2.2. Theoretische Lösung für die Spannungen

Nach der Lurjeschen Theorie lassen sich zwar die Spannungen prinzipiell auch berechnen [3, S. 339]; die Reihen konvergieren aber mit dem Faktor  $k$  multipliziert schlechter als die Lösung für die Verschiebungen. Die Spannungen werden deshalb nach einer Theorie von

Sternberg und Rosenthal [4] berechnet, die auf der Boussinesqschen Spannungsfunktion für axialsymmetrische Probleme beruht und ebenfalls aus einem geschlossenen sowie einem Reihenanteil besteht

$$[S] = [S_0] + [R_0]. \quad (12)$$

$[S_0]$  stellt darin die Lösung für eine auf den Halbraum  $x \leq r_0$  im Punkt  $x = r_0$  nach unten bzw. auf den Halbraum  $x \geq -r_0$  im Punkt  $x = -r_0$  nach oben gerichteten, auf der  $x$ -Achse liegenden Kraft dar.  $[R_0]$  ist eine unendliche Reihe, deren Koeffizienten so bestimmt werden, daß die Randbedingungen einer freien Kugeloberfläche erfüllt sind. Beide Lösungsanteile sind in unterschiedlichen Koordinatensystemen angegeben;  $[S_0]$  in Bipolarkoordinaten,  $[R_0]$  in Kugelkoordinaten.

Für den Sonderfall Äquatorebene  $x = 0$  lassen sich die Spannungen explizit aufschreiben. Wenn speziell  $m = 2$  gesetzt, gilt

$$\sigma_x = \frac{F}{\pi r_0^2} \left\{ -\frac{81}{228} + \frac{45}{304} \rho^2 - 1/8 \cdot \sqrt{2(1-p)} (3p^2 - 6p) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-2k-1} \cdot [P'_{2k} - (4k^2 - 2k) P_{-2k-1}] \rho^{2k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} b_{-2k-2} [(-8k^3 - 24k^2 - 22k - 6) \cdot P_{-2k-1} + (2k+3) P'_{-2k-2}] \rho^{2k} \right\}, \quad (13)$$

$$\sigma_r = \frac{F}{\pi r_0^2} \left\{ -\frac{3\rho^2 \sqrt{\rho^2+1}}{(\rho^2+1)^3} - 3/8 \cdot \ln \frac{\rho^2+2+2\sqrt{\rho^2+1}}{4} + 3/304 \cdot \rho^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [a_{-2k-1} (4k^2 - 2k) P_{-2k-1} \rho^{2k+2} - b_{-2k-2} (8k^3 - 8k - 3) P_{-2k-1} \rho^{2k}] \right\},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{F}{\pi r_0^2} \left\{ 3/16 \cdot \left[ -3 \ln \frac{\rho^2+2+2\sqrt{\rho^2+1}}{4} - 5 + 6 \frac{\rho^2+1 - \sqrt{\rho^2+1}}{\rho^2} \right] + 141/152 + 15/304 \cdot \rho^2 - \sum_{k=2}^{\infty} [a_{-2k-1} P'_{-2k} \rho^{2k-2} + b_{-2k-2} (2k+3) P'_{-2k-2} \rho^{2k}] \right\}, \quad (15)$$

$$a_{-2k-1} = \frac{-192k^5 + 480k^4 + 1092k^3 + 492k^2 - 36k - 40,5}{16k(k-1)(2k-1)(4k-1)(4k+3)(2k+1)(4k^2+4k+1,5)} \quad (16)$$

$$b_{-2k-2} = \frac{-24k^3 + 12k^2 + 16,5k - 4,5}{8k(k-1)(4k-1)(4k+3)(2k+1)(4k^2+4k+1,5)} \quad (17)$$

$$p = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}. \quad (18)$$

Die Reihen sind alternierend und konvergieren im gesamten Definitionsbereich  $0 \leq \rho \leq 1$ . Allerdings nimmt die Konvergenz mit steigendem  $\rho$  ab. Die notwendige Anzahl von Gliedern der Reihe, die bei einer geforderten Genauigkeit zu berechnen ist, kann mittels der normierten Radialspannung

$$\tilde{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{F / \pi r_0^2}, \quad (19)$$

die am Rand  $\rho = 1$  verschwinden muß, abgeschätzt werden. Es berechnet sich bis  $k = 10$ ,  $\tilde{\sigma}_r = 3 \cdot 10^{-4}$ , bis  $k = 50$ ,  $\tilde{\sigma}_r = 6 \cdot 10^{-6}$  und bis  $k = 500$ ,  $\tilde{\sigma}_r = 2 \cdot 10^{-8}$ .

### 3. Ergebnisse

Der Test des Auswertverfahrens erfolgt an den Spannungen in der Äquatorebene. Diese werden

1. theoretisch berechnet nach den Gln. (13) bis (15);
2. aus Isotheten, die nach den Gln. (1), (2) bzw. (6), (7) berechnet sind, nach dem in [1] angegebenen Verfahren ausgewertet;
3. aus experimentell ermittelten Isotheten [2] nach dem Verfahren [1] ausgewertet.

Zwecks Trennung der einzelnen Einflüsse sind die Isotheten für den ideal inkompressiblen Fall  $\nu = 1/2$  und für  $\nu = 0,49$  berechnet. Die Isothetendichte ist in allen Fällen annähernd gleich. Sie beträgt im Mittelpunkt  $a_x/r_0 \approx 0,01$  bzw.  $a_r/r_0 \approx 0,02$ . Die Spannungen werden aus den berechneten Isotheten an 25 und aus den gemessenen Isotheten an 10 Stützstellen ermittelt. Bild 1 zeigt die Verläufe der ausgewerteten Spannungskomponenten.

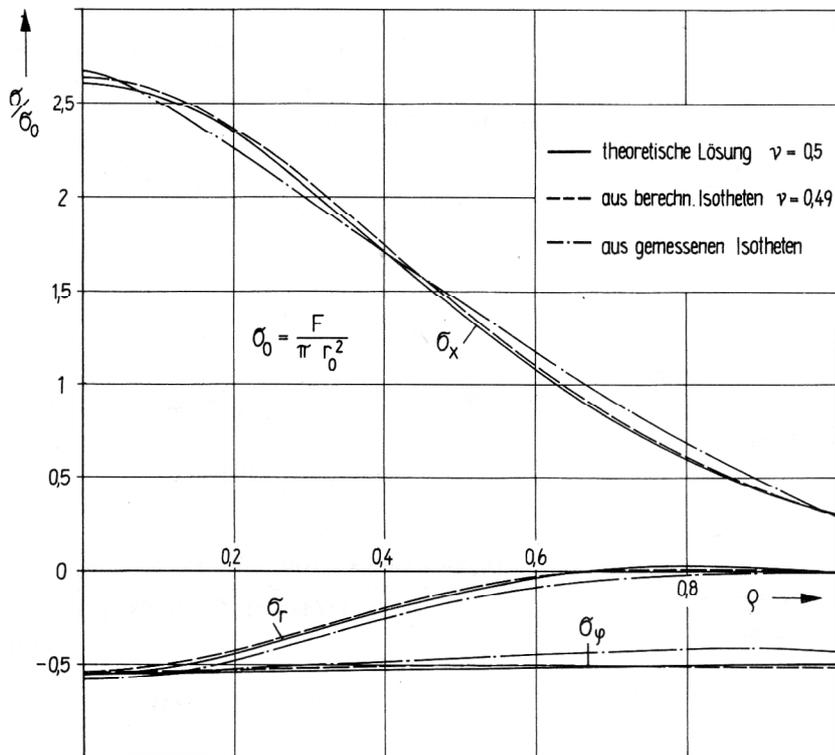


Bild 1  
Spannungen in der Äquatorebene der diametral gedrückten Kugel<sup>1)</sup>

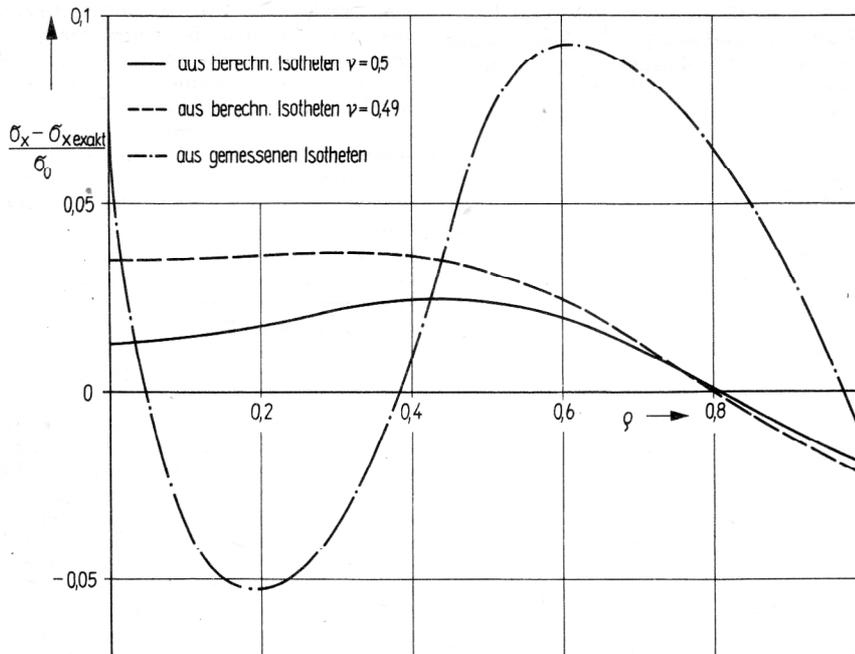
Im Bild 2 sind die absoluten Fehler der Längsspannungen dargestellt.

Wie zu erwarten, stimmen die aus den berechneten Isotheten mit  $\nu = 1/2$  ermittelten Spannungen am besten mit den exakten Werten überein. Der relative Fehler der Längsspannung  $\sigma_x$  beträgt hier im Mittelpunkt nur 0,5 %. Diese Abweichung resultiert ausschließlich aus den Ungenauigkeiten der numerischen Differentiation und Integration des Auswertverfahrens. Der durch die unterschiedlichen Poissonschen Konstanten verursachte Fehler drückt sich in der Differenz der Kurven aus, die aus den berechneten Isotheten im Falle  $\nu = 1/2$  bzw.  $\nu = 0,49$  ausgewertet sind. Ihre Abweichung bleibt in der gesamten Äquatorebene unter 1 %.

Vergleicht man andererseits die Spannungen aus den berechneten Isotheten  $\nu = 0,49$  mit den exakten Werten, so ergibt sich ein Fehler von 1,3 % bezogen auf den Mittelpunkt. Diese Abweichung resultiert sowohl aus den Unsicherheiten der Numerik des Auswertverfahrens als auch aus den unterschiedlichen Poissonschen Konstanten. Hier wird also der Fehler des Auswertverfahrens repräsentiert, wenn es auf Erstarrungsversuche angewandt wird.

Ebenfalls wie erwartet, weichen die aus den experimentellen Isotheten berechneten Spannungen am stärksten von den exakten Werten ab. Ursache sind die Unsicherheiten des Experimentes. Die zufälligen Meßfehler überlagern die systematischen Abweichungen so stark, daß ein gesetzmäßiger Zusammenhang zu den anderen Fehlerkurven nicht mehr erkennbar ist, vgl. Bild 2. Trotzdem bleibt der relative Fehler von 2,4 %, bezogen auf

1) Es wird darauf hingewiesen, daß die Spannung  $\sigma_x$  im Unterschied zu dem spannungsoptisch erhaltenen Ergebnis von Frocht und Guernsey [5] am Rand  $\rho = 1$  nicht verschwindet.



**Bild 2**  
Absolute Fehler der Längsspannungen

den Kugelmittelpunkt, für einen Erstarrungsversuch recht klein.

#### 4. Zusammenfassung

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß mit dem getesteten Auswerteverfahren die Spannungen aus den Isothetenscharen mit einer für praktische Belange sehr hohen Genauigkeit berechnet werden können. Ist der Werkstoff nicht wie vorausgesetzt inkompressibel, ergibt sich ein systematischer Fehler, der im Falle  $\nu = 0,49$  unter 1 % liegt und im Vergleich mit den Unsicherheiten der Messung vernachlässigbar ist.

#### LITERATUR

- [ 1 ] Ullmann, K.: Vollständige Auswertung eines axialsymmetrischen Spannungszustandes in einem inkompressiblen Körper aus Isotheten. *Techn. Mechanik* 5 (1984) 2.
- [ 2 ] Stockmann, M.: Die experimentelle Verschiebungs- und Spannungsanalyse der diametral gedrückten Kugel und ihr Vergleich mit der Theorie. *Techn. Mechanik* 4 (1983) 2, 65 – 69.
- [ 3 ] Lurje, A. I.: Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1963, 335 – 379.
- [ 4 ] Sternberg, E./F. Rosenthal: Elastic Sphere under Concentrated Loads. *J. Appl. Mechanics*, Dec. (1952), 413 – 421.
- [ 5 ] Frocht, M. M./R. Guernsey: A special investigation to develop a general method for three-dimensional photoelastic stress analysis. National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note 2822, Washington 1952.

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. M. Stockmann  
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt  
Sektion Maschinen-Bauelemente  
9001 Karl-Marx-Stadt, Straße der Nationen 62  
Dr.-Ing. K. Ullmann  
VEB Schwermaschinenbau „Karl Liebknecht“  
3011 Magdeburg, Alt-Salbke 6 – 10