

# Erfahrungen bei der Anwendung der Energiemethode zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren mit der FEM

H. Theilig

## 1. Einleitung

Bei der Lösung von ebenen und dreidimensionalen Rißproblemen mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) werden gegenwärtig bevorzugt singuläre Elemente im Rißfrontbereich eingesetzt [1] bis [3]. Derartige Spezialelemente findet man in der Regel nicht in den Elementbibliotheken der gegenwärtig in der Praxis verfügbaren FEM-Programme. Durch Manipulationen an isoparametrischen Standardelementen mit quadratischen Polynomansatz (Eck- und Seitenmittenknoten) lassen sich Singularitätseigenschaften erzeugen und eine Genauigkeitssteigerung erreichen [4]. Die Energiemethoden [5], [6] gestatten bei ausschließlicher Verwendung von Standardelementen auch bei Verzicht auf extreme Netzverfeinerungen in der Rißfrontumgebung gute Lösungen praxisrelevanter Problemstellungen. Analytische Grundlage ist die Berechnung von Energiedifferenzen bei einer virtuellen Rißflächenänderung mit der anschließenden Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren aus der entsprechenden Energiedefinition. Für die vollständige Beschreibung des funktionalen Zusammenhanges von Spannungsintensitätsfaktor und den charakteristischen Größen des jeweiligen Rißproblems ist der numerische Aufwand bei Anwendung spezieller Methoden zur Berechnung der Energiedifferenzen im Vergleich zur Verwendung singulärer Elemente nur unwesentlich größer. Bei praktischen Berechnungen mit der FEM ist die Verwendung von problemlos generierbaren Elementaufteilungen mit möglichst wenigen Freiheitsgraden bei einer gewissen Unabhängigkeit der Lösung von subjektiven Einflüssen wünschenswert. Mit den Energiemethoden kann dies auf der Grundlage des Konvergenzverhaltens der FEM bei Rißproblemen erreicht werden.

## 2. Analytische Grundlagen

Die Änderung der potentiellen Energie bei einer hinreichend kleinen virtuellen Rißfrontverrückung  $\Delta l(s)$  ist entsprechend Bild 1 mit

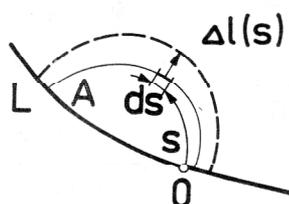


Bild 1  
Virtuelle Rißfrontverrückung

$$-\Delta P = \int_0^L G(s) \Delta l(s) ds \quad (1)$$

gegeben. Darin ist  $G(s)$  die lokale Rißerweiterungskraft, die mit dem Spannungsintensitätsfaktor  $K_I(s)$  bei im Rißfrontbereich symmetrischer Beanspruchung über

$$K_I(s) = \sqrt{E^*(s) G(s)} \quad (2)$$

verknüpft ist. Mit  $E^*(s)$  soll dabei die Abhängigkeit der lokalen Dehnungsbehinderung entlang der Rißfront erfaßt werden. Die virtuelle Rißfrontverrückung kann mit einer Änderungsfunktion  $\alpha(s)$  über

$$\Delta l(s) = \Delta l_0 \alpha(s) \quad (3)$$

beschrieben werden.

Bei vorgegebenen Kräften kann die Änderung der potentiellen Energie durch die Differenz der Formänderungsenergie ausgedrückt werden,

$$-\Delta P = \Delta W. \quad (4)$$

Für ein allgemeines Rißproblem läßt sich immer ein äquivalenter Ersatz mit vorgegebenen Kräften auf der Rißoberfläche finden. Liegen für eine Anzahl linear unabhängiger Änderungsfunktionen  $\alpha_i(s)$  die entsprechenden Energiedifferenzen vor, so lassen sich freie Koeffizienten einer Ansatzfunktion für  $G(s)$  bestimmen. Für ebene und quasiebene Rißprobleme gilt modellbedingt  $\Delta l(s) = \Delta a$ , wodurch sich der bekannte Zusammenhang

$$\frac{dW}{da} = \frac{K_I^2(a)}{E^*} L(a) \quad \text{finden läßt, Bild 2.} \quad (5)$$

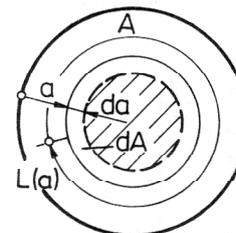
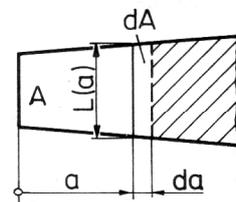


Bild 2  
Rißflächenänderung bei ebenen und rotationssymmetrischen Problemen

Die Berechnung der Energieänderungen im Zusammenhang mit den virtuellen Rißfrontverrückungen erfolgt zweckmäßig mit der FEM, wobei keine extremen Netzverfeinerungen bei der Verwendung von Standardelementen notwendig sind, da die Formänderungsenergie für ein gegebenes FEM-Modell gegenüber Spannungen und Verschiebungen genauer anfällt.

In [7] wird hierzu ein Verfahren angegeben, das die Energieänderungen ohne wesentlichen Mehraufwand aus den Steifigkeitsänderungen der von der Rißfrontverrückung betroffenen Elemente ermitteln läßt.

Das Konvergenzverhalten der FEM für die Formänderungsenergie bei Rißproblemen kann nach [8] mit

$$W(u - u_c) \leq Ch \quad (6)$$

beschrieben werden. In [9] wird gezeigt, daß mit der Erfassung des bei einem konkreten Problem vorhandenen Konvergenzverhaltens durch Mehrfachrechnung eine genaue Berechnung der Formänderungsenergie bei Beschränkung der Freiheitsgrade der FEM-Modelle möglich ist. Bedingung dabei ist die Verwendung geometrisch ähnlicher Vernetzungen.

Beschränkt man sich auf eine Zweifachrechnung mit den charakteristischen Maschenweiten  $h_1$  und  $h_2$  erhält man die Lösung für die Formänderungsenergie aus

$$W_v(A) = \frac{z W_2(A) - W_1(A)}{z - 1}, \quad z = \frac{h_1}{h_2} \quad (7)$$

Die benötigten Energiedifferenzen analog mit

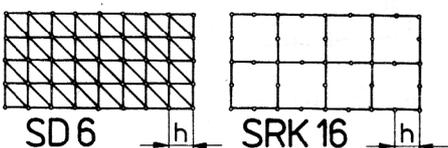
$$\Delta W_{vi} = \frac{z \Delta W_{2i} - \Delta W_{1i}}{z - 1} \quad (8)$$

### 3. Einige Anwendungen

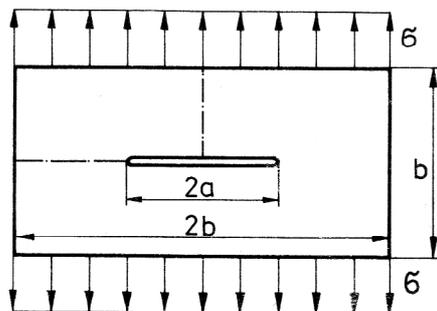
Zur Einschätzung der Energiemethode und des zur Verbesserung der Ergebnisse benötigten Konvergenzverhaltens wurden ebene und dreidimensionale Rißprobleme untersucht. Dabei wurde zunächst auf die Anwendung

Bild 3

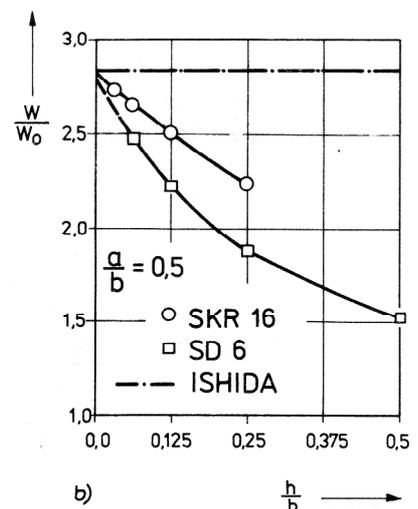
Konvergenz der Formänderungsenergie einer zentral gerissenen Rechteckscheibe



Netz	Elementanzahl		$\frac{h}{b}$
	SD 6	SRK 16	
1	4 (1x2)	***	0,5
2	16 (2x4)	2 (1x2)	0,25
3	64 (4x8)	8 (2x4)	0,125
4	256 (8x16)	32 (4x8)	0,0625
5	***	128 (8x16)	0,03125



a)



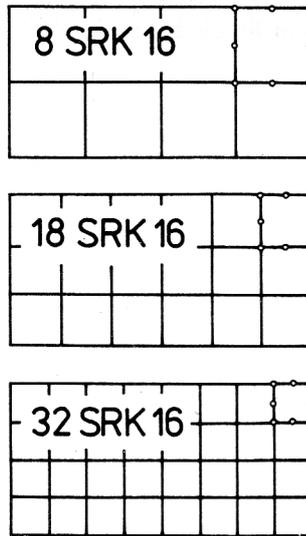
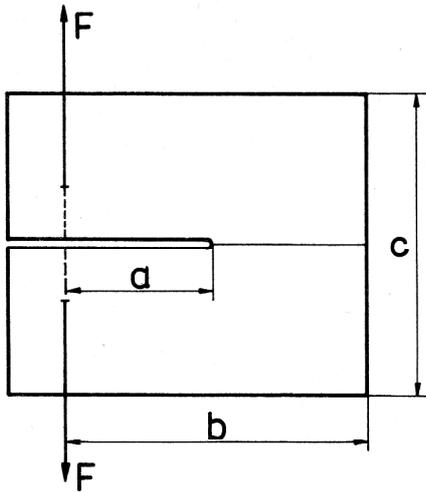
b)

Tabelle 1  
Normierte Spannungsintensitätsfaktoren einer zentral gerissenen Rechteckscheibe

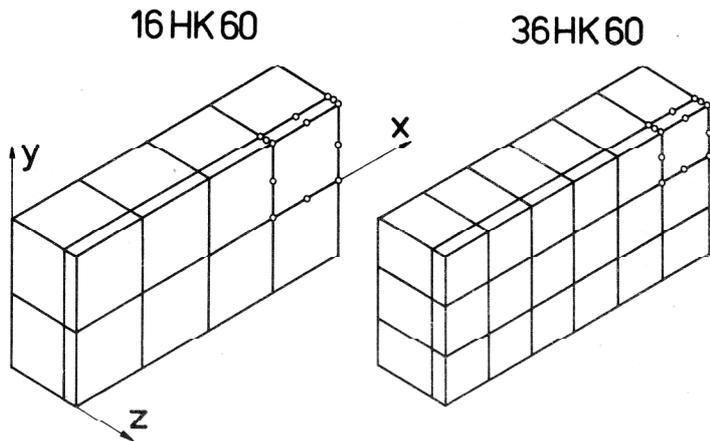
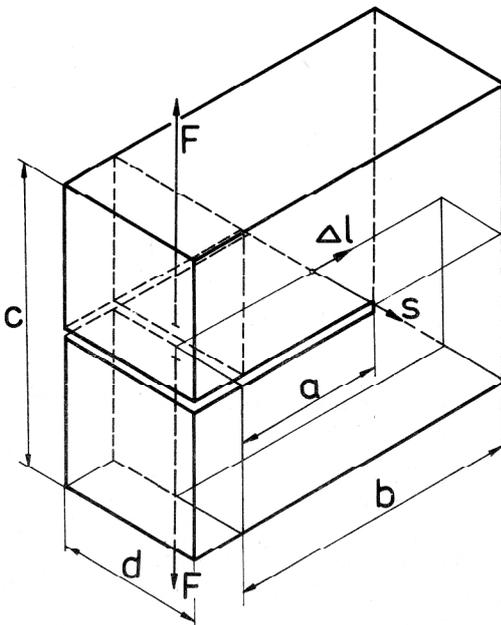
Rißgröße $\frac{a}{b}$	Normierter Spannungsintensitätsfaktor		
	SD 6	SRK 16	ISHIDA
0,1875	1,15	1,17	1,16
0,3125	1,40	1,42	1,41
0,4375	1,73	1,76	1,75

von aufwandsenkenden FEM-Methoden für die Berechnung der Energieänderungen verzichtet, um daraus resultierende Einflüsse zu eliminieren. Als FEM-Software standen die Programme AEGD6 [10], ERDKS [11] und COSARA [12] zur Verfügung. Bild 3 zeigt zunächst eine Konvergenzstudie für eine Rechteckscheibe mit zentralem Innenriß. Verwendet wurden die tabellarisch zusammengestellten Vernetzungen mit Dreieckselementen SD 6 und isoparametrischen Elementen SRK 16. Die Ergebnisse zeigen, daß sich das in [8] beschriebene Konvergenzverhalten einstellt. Die berechneten normierten Spannungsintensitätsfaktoren  $X_I$ , die in Tabelle 1 zusammengestellt sind, zeigen gute Übereinstimmung mit einer entsprechenden Lösung von Ishida [13]. In [9] sind weitere Ergebnisse zu ebenen Rißproblemen zu finden, die eine gute Eignung des Verfahrens bestätigen. Dabei ist bemerkenswert, daß die über das ermittelte Konvergenzverhalten berechneten Spannungsintensitätsfaktoren eine weitgehende Unabhängigkeit von der Art der gewählten, geometrisch ähnlichen Vernetzungen und den eingesetzten Elementen zeigen.

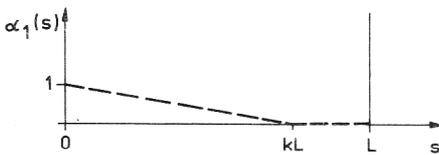
Von besonderem Interesse ist die Anwendung des Verfahrens auf dreidimensionale Rißprobleme. In [14] wird hierzu eine CT-Probe ( $c = b$ ,  $a = 0,5b$ ,  $d = 0,5b$ ) untersucht. Neben einer zweidimensionalen Analyse (Bild 4 und Tabelle 2) ist mit den in Bild 5 gezeigten regelmäßigen Vernetzungen eines Viertels der Körpergeometrie eine dreidimensionale Lösung gefunden worden. Als Änderungsfunktionen  $\alpha_i(s)$  wurden die in Bild 6 dargestellten gewählt. Die maximale Rißfrontverrückung wurde



**Bild 4**  
CT-Probe (eben)

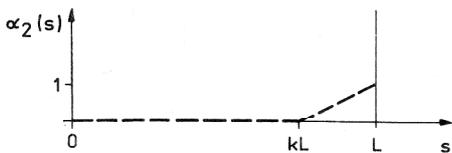


**Bild 5**  
CT-Probe (dreidimensional)



$$[0, kL] \quad \alpha_1(s) = 1 - \frac{1}{kL} s$$

$$[kL, L] \quad \alpha_1(s) = 0$$



$$[0, kL] \quad \alpha_2(s) = 0$$

$$[kL, L] \quad \alpha_2(s) = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{1}{kL} s\right)$$

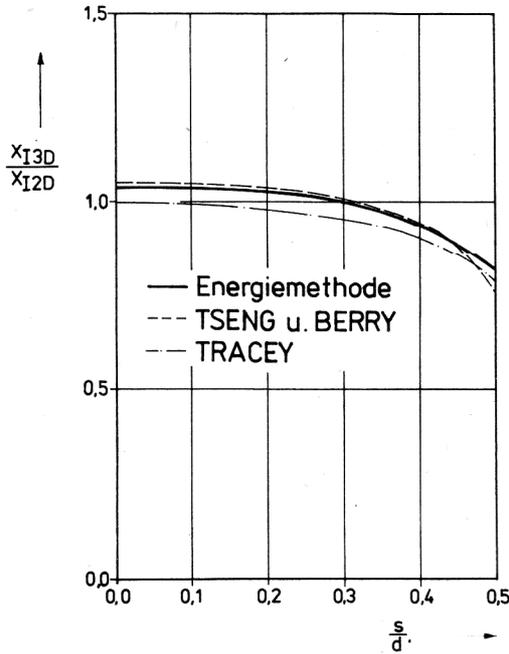
**Bild 6**  
Änderungsfunktionen für die Rißfrontverrückung bei der CT-Probe

**Tabelle 2**  
Normierte Spannungintensitätsfaktoren für die CT-Probe als ebenes Problem

Normierter Spannungintensitätsfaktor $X_{I2D} = \frac{K_{I2D} b d}{F \sqrt{\pi a}}$				BRÖWN u. SRAWLEY
Netzverknüpfung				
	8SRK16	18SRK16	32SRK16	
8SRK16	7,616	8,170	8,171	
18SRK16		7,805	8,171	8,13
32SRK16			7,899	

mit  $\Delta I_0/a = 0.025$  festgelegt. Ansatzfunktion für die lokale Energieverlustrate ist

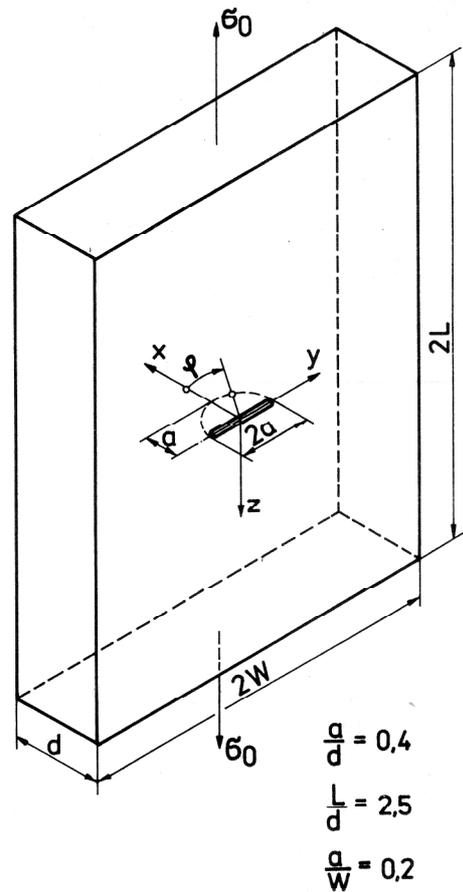
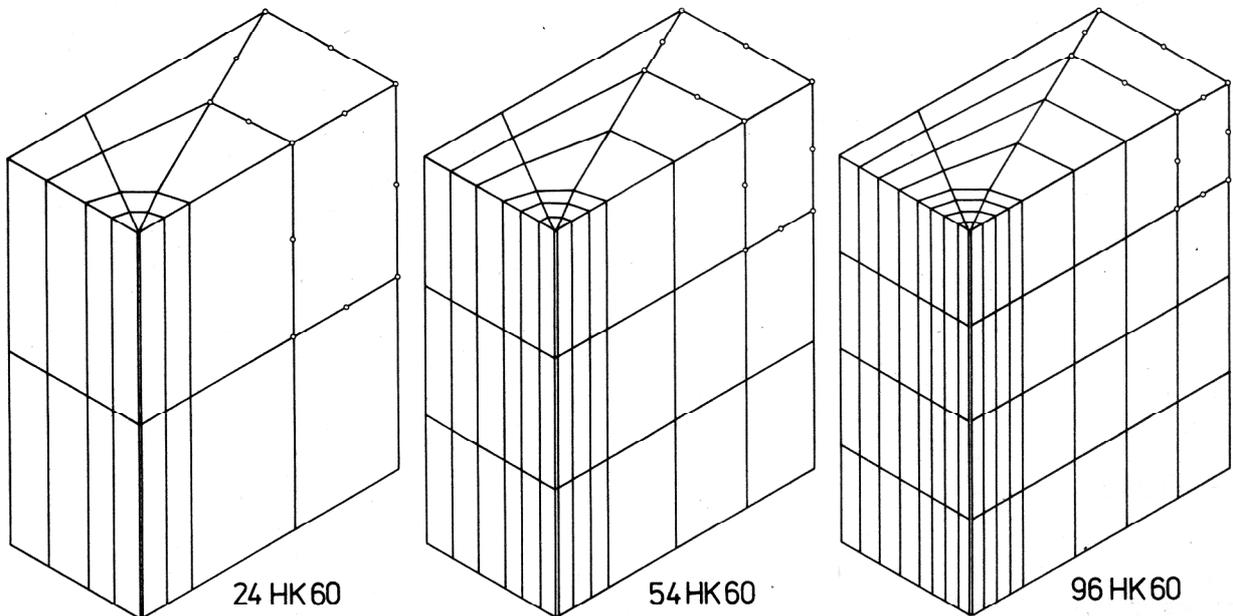
$$G(s) = C_0 + C_4 s^4 \cdot$$



**Bild 7**  
Verlauf des normierten Spannungsintensitätsfaktors entlang der geraden Rißfront der CT-Probe

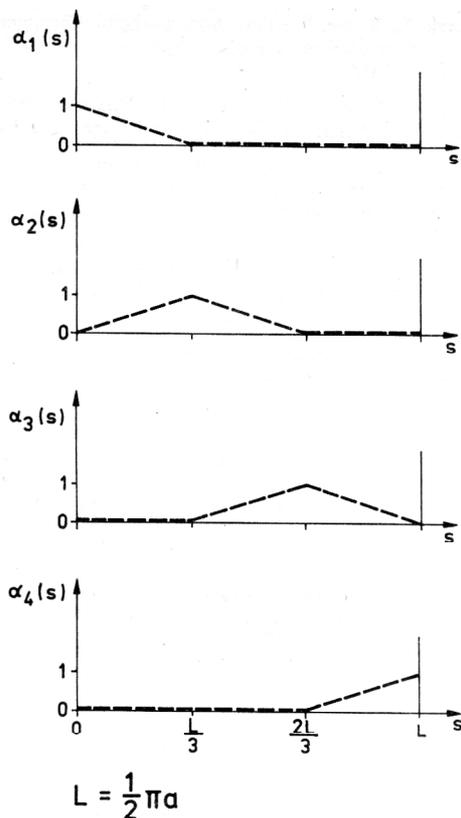
Bild 7 zeigt die Ergebnisse gegenüber Lösungen von Tracey [1] bzw. Tseng und Berry [2], die mit singulären Elementen erreicht wurden. Tabelle 3 enthält die numerischen Ergebnisse mit  $X_{I2D} = 8.13$  [15] normiert. Bild 9 zeigt die für die Analyse des in Bild 8 gezeigten

**Bild 9**  
Elementnetze für die Platte mit halbkreisförmigen Oberflächenriß

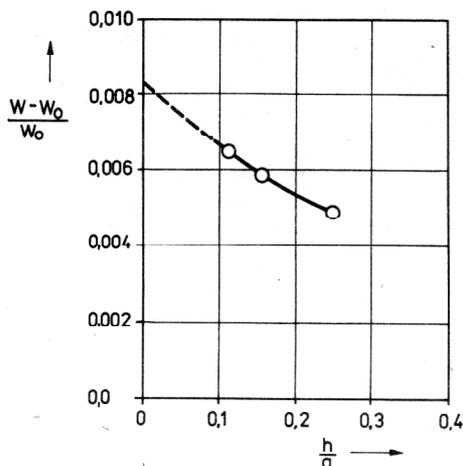


**Bild 8**  
Platte mit halbkreisförmigen Riß

Riproblems (halbkreisförmiger Oberflächenriß) verwendeten geometrisch ähnlichen Vernetzungen mit dem Element HK 60. Die Darstellung der hier verwendeten Änderungsfunktionen findet man in Bild 10. Die Elementkanten wurden dabei konsequent geradlinig belassen. Bild 11 zeigt das ermittelte Konvergenzverhalten der Formänderungsenergie bei unverrückter Rißfront. ber eine stückweise linear verlaufende Ansatzfunktion  $G(s)$ , mit der sich die notwendige Integration für die gewhl-

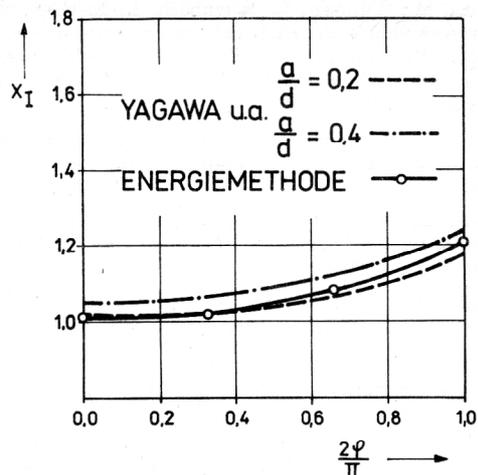


**Bild 10**  
Rißfrontverrückung für den halbkreisförmigen Oberflächenriß



**Bild 11**  
Konvergenzverhalten der Formänderungsenergie bei unverrückter Rißfront für die Platte mit Riß

ten Änderungsfunktionen leicht durchführen läßt, konnten die in Bild 12 dargestellten Spannungsintensitäten berechnet werden. Verknüpft wurden hierzu die Netze 54HK60 und 96HK60. Zum Vergleich sind Ergebnisse von Yagawa u. a. [16] für  $a/d = 0,2$  und  $a/d = 0,4$  angeführt. Normiert wurde mit dem Spannungsintensitätsfaktor für den kreisförmigen Innenriß.



**Bild 12**  
Normierter Spannungsintensitätsfaktor für den halbkreisförmigen Oberflächenriß

**Tabelle 3**  
Normierte Spannungsintensitätsfaktoren für die CT-Probe als dreidimensionales Problem

$\frac{s}{d}$	Normierter Spannungsintensitätsfaktor $X_{I3D} = \frac{K_{I3D} b d}{F \sqrt{\pi a}}$					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$X_{I3D}$	8,48	8,46	8,38	8,13	7,68	6,70
$\frac{X_{I3D}}{X_{I2D}}$	1,04	1,04	1,03	1,00	0,94	0,82

#### 4. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit zeigt auf, daß bei ausschließlicher Verwendung von Standardelementen über Mehrfachrechnung mit geometrisch ähnlichen Elementnetzen auf der Grundlage der Energiemethode gute Lösungen für Spannungsintensitätsfaktoren bei ebenen und auch dreidimensionalen Rißproblemen erbracht werden können. Das Verfahren verlangt zwingend die geometrische Ähnlichkeit der verwendeten Elementnetze unterschiedlicher Maschenweite. Die vorgestellten Ergebnisse zeigen gegenüber bekannten Lösungen, daß die erreichbare Genauigkeit bei Verhältnissen von charakteristischer Maschenweite zu Rißgröße  $h/a \leq 0,25$  bei  $\pm 1,5\%$  liegt. Hervorgehoben werden muß die relativ einfache Generierung der dabei erforderlichen FEM-Modelle und die geringe Anfälligkeit des Verfahrens bezüglich der gewählten Vernetzungsstrategie.

#### LITERATUR

- [1] Tracey, D. M.: Finite elements for three-dimensional elastic crack analysis. Nuclear Engineering and Design 26 (1974) 282 – 290.
- [2] Tseng, A. A.; Berry, I. T.: The calculation of stress intensity factors using special three-dimensional elements. Nuclear Engineering and Design 54 (1979) 91 – 95.

- [ 3 ] Kuna, M.; Wiltinger, L.; Altenbach, J.: Erfahrungen bei der Anwendung der FEM auf dreidimensionale elastostatische Rißprobleme. VI. Symposium Verformung und Bruch, TH Otto v. Guericke Magdeburg, September 1982, Tagungsband Teil I, 146 – 152.
- [ 4 ] Henshell, R. D.; Shaw, K. G.: Crack tip finite elements are unnecessary. Int. J. Numer. Meth. Eng. 9 (1975) 495 – 507.
- [ 5 ] Watwood, V. B.: The finite element method for prediction of crack behavior. Nuclear Engineering and Design 11 (1969) 323 – 332.
- [ 6 ] Hellen, T. K.: On the method of virtual crack extensions. Int. J. Numer. Meth. Eng. 9 (1975) 189 – 207.
- [ 7 ] Parks, D. M.: A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. Int. J. of Fracture 10 (1974) 487 – 502.
- [ 8 ] Tong, P.; Pian, T. H. H.: On the convergence of finite element method for problems with singularity. Int. Journ. Solids Structures 9 (1973) 313 – 321.
- [ 9 ] Theilig, H.: Verbesserte Berechnung von Spannungsin­ten­si­täts­fak­toren mit finiten Elementen nach der Energie­methode. Maschinenbautechnik 30 (1981) 79 – 83.
- [10] Gabbert, U.: Programm AEGD6 zur Berechnung von ebenen und rotationssymmetrischen Problemen auf der Grundlage finiter Elemente-Programmdokumentation. TH Magdeburg 1974.
- [11] Koczyk, S.; Weese, W.: Berechnung scheibenförmiger Bauteile. Dokumentation für das Programm ERDKS. TH Magdeburg 1977.
- [12] Weese, W.; Koczyk, S.; Raecke, I.: Dokumentation für das 3D-FEM-Programm COSARA. TH Magdeburg 1980.
- [13] Ishida, M.: Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions. Int. Journ. of Fracture Mech. 7 (1971) 301 – 316.
- [14] Theilig, H.: Dreidimensionale Analyse einer Kompaktzugprobe mit finiten Elementen nach einer verbesserten Energiemethode. Kernenergie 25 (1982) 173 – 176.
- [15] Brown, W. F.; Srawley, J. E.: Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials. ASTM-STP 410, 1966.
- [16] Yagawa, G.; Ichimiya, M.; Ando, Y.: Two- and three-dimensional analysis of stress intensity factors based on discretization error in finite elements. Proc. 1st Internat. Conf. Numer. Meth. Fract. Mech. (1978) 249 – 267.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. H. Theilig  
VEB Kraftwerke „Völkerfreundschaft“  
8905 Hagenwerder