TECHNISCHE MECHANIK 5 (1984) Heft 4
Manuskripteingang: 1. 3. 1984

Dynamik von Mehrkörpersystemen

Udo Fischer, Ljubomir Lilov

0. Einleitung

Komplizierte mechanische Strukturen, die aus mehreren miteinander gekoppelten starren oder deformierbaren Körpern bestehen, erlangen in der Technik steigende Bedeutung, so z. B. bei den Industrierobotern. Die Einbeziehung des Verhaltens gesteuerter und geregelter Antriebe in die Berechnung mechanischer Systeme spielt u. a. mit dem Vordringen der Mikroelektronik eine wachsende Rolle. Man unterscheidet hinsichtlich der Modellierung der Körper Starrkörpersysteme und Systeme von deformierbaren Körpern (hybride Mehrkörpersysteme). Die Bindungen zwischen den Körpern können flexibel (d. h. ohne Einschränkung der Freiheitsgrade) oder starr sein. Letztere werden in autonome und heteronome eingeteilt. Zu den heteronomen Bindungen gehören die Antriebe mit vorgegebenen Bewegungsgesetz. Erscheinungsformen der Mehrkörpersysteme sind damit die „starre Maschine", ebene und räumliche Mechanismen. Industrieroboter sind sog. „aktive Mechanismen", gekennzeichnet durch Antriebe, die die gegenseitige Lage benachbarter Körper bestimmen. Mehrkörpersysteme im weiteren Sinne sind auch Systeme mit z. T. flexiblen Bindungen und im allgemeinen kleinen Verschiebungen (sog. Schwingungssysteme). Die Aufstellung der Bewegungsgln. ist für Mehrkörpersysteme mit räumlichen Bewegungen relativ kompliziert, so daß der Auswahl geeigneter Prinzipien und der rechnergestützten Aufstellung der Bewegungsgln. hohe Bedeutung zukommt.

Die Auswahl eines geeigneten Algorithmus zur Aufstellung der Bewegungsgln. ist wesentlich von der zu lösenden Aufgabenart bestimmt. Prinzipiell unterscheidet man die „direkte Aufgabe", bei der die Bewegungsform vorgegeben wird und die dabei auftretenden Kräfte und Momente (einschließlich der die Bewegungsform bedingenden Antriebsgrößen) gesucht sind, von der „indirekten Aufgabe" mit der umgekehrten Fragestellung. Zur ersten Gruppe gehört die Kinetostatik. Es gibt sehr viele Problemstellungen, bei denen beide Aufgabengruppen unlösbar miteinander verbunden sind.

1. Zur Kinematik der Mehrkörpersysteme

Ausgangspunkt für die Beschreibung der Lage jedes Masseelementes des Gesamtsystems ist der Ortsvektor r gegenüber einem Inertialsystem, vgl. z. B. [1]. Durch Einführung von Koordinatenfunktionen wird das System diskretisiert.
Damit gilt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{c}, q_o, q_1 \ldots q_n),\ q_o = t,\ n \in N \qquad (1)$$

c identifiziert das Massenelement. Für Starrkörpersysteme können als verallgemeinerte Koordinaten q_i prinzipiell die (z. B. kartesischen) Koordinaten eines Körperpunktes (nicht notwendig des Massenmittelpunktes) und die Eulerschen Winkel dienen. Relativkoordinaten sind bei kinematischen Ketten besser geeignet, die Abhängigkeit der Lage durch Parameter des Antriebs bzw. der Antriebe (z. B. bei Industrierobotern) auszudrücken. Daneben werden oft Quasigeschwindigkeiten ω_i eingeführt, diese können beim starren Körper die auf ein körperfestes Koordinatensystem bezogenen Winkelgeschwindigkeiten sein. Allgemein sind Quasigeschwindigkeiten definiert durch

$$\omega_i = a_{ij}\,\dot{q}_j \quad \text{mit} \quad a_{ij,k} - a_{ik,j} \neq 0 \qquad (2)$$

Zur Beschreibung der Lage, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen kinematischer Ketten starrer Körper in Abhängigkeit von den verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten bzw. Quasigeschwindigkeiten sind unterschiedliche Kalküle entwickelt worden [2], [3]. Bezüglich der Struktur unterscheidet man offene unverzweigte und verzweigte (Baumstruktur) oder geschlossene Strukturen. Bei komplizierten räumlichen, besonders bei geschlossenen, Ketten ist es nicht möglich oder nicht zweckmäßig, die Zahl der verallgemeinerten Koordinaten auf den Freiheitsgrad zu reduzieren, so daß Bedingungsgleichungen gebraucht werden, um die Bindungen zwischen den Koordinaten auszudrücken.
Auch der Charakter der Bindungen ist für die Wahl der Methode zur Aufstellung der Bewegungsgln. von Bedeutung. Insbesondere sind zu unterscheiden: die **holonomen** Bindungen,

$$f_i(q_o, q_1, q_2, \ldots q_n) = 0 \qquad (3)$$

bzw.

$$a_{ij}\,\dot{q}_j = 0;\ a_{ij,k} = a_{ik,j} \ \text{für alle j, k} \qquad (4)$$

und die **nichtholonomen** Bindungen, die die Form Gl. (3) nicht zulassen:

$$a_{ij}\,\dot{q}_j = 0\ ;\ a_{ij,k} \neq a_{ik,j} \ \text{für mindestens ein j, k} \qquad (5)$$

2. Bewegungsgleichungen

2.1. Starrkörpersysteme

Grundlage für die Aufstellung der Bewegungsgln. ist in der Regel das d'Alembertsche Prinzip

$$\int (d\mathbf{F} - dm\,\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0 \qquad (6)$$

Darin sind
- dF die auf das Massenelement wirkende eingeprägte Kraft
- dm die Masse des Massenelements
- δr die (mit Bindungen vereinbare) virtuelle Verschiebung des Massenelementes

Wendet man das d'Alembertsche Prinzip auf ein Starrkörpersystem an, so kann man die Geschwindigkeit des einzelnen Massenelementes $\dot{r}$ durch die Geschwindigkeit $\dot{r}_o$ eines Bezugspunktes 0 des Körpers, dem dieses Element angehört und die einer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ um 0 ausdrücken (Bild 1):

$$\dot{r} = \dot{r}_o + \underline{\omega} \times \underline{\rho} \qquad (7)$$

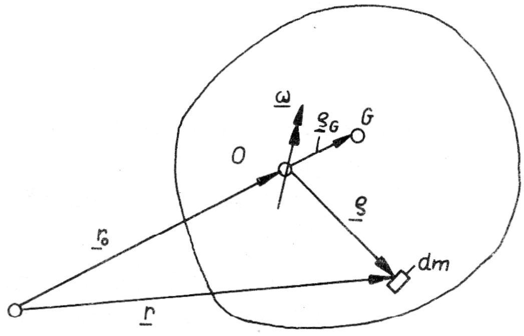

Bild 1

Der wirklichen Geschwindigkeit entspricht die virtuelle Lageänderung

$$\delta r = \delta r_o + \delta \underline{\pi} \times \underline{\rho} \qquad (8)$$

wobei $\delta\underline{\pi}$ der Vektor einer virtuellen Winkeldrehung ist. Mit Gl. (6) folgt nach einiger Umrechnung [4], [5]

$$\Sigma \Big\{ [F - m(\ddot{r}_o + \ddot{\underline{\rho}}_G)] \cdot \delta r_o$$
$$+ (M_o - m\underline{\rho}_G \times \ddot{r}_o - J_o \cdot \underline{\dot{\omega}} - \underline{\omega} \times J_o \cdot \underline{\omega}) \cdot \delta \underline{\pi} \Big\} = 0 \qquad (9)$$

Hierin sind

$\underline{\rho}_G$ der Ortsvektor des Massenmittelpunktes

M_o das auf 0 bezogene Moment der eingeprägten Kräfte

J_o der auf 0 bezogene Massenträgheitstensor

Beim Mehrkörpersystem ist über alle Körper zu summieren, der Summationsindex wurde der Einfachheit halber weggelassen. Befreit man die starren Körper von äußeren Bindungen, so sind zu den eingeprägten Größen F und M die Zwangskräfte und Momente hinzuzunehmen. Ergebnis sind die Newton-Eulerschen Gleichungen. Bei Mehrkörpersystemen können die Variationen δr_o und $\delta \underline{\pi}$ in Gl. (9) in Abhängigkeit von den virtuellen Änderungen der verallgemeinerten Koordinaten q_j der relativen Lage der Körper ausgedrückt werden. Das führt schließlich auf Gln. der Form

$$\delta \mathbf{q}^T \cdot [A(t,q,\underline{\dot{q}}) \cdot \underline{\ddot{q}} - b(t,q,\underline{\dot{q}})] = 0 \qquad (10)$$

Hierin wurden zur Vereinfachung der Schreibweise die Koordinaten q_i, $i \in N$, in einem Spaltenvektor **q** zusammengefaßt.

Bei Baumstrukturen (offenen kinematischen Ketten) wählt man die q_i so, daß die δq_i unabhängig voneinander sind, die Terme in der eckigen Klammer verschwinden einzeln. Bei geschlossenen Ketten können die überzähligen Koordinaten praktisch nicht (wenn nichtholonome Bindungen vorliegen, prinzipiell nicht) eliminiert werden. Mit Hinzunahme der Bindungsgln. $\delta \mathbf{q}^T \cdot K(\mathbf{q}) = 0$ entsteht bei Benutzung Lagrangescher Multiplikatoren das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} A & K \\ K^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q \\ \underline{\lambda} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b \\ K^T \ \dot{q} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Programmsysteme für ebene Bewegungen sind in [6] beschrieben, für räumliche Systeme siehe z. B. [7], [8]. Eine ausführliche Übersicht bietet [9].

Das Jourdainsche Prinzip unterscheidet sich vom d'Alembertschen durch eine andere Variation (vgl. z. B. [1]). Anstelle virtueller Verrückungen δr werden virtuelle Geschwindigkeitsänderungen $\delta' \underline{\dot{r}}$ benutzt. Gl. (9) ändert sich dahingehend, daß anstelle von δr_o und $\delta \pi$ die Variationen $\delta' \underline{\dot{r}}_o$ und $\delta' \omega$ zu setzen sind. Das erlaubt, sogenannte anholonome Geschwindigkeitskoordinaten ω_j (Quasigeschwindigkeiten) einzuführen, die mit verallgemeinerten Geschwindigkeiten wie folgt verbunden sind:

$$\omega_j = H_{jk}(t, q_1, q_2, \dots q_n) \cdot \dot{q}_k \qquad (12)$$

Die Bewegungsgln. nehmen damit folgende Form an (vgl. [13]), wenn man von zusätzlichen Bindungen zwischen den Koordinaten absieht:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}^*(t, q, \underline{\omega}) \cdot \underline{\dot{\omega}} = \mathbf{b}^*(q, \underline{\omega}) \\ &\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \cdot \underline{\omega} \\ &\text{mit} \\ &\underline{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n]^T \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Die Gln. (13) stellen ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung dar, das schrittweise integriert werden kann. Vorteile ergeben sich infolge der Freiheit, die Matrix H geeignet zu wählen, durch die Möglichkeit, der Matrix $A^*(t, q, \underline{\omega})$ eine Diagonalgestalt zu geben, wie das Maißer [11] für einige wichtige Anwendungsfälle gezeigt hat. Weiterhin kann man die Möglichkeit nutzen, Zwangsbedingungen zwischen den Geschwindigkeiten

$$a_{ij} \ \dot{q}_j = 0$$

dadurch berücksichtigen, daß die ihnen entsprechenden Quasigeschwindigkeiten $\omega_i = a_{ij} \dot{q}_j$ identisch Null gesetzt werden. Neben dem d'Alembertschen und Jourdainschen Prinzip bietet das Gaußsche Prinzip eine weitere Möglichkeit, Bewegungsgleichungen aufzustellen. Anstelle virtueller Verrückungen oder Geschwindigkeiten werden virtuelle Beschleunigungsänderungen $\delta'' \ddot{r}$ benutzt. Bei Anwendung auf ein Starrkörpersystem kann man das Gaußsche Prinzip wie folgt formulieren [10] (Bild 2).

$$f(\mathbf{x}) \equiv \sum_i [(m_i \ddot{\mathbf{R}}_i - 2\mathbf{F}_i) \cdot \ddot{\mathbf{R}}_i + (\mathbf{I}_i \underline{\dot{\omega}}_i + 2\underline{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \underline{\omega}_i - 2\mathbf{M}_i) \cdot \underline{\dot{\omega}}_i$$

$$= \operatorname{Min}(\ddot{\mathbf{R}}_i, \underline{\dot{\omega}}_i) \qquad (14)$$

Dabei sind $\mathbf{R}_i$ die Ortsvektoren der Körperschwerpunkte, und auch die Trägheitstensoren sind auf ein körperfestes Achsensystem durch den Körperschwerpunkt bezogen.

Der Spaltvektor **x** faßt die Komponenten der $\ddot{\mathbf{R}}_i$ und $\underline{\dot{\omega}}_i$ zusammen. Das Extremalproblem Gl. (14) wird durch

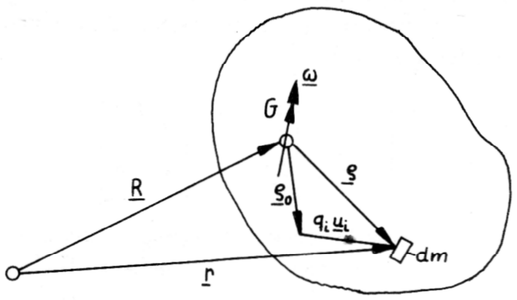

Bild 2

Nebenbedingungen ergänzt, die von den Bindungen des Starrkörpersystems herrühren. Der Vorteil des Gaußschen Prinzips besteht insbesondere darin, daß sich diese Nebenbedingungen als lineare Beziehungen zwischen den Komponenten der $\ddot{\underline{R}}_i$ und $\dot{\underline{\omega}}_i$ aufschreiben lassen:

$$\mathbf{A\,x} = \mathbf{b} \tag{15}$$

Die Matrix A ist von den verallgemeinerten Koordinaten abhängig und im allg. nicht quadratisch.
Mit Hilfe der Pseudoinversen A^+ von A, die den Bedingungen

$$A^+ A A^+ = A^+ ,\; A A^+ A = A$$
$$(A^+ A)^T = A^+ A,\; (A A^+)^T = A A^+$$

genügt, läßt sich Gl. (14) frei von Nebenbedingungen darstellen:

$$f(\mathbf{x}) = f(A^+ \mathbf{b} + (E - A^+ A)\,\mathbf{y}) = \mathrm{Min}(\mathbf{y}) \tag{16}$$

Hiermit sind allerdings gewisse Nachteile verbunden. Diese bestehen darin, daß die Zahl der Unbekannten von **y** nicht geringer ist als die von **x** und darüber hinaus die Berechnung der Pseudoinversen ebenfalls Rechenaufwand erfordert.

2.2. Lagrangesche Gleichungen

Die aus dem d'Alembertschen Prinzip, Gl. (6) abgeleiteten Lagrangeschen Beziehungen

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right] \cdot \delta q_i = 0\,, \tag{17}$$

bzw.

$$[q_{ij}\,\ddot q_j + (g_{ij,k} - \frac{1}{2} g_{jk,i})\,\dot q_j\,\dot q_k - Q_i] \cdot \delta q_i = 0 \tag{18}$$

mit der kinetischen Energie

$$T = \frac{1}{2} g_{ij}\,\dot q_i\,\dot q_j$$

und den generalisierten eingeprägten Kräften Q_i sind Ausgangspunkt verschiedener Formen der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen. Am bekanntesten sind die Lagrangeschen Gln. 2. Art, die beim Vorliegen von Zwangsbedingungen $a_{li}(q_o, q_1, \dots q_n) \cdot \delta q_i = 0$ durch Einführung Lagrangescher Multiplikatoren die Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_l\,a_{li} \tag{19}$$

bzw.

$$q_{ij}\,\ddot q_j + (g_{ij,k} - \frac{1}{2} g_{ik,j})\,\dot q_j\,\dot q_k = Q_i + \lambda_l\,a_{li} \tag{20}$$

erhalten. Durch Einführung neuer Geschwindigkeitskoordinaten

$$\omega_l = a_{li}\,(q_o, q_1, \dots q_n)\,\dot q_i \tag{21}$$

mit der reziproken Beziehung

$$\dot q_i = b_{il}\,(q_o, q_1 \dots q_n)\,\omega_l \tag{22}$$

und

$$T^* = \frac{1}{2} g_{ij}\,b_{ik}\,b_{jl}\,\omega_k\,\omega_l \tag{23}$$

gewinnt man die Boltzmann-Hamelschen Gln.:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_j} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} b_{ij} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_m} b_{ij}\,b_{kl}\,(a_{mi,k} - a_{mk,i})\,\omega_l = Q_i\,b_{ij} \tag{24}$$

Diese Gln. vereinfachen sich durch Wegfall des 3. Terms der linken Seite erheblich, wenn die ω_l holonome Geschwindigkeitskoordinaten sind.
Die Gln. (24) bieten den Vorteil, daß man ohne Lagrangesche Multiplikatoren auskommen kann, wenn man die Zwangsbedingungen durch Nullsetzen entsprechender Geschwindigkeitskoordinaten befriedigt. Betrifft das z. B. ω_1 bis ω_r, so entfallen einfach die Gln. j = 1 bis j = r in Gl. (24). Insbesondere kann man auch für die verbleibenden Geschwindigkeiten $\omega_j = \dot q_j$ wählen, vgl. z. B. [1].

Eine weitere Möglichkeit, durch Anwendung der Boltzmann-Hamelschen Gln. zu Vereinfachungen zu gelangen, ist ersichtlich, wenn man unter Anwendung von Gl. (23) die Entwicklung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_m} = \frac{d}{dt}(g_{ij}\,b_{ik}\,b_{jm}\,\omega_k)$$

$$= g_{ij}\,b_{ik}\,b_{jm}\,\dot\omega_k + \frac{\partial}{\partial q_l}(g_{ij}\,b_{ik}\,b_{jm})\,\omega_k\,b_{ln}\,\omega_n \tag{25}$$

vollzieht. Durch geeignete Wahl der Beziehungen (22) kann eine Diagonalisierung der Matrix $g_{ij}\,b_{ik}\,b_{jm}$ mit dem entsprechenden Vorteil für die numerische Integration der Bewegungsgleichungen erreicht werden. Die Gln. (22) sind dabei in der Regel nichtholonom, wie in der bereits zitierten Arbeit [11] gezeigt wurde.

2.3. Weitere Bewegungsgleichungen

Das Jourdainsche Prinzip,

$$\int (d\mathbf{F} - dm\,\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta' \dot{\mathbf{r}} = 0$$

und das Gaußsche Prinzip,

$$\int (d\mathbf{F} - dm\,\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta'' \ddot{\mathbf{r}} = 0$$

erlauben folgende Entwicklungen [13]:

$$\left(\frac{\partial \dot T}{\partial \dot q_i} - 2\,\frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right) \cdot \delta' \dot q_i = 0 \tag{26}$$

und

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \ddot T}{\partial \ddot q_i} - \frac{3}{2}\frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right) \cdot \delta'' \ddot q_i = 0 \tag{27}$$

Daraus ergeben sich die Gln. von Nielsen

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_l a_{li} \tag{28}$$

und Tzenoff

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{3}{2}\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_l a_{li} \tag{29}$$

Die dabei verwendeten Bindungen

$$a_{li}\,\delta' \dot{q}_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad a_{li}\,\delta'' \ddot{q}_i = 0$$

können holonom oder anholonom sein. Die Gln. von Tzenoff erlauben sogar Bindungen, die in den Geschwindigkeiten nichtlinear sind, denn aus

$$\varphi(t, q_1, q_2, \ldots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_n) = 0$$

entsteht durch Anwendung der Gaußschen Variation die lineare Beziehung

$$\frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial \ddot{q}_j}\,\delta'' \ddot{q}_j \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_j}\,\delta'' \ddot{q}_j = 0$$

Für holonome und nichtholonome lineare Beziehungen ergeben sich jedoch kaum Vorteile der Gln. (28) und (29) gegenüber den Lagrangeschen Gln., da die Bildung der Ableitungen von $\dot{T}$ und $\ddot{T}$ relativ aufwendig ist. Ähnliches kann von den Appellschen Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i \tag{30}$$

gesagt werden (vgl. [1]), weil die Bildung der Appelschen Funktion

$$S = \frac{1}{2}\int dm\,\ddot{\mathbf{r}}^2$$

eine sehr aufwendige Arbeit ist. Da die Appellschen Gln. aus dem Gaußschen Prinzip hergeleitet sind, stehen sie – bei Anwendung auf Starrkörpersysteme – in engem Zusammenhang mit Gl. (14).

3. Einige Erweiterungen

In diesem Zusammenhang soll auf Erweiterungen eingegangen werden, die sich aus der Einbeziehung elektromagnetischer Vorgänge, der Berücksichtigung der Verformung von Bauteilen und der Behandlung von Stoßproblemen in Mehrkörpersystemen ergeben.

3.1. Erweiterung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen auf elektromechanische Systeme

Es läßt sich zeigen [14], [19], daß die Bewegungsgesetze elektromechanischer Systeme ebenfalls durch Lagrangesche Bewegungsgleichungen dargestellt werden können, wenn als generalisierte Koordinaten Verschiebungen, Winkeldrehungen und elektrische Ladungen verwendet werden. Auf diese Weise lassen sich die Bewegungsgleichungen durch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \tag{31}$$

ausdrücken, wobei

$$\Lambda = T - \Omega$$

ist und $T = \frac{1}{2} g_{ij}(t, q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j$ die kinetische Energie, $\Omega = \Omega(t, q_i, \dot{q}_i)$ ein verallgemeinertes Potential und $D = \frac{1}{2} s_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j$ die sogenannte Dissipationsfunktion sind.

Wie in [11] gezeigt wird, läßt sich auf diese Weise das Modell einer elektrischen Maschine durch ein Gleichungssystem mit 5 Freiheitsgraden darstellen, wobei 4 generalisierte Koordinaten Ladungsgrößen und eine die Winkelkoordinate sind.

3.2. Einbeziehung elastischer Verformungen der Körper

Das Bemühen zur Erhöhung der Arbeitsgeschwindigkeit von Industrierobotern bei gleichzeitiger Beibehaltung oder Erhöhung der Arbeitsgenauigkeit und der Zwang zur Materialeinsparung werden dazu führen, daß elastische Verformungen der Bauelemente bei der Modellierung der Bewegungsvorgänge berücksichtigt werden müssen. Entsprechende Ansätze (vgl. [15]) sind durch große Verschiebungen und kleine Verzerrungen gekennzeichnet.

Bezeichnet man die Lage der Massenelemente eines Körpers relativ zum Massenmittelpunkt des unverzerrten Körpers im körperfesten System durch den Vektor $\underline{\rho}$, so kann man unter Einführung von Koordinatenfunktionen $\mathbf{u}_i$ und verallgemeinerten Koordinaten q_i für die elastischen Verschiebungen ansetzen (Bild 2):

$$\underline{\rho} = \underline{\rho}_o + q_i\,\mathbf{u}_i$$

Bei Verwendung des d'Alembertschen Prinzips, Gl. (6), sind folgende Terme einzusetzen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \underline{\rho}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \underline{\omega} \times \underline{\rho} + \dot{q}_i\,\mathbf{u}_i$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{\rho} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}) + 2\underline{\omega} \times \mathbf{u}_i\,\dot{q}_i + \mathbf{u}_i\,\ddot{q}_i$$

$$\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{R} + \delta\underline{\pi} \times \underline{\rho} + \mathbf{u}_i\,\delta q_i$$

Wie ersichtlich, entstehen gegenüber dem Starrkörpersystem eine Reihe von Zusatztermen und – wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der δq_i – von Zusatzgleichungen, auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden muß. Eine gewisse Vereinfachung entsteht durch Streichen der zweiten Potenzen der $\dot{q}_i$. Es liegt auf der Hand, daß bereits bei Berücksichtigung weniger Koordinatenfunktionen eine erhebliche Verkomplizierung der Bewegungsgleichungen eintritt, die im allgemeinen nur durch die Schaffung von entsprechenden Programmsystemen beherrschbar ist.

Ein anderer Vorschlag [9] besteht deshalb darin, die elastischen Abweichungen eines Manipulators dadurch abzuschätzen, daß zunächst das Starrkörpermodell berechnet und für diese „nominale Bewegung" alle Kräfte und Momente in den Gelenken bestimmt werden. Jetzt können die durch die Elastizität der Glieder bedingten überlagerten „Mikrobewegungen" als Lösungen linearer Differentialgleichungen mit im allg. zeitabhängigen Koeffizienten durch numerische Integration gewonnen werden. Ein ähnliches Vorgehen ist in [17] beschrieben.

3.3. *Berechnung von Stoßvorgängen in Mehrkörpersystemen*

Die Berechnung der Geschwindigkeitssprünge bei Stoßvorgängen in Mehrkörpersystemen nach der Newtonschen Stoßtheorie ist in [16] beschrieben. Es sei die kinetische Energie des Systems

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^T G \dot{q} \tag{33}$$

(hierin ist $\dot{q}$ der Spaltenvektor der verallgemeinerten Geschwindigkeiten). Zwischen den Koordinaten können (zweiseitige) Bindungen vorhanden sein, die sich durch

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} + \mathbf{b}^T = \mathbf{0} \tag{34}$$

ausdrücken lassen, und die Stoßbedingung möge sich durch

$$H(t, q_1, q_2 \ldots q_n) \leqslant 0 \tag{35}$$

formulieren lassen. Dann wird durch Differentiation von H nach der Zeit

$$\dot{H} = \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{h} + h_o$$

gebildet. Damit lassen sich die Geschwindigkeitsdifferenzen $\Delta\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t_o + 0) - \dot{\mathbf{q}}(t_o - 0)$ vor und nach dem Stoßzeitpunkt t_o zu

$$\Delta\dot{\mathbf{q}} = \lambda\mathbf{u} \tag{36}$$

und die durch die Bindungsgln. (34) bedingten Austauschimpulse **p** zu

$$\mathbf{p} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v} \tag{37}$$

berechnen. Die Vektoren **u** und **v** sind Lösungen eines linearen Gleichungssystems:

$$\begin{bmatrix} G & -B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{38}$$

während sich λ aus der Stoßzahl κ, **h**, $\mathbf{h}_o$, **u** und $\dot{\mathbf{q}}(t_o - 0)$ zu

$$\lambda = -(1+\kappa)\frac{\mathbf{h}^T \cdot \dot{\mathbf{q}}(t_o - 0) + \mathbf{h}_o}{\mathbf{h}^T \cdot \mathbf{u}} \quad \text{ergibt.} \tag{39}$$

4. Einige Bemerkungen zur Aufstellung und Integration der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen sind relativ kompliziert aufgebaut, insbesondere dann, wenn allgemeine räumliche Bewegungsmöglichkeiten vorliegen. Deshalb gibt es seit langem Bemühungen, nicht nur die Lösung dieser Gleichungen Rechnern zu übertragen, sondern auch ihre Aufstellung. Bezüglich der Eingangswerte in ein solches Programmsystem unterscheidet man Programme, die als Eingabewerte mit Angaben zur Konfiguration des Systems auskommen, von denen, bei dem der Nutzer Unterprogramme für die kinetische Energie des Systems aufstellen muß. Hinsichtlich des Ergebnisses des Programmes ist die explizite Ausgabe der Dgln. in einer Formelsprache von der numerischen Berechnung der Beschleunigungen zum Zweck der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen zu unterscheiden. Die folgende Tabelle gibt jeweils ein Beispiel verwirklichter Kombinationen mit Angabe der verwendeten Gleichungen und der betreffenden Literaturstelle an:

Ergebnis	Eingangsgrößen: Konfiguration	Eingangsgrößen: kinetische Energie
explizit	Newton-Euler-Gln. [7]	Lagrangesche Gln. [20]
numerisch	Gaußsches Prinzip [10]	Lagrangesche Gln. [12]

Es ist zu bemerken, daß Programmsysteme, die die Ausgabe der Dgln. der Bewegung in einer Formelsprache auszugeben gestatten, mit Algorithmen der Formelmanipulation ausgestattet sein müssen. Der arbeitsaufwendige Prozeß der Formelmanipulation entfällt bei Programmen, deren Ziel allein die numerische Lösung von Anfangswertproblemen ist. Programmen, die unmittelbar Angaben der geometrischen Konfiguration des mechanischen Systems verarbeiten, sind bisher nur für die Anwendung auf Starrkörpersysteme bekannt. Programme, die von der kinetischen Energie ausgehen, um die Beschleunigungen auszurechnen, ersetzen die partiellen Differentialquotienten in Gl. (18) durch Differenzenquotienten. Dabei hat sich gezeigt, daß bei genügender Wortlänge des Rechners (8 Byte) der Genauigkeitsverlust vernachlässigbar ist.

LITERATUR

[1] Fischer, W., Stephan, W.: Prinzipien und Methoden der Dynamik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1972.

[2] Lilov, L.; Struktura, kinematika i dinamika sistem tverdich tel. J. Uspechi Mechaniki 1983 H. 1/2.

[3] Wittenburg, J.: Duale Quaternionen in der Kinematik räumlicher Getriebe. Ing.-Archiv 51 (1981) 17 – 29.

[4] Lilov, L.: O dinamika odnokonturnoj manipuljacionnoj systemy. Bulg. Ak. d. Wiss., Theor. u. angew. Wiss. XII Nr. 3.

[5] Lilov, L., Wittenburg, J.: Bewegungsgleichungen für Systeme starrer Körper mit Gelenken beliebiger Eigenschaften. ZAMM 57 (1977) 137 – 152.

[6] Rößler, J.: Der KOGEAN-Algorithmus und seine programmtechnische Verwirklichung. Tagung Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1973, A II.

[7] Kreuzer, E.: Benutzungsanleitung für das Programmpaket NEWEUL, Bericht des Institutes B für Mechanik, Univ. Stuttgart, 2. Auflage 1981.

[8] CAMS, Programmsystem zur kinematischen und dynamischen Analyse komplizierter mechanischer Strukturen . . . (bulg.). Jahresbericht ЕЦММ – БАН

[9] Vukobratovic, M., Potkonjak, V.: Dynamics of Manipulation Robots. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1982.

[10] Lilov, L., Lorer, M.: Dynamic Analysis of Multirigid-Body System Based on the Gauss Principle. ZAMM 62 (1982) 539 – 545.

[11] Maißner, P.: Modellgleichungen für Manipulatoren. Techn. Mechanik 3 (1982) 64 – 77.

[12] Fischer, U., Dankert, J.: Ein Programm zur Aufstellung und Lösung von Bewegungsdifferentialgleichungen. Tagung Festkörpermechanik, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1976, V. XXXI.

[13] Lilov, L.: Variationsprinzipien in der Starrkörpermechanik ZAMM 64 (1984) T 166.

[14] Maißner, P.: Der Lagrange-Formalismus für diskrete elektromechanische Systeme in anholonomen Koordinaten Wiss. Zeitschrift TH Ilmenau 27 (1982) 131 – 145.

[15] Truckenbrodt: Bewegungsverhalten und Regelung hybrider Mehrkörpersysteme mit Anwendung auf Industrieroboter, VDI-Fortschr.-B., Reihe 8, Nr. 33, 1980.

[16] Fischer, U., Hennig, K.: Formalisierte Berechnung der Geschwindigkeitssprünge ... Techn. Mechanik 3 (1982) 78 – 80.

[17] Lilov, L., Bekjarov, V.: Tocnost' sistem s drevovidnoj strukturoj ... Bulg. Ak. d. Wiss., Theor. u. angew. Wiss. XVI Nr. 1.

[18] Schiehlen, W.: Nichtlineare Bewegungsgleichungen großer Mehrkörpersysteme. ZAMM 61 (1981) 413 – 419.

[19] Maißer, P.: Ein Beitrag zur Theorie diskreter elektromechanischer Systeme mit Anwendungen in der Manipulator-/Robotertechnik. Diss. B., TH Ilmenau.

[20] Maißer, P., Habelt, J.: Rechnergestützte Ermittlung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen holonomer Starrkörpersysteme. Wiss. Z. TH Ilmenau 25 (1979) 2, 119 – 127.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Udo Fischer
TH „Otto von Guericke", Sektion Maschinenbau
3010 Magdeburg, PSF 124

Dr. Ljubomir Lilov
Bulgarische Akademie der Wissenschaften
Institut für Mechanik und Biomechanik
1090 Sofia, P. O. Box 373