

Druckiterationsverfahren zur effektiven Lösung inkompressibler elastischer Probleme

Ulrich Langer, Werner Queck

1. Einleitung

Die numerische Behandlung linearer und nichtlinearer Elastizitätsprobleme für inkompressible Materialien wird durch Nebenbedingungen in Gleichungsform (Inkompressibilitätsbedingung) erschwert [15], [16], [18], [19]. Neben der zu bestimmenden Vektorfunktion u der Verschiebungen bzw. der Verschiebungsgeschwindigkeiten tritt der Druck p als zusätzliche Unbekannte (Lagrangefaktor) auf. Bei der Diskretisierung des linearen inkompressiblen Elastizitätsproblems mit der Finiten-Elemente-Methode (FEM) entsteht ein großdimensioniertes, schwach besetztes lineares Gleichungssystem mit symmetrischer aber indefiniter Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Hierbei bezeichnen A die Steifigkeitsmatrix, B den diskreten Divergenzoperator und f den Lastvektor. Wegen der Indefinitheit der Systemmatrix aus (1.1) können direkte Lösungsverfahren wie der Gaußalgorithmus versagen oder unbrauchbare Lösungen erzeugen. Häufig angewendete Straf- bzw. Regularisierungsverfahren [5], [7], [18] erweisen sich dann als nicht ausreichend, wenn neben den Werten der Verschiebung auch genaue Druckwerte interessieren.

In dieser Arbeit werden Druckiterationsverfahren (Iterationsverfahren vom Uzawa-Typ) vorgestellt, die sowohl Näherungslösungen für den Druck als auch für die Verschiebung liefern. Es erweist sich, daß die Konvergenzgeschwindigkeit dieser Verfahren unabhängig von der Feinheit der Diskretisierung und folglich auch von der Dimension des Gleichungssystems ist. Voraussetzung dafür ist die Gültigkeit gewisser Bedingungen, die im Punkt 2 im Zusammenhang mit der Diskretisierung der genannten Modellaufgabe erörtert werden. Eine zentrale Rolle nimmt dabei die Ladyshenskaja-Babuska-Brezzi-Bedingung (LBB-Bedingung) [4], [16] ein, aus der sich zulässige Finite-Elemente-Kombinationen für Verschiebung und Druck ableiten lassen. Die numerischen Resultate im Punkt 4 bestätigen die theoretischen Aussagen über die Dimensionsunabhängigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit. Die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen gelten nicht nur für unser Modellproblem, sondern sind zum Beispiel sofort übertragbar auf das Stokes-Problem für inkompressible Flüssigkeiten [5], [22], [23].

Die Ausdehnung auf nichtlineare Probleme kann stufenweise erfolgen, indem zunächst nichtlineare Stoffgesetze berücksichtigt werden. Solche Stoffgesetze treten beispielsweise beim Vorwärtsfließpressen auf [7], [25]. Da-

bei ist $A = A(u)$ ein nichtlinearer stark monotoner Operator. Eine vollständige nichtlineare Behandlung inkompressibler Elastizitätsprobleme mit Einbeziehung geometrischer Nichtlinearitäten erfolgt in [16]. Zur Auflösung der entstehenden Gleichungssysteme werden ebenfalls Algorithmen vom Uzawa-Typ verwendet. Die in dieser Arbeit vorgestellten Druckiterationsverfahren sind formal auf Probleme mit nichtlinearem Operator A übertragbar. Es sei noch bemerkt, daß zur Lösung von (1.1) neben Iterationsverfahren vom Uzawa-Typ und Straf- bzw. Regularisierungsverfahren weitere Lösungsmethoden existieren. Dazu gehören die in [2] und [3] beschriebenen Verfahren.

2. Modellaufgabe

Für die weiteren Untersuchungen wird als Modellaufgabe das lineare ebene Elastizitätsproblem für inkompressible Materialien betrachtet. Dabei sind der Verschiebungsvektor $u = (u_1, u_2)$ eines Körpers, der ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ einnimmt, und der im Körper herrschende hydrostatische Druck p bei gegebener Belastung durch eine Volumenkraft $f = (f_1, f_2)$ und durch eine Oberflächenkraft $S = (S_1, S_2)$, die auf das Randstück Γ_2 wirkt, zu bestimmen. Auf dem Randstück Γ_1 sind die Verschiebungen $g = (g_1, g_2)$ vorgegeben. Das dieses Problem beschreibende Differentialgleichungssystem hat die Gestalt

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + \rho f_i &= 0 & \text{in } \Omega \quad i = 1, 2 \\ \operatorname{div} u &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= g & \text{auf } \Gamma_1 \\ \sigma_{ij} n_j &= S_i & \text{auf } \Gamma_2 \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

wobei die bekannten Summations- und Differentiationskonventionen verwendet werden. In (2.1) werden mit σ_{ij} , $i, j = 1, 2$ die Komponenten des Spannungstensors bezeichnet. Als Stoffgesetz wird die Beziehung

$$\sigma_{ij} = 2G \epsilon_{ij} - p \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.2)$$

verwendet, wobei G den Gleitmodul, δ_{ij} das Kronecker-Symbol und ϵ_{ij} die Verzerrungen bezeichnen. Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung ist durch

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2 \quad (2.3)$$

gegeben. Weiter sind ρ die Dichte und n_j , $j = 1, 2$ die Komponenten der äußeren Einheitsnormalen an $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ (vgl. auch [24]).

Grundlage für die Methode der finiten Elemente ist eine Variationsformulierung von (2.1). Dazu führen wir zunächst die folgenden Funktionenräume ein

$$X = \left\{ v = (v_1, v_2) : v_i \in W_2^1(\Omega), v_i|_{\Gamma_1} = 0, i = 1, 2 \right\} \quad (2.4)$$

$$M = \begin{cases} L_2(\Omega) & \text{wenn } \text{mes}(\Gamma_2) > 0 \\ L_2^0(\Omega) = \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\} & \text{wenn } \Gamma_1 = \Gamma \end{cases} \quad (2.5)$$

wobei $L_2(\Omega)$ der Raum der über Ω quadratisch summierbaren Funktionen ist und $W_2^1(\Omega)$ der Raum von Funktionen aus $L_2(\Omega)$, deren erste verallgemeinerten Ableitungen ebenfalls zu $L_2(\Omega)$ gehören. Die Räume X und M sind mit den Normen

$$\|v\|_X = |v|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} v_{i,j} v_{i,j} \, dx \right)^{0.5} \quad (2.6)$$

$$\|q\|_M = |q|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} q^2 \, dx \right)^{0.5}$$

versehen [1]. Für das weitere wird vorausgesetzt, daß die Verschiebungsrandbedingungen homogen sind, das heißt $g = 0$.

Die Variationsformulierung des Problems (2.1) lautet:

Zu bestimmen sind $u \in X, p \in M$, so daß gilt

$$a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in X \quad (2.7 a)$$

$$b(u, q) = 0 \quad \forall q \in M. \quad (2.7 b)$$

Dabei sind die Bilinearformen a und b durch

$$a(u, v) = \int_{\Omega} 2G \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) \, dx \quad u, v \in X \quad (2.8)$$

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} q \, \text{div} v \, dx \quad v \in X, q \in M \quad (2.9)$$

definiert. Für die rechte Seite gilt

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_2} S_j v_j \, d\Gamma \quad v \in X. \quad (2.10)$$

Unter der Voraussetzung, daß Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand ist, existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $(u, p) \in X \times M$ des Problems (2.7), vgl. [4], [5]. Die Diskretisierung unseres Modellproblems erfolgt mit der Methode der finiten Elemente. Mit h wird der Diskretisierungsparameter (z. B. Schrittweite, siehe Beispiel im Punkt 4) bezeichnet, so daß die Anzahl der Knoten von der Ordnung h^{-2} ist. Über den üblichen FEM-Algorithmus werden endlichdimensionale Teilräume $X_h \subset X$ und $M_h \subset M$ konstruiert, wobei für Verschiebung und Druck unterschiedliche Elemente verwendet werden. Die zu X_h und M_h isomorphen euklidischen Vektorräume seien mit X_h^E und M_h^E bezeichnet. Ihre Elemente sind die Vektoren der Knotenparameter der Verschiebung und des Druckes, siehe [5]. Das durch die Diskretisierung entstandene endlichdimensionale lineare Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h \\ B_h^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_h \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

oder in gleichberechtigter Schreibweise

$$A_h u_h + B_h p_h = f_h \quad (2.12 a)$$

$$B_h^T u_h = 0, \quad (2.12 b)$$

wobei $u_h \in X_h^E, p_h \in M_h^E$ die zu ermittelnden Vektoren der Verschiebungs- bzw. Druckwerte, A_h die übliche

Steifigkeitsmatrix und B_h der diskrete Divergenzoperator sind. Die zu $u_h \in X_h^E$ bzw. $p_h \in M_h^E$ gehörenden Funktionen aus X_h bzw. M_h werden durch \tilde{u}_h bzw. \tilde{p}_h bezeichnet. Zur Sicherung der Existenz und Eindeutigkeit einer Näherungslösung $(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h) \in X_h \times M_h$ bzw. $(u_h, p_h) \in X_h^E \times M_h^E$ müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein.

(i) Es existiert eine Konstante $\alpha_h > 0$ mit

$$a(\tilde{v}_h, \tilde{v}_h) \geq \alpha_h |\tilde{v}_h|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \tilde{v}_h \in X_h. \quad (2.13)$$

(ii) Es existiert eine Konstante $\beta_h > 0$ mit

$$\tilde{v}_h \in X_h \quad \frac{\sup_{\Omega} \int_{\Omega} \tilde{q}_h \, \text{div} \tilde{v}_h \, dx}{|\tilde{v}_h|_{1,\Omega}} \geq \beta_h |\tilde{q}_h|_{0,\Omega} \quad \forall \tilde{q}_h \in M_h \quad (2.14)$$

Die Elliptizitätsbedingung (2.13) ist bei unserem Modellproblem immer erfüllt, da für die Bilinearform a aus (2.8) die Kornsche Ungleichung (siehe [8]) gilt und $X_h \subset X$ gewählt wurde. Dabei ist die Konstante α_h von h unabhängig, wir können also für alle h $\alpha_h = \alpha$ setzen. Die Bedingung (2.14) besitzt eine Schlüsselstellung bei der theoretischen Untersuchung und praktischen Lösung der hier betrachteten Aufgaben. Sie wird als Ladyshenskaja-Babuska-Brezzi-Bedingung (LBB-Bedingung) oder als inf-sup-Bedingung bezeichnet [4], [5], [15], [18]. Gelten (2.13) und (2.14), so ist die Existenz und Eindeutigkeit der Näherungslösungen $\tilde{u}_h \in X_h$ und $\tilde{p}_h \in M_h$ gesichert [4], [5]. Dies bedeutet aber auch, daß die Auswahl von finiten Elementen für die Verschiebung und für den Druck nicht unabhängig voneinander geschehen darf. Dabei wird im allgemeinen bei gleicher Geometrie der Vernetzung des Gebietes Ω mit unterschiedlichen Polynomansätzen für Verschiebung und Druck gearbeitet. Die Überprüfung der Gültigkeit von (2.14) ist meistens eine komplizierte Aufgabe. Die folgende Tabelle 1 gibt zwei Beispiele möglicher Elementkombinationen für Verschiebung und Druck, bei denen die LBB-Bedingung erfüllt ist.

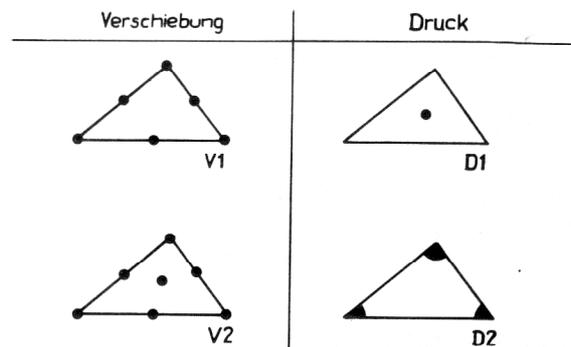


Tabelle 1

- V1 – Dreieckselement mit quadratischem Ansatz
- D1 – Dreieckselement mit konstantem Ansatz
- V2 – Dreieckselement mit quadratischem Ansatz plus Mittelknoten
- D2 – Dreieckselement mit linearem Ansatz ohne Stetigkeit an den Elementgrenzen

Weitere Elementkombinationen sind für konkrete Gebiete Ω und konkrete Lage der Randstücke Γ_1 und Γ_2 möglich [18], [23].

Die Konstante β_h aus der LBB-Bedingung (2.14) kann von h abhängen. Damit lassen sich Lösbarkeit und Eindeutigkeit der Lösung von (2.12) klären. Für $h \rightarrow 0$ treten allerdings bei einer h -Abhängigkeit von β_h Stabilitätsprobleme auf. Dagegen garantiert die h -Unabhängigkeit der Konstanten β_h die Stabilität und die Konvergenz $u_h \rightarrow u$, $p_h \rightarrow p$ ($h \rightarrow 0$) mit einer von den konkreten finiten Elementen abhängigen Konvergenzgeschwindigkeit [5], [18]. Für unsere weiteren Betrachtungen gelte $\beta_h = \beta \neq \beta(h)$.

Kehren wir zu dem durch die Diskretisierung entstandenen Gleichungssystem (2.12) zurück. Da wegen (2.13) die Matrix A_h positiv definit und folglich invertierbar ist, kann (2.12a) formal nach u_h aufgelöst und in (2.12b) eingesetzt werden. Man erhält das zu (2.12) äquivalente System

$$B_h^T A_h^{-1} B_h p_h = B_h^T A_h^{-1} f_h \quad (2.15)$$

$$u_h = A_h^{-1} (f_h - B_h p_h) \quad (2.16)$$

Die Beziehung (2.15) stellt ein Gleichungssystem $C_h p_h = d_h$ zur Bestimmung des Druckvektors p_h mit der Systemmatrix $C_h = B_h^T A_h^{-1} B_h$ und der rechten Seite $d_h = B_h^T A_h^{-1} f_h$ dar. Da A_h^{-1} unbekannt ist, können C_h und d_h nicht explizit angegeben werden. Für die Untersuchung von iterativen Verfahren zur Lösung von (2.15) sind Abschätzungen für den größten und kleinsten Eigenwert bzw. für die Kondition der positiv definiten und symmetrischen Matrix C_h erforderlich [20]. In [15] wird das folgende Resultat bewiesen.

Wenn die Konstanten α_h aus (2.13) und β_h aus (2.14) nicht von h abhängen, existieren von h unabhängige Konstanten γ_1, γ_2 mit $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2$, so daß

$$\gamma_1 h^2 (q_h, q_h) \leq (B_h^T A_h^{-1} B_h q_h, q_h) \leq \gamma_2 h^2 (q_h, q_h) \quad \forall q_h \in M_h^E \quad (2.17)$$

gilt. Folglich ist die Kondition κ von C_h

$$\kappa = \frac{\gamma_2 h^2}{\gamma_1 h^2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (2.18)$$

unabhängig von h .

Die Formulierung der diskreten Aufgabe in der Form (2.15), (2.16) und die Abschätzung (2.17) sind die Grundlagen für die verschiedenen Lösungsverfahren, die im folgenden Punkt vorgestellt werden.

3. Druckiterationsverfahren

In diesem Punkt werden verschiedene bekannte Iterationsverfahren [20] zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit symmetrischer und positiv definitiver Systemmatrix auf das Druckgleichungssystem (2.15) angewendet und untersucht. Im folgenden wird bei der Notation auf den Index h bei den Matrizen und Vektoren verzichtet. Die Lösungsverfahren werden für festes h untersucht. Die Konvergenzgeschwindigkeit aller Ver-

fahren wird durch die Anzahl der benötigten Iterationen $I = I(\epsilon)$ zur Verringerung des Anfangsfehlers $\|p - p_0\|$ auf das ϵ -fache bestimmt.

3.1. Klassischer Uzawa-Algorithmus

Eine häufig angewendete Methode zur iterativen Lösung des Gleichungssystems (2.12) ist der Uzawa-Algorithmus. In seiner einfachsten Variante hat er folgende Form. Sei p_0 eine beliebige Startnäherung für den Druck. Die $k+1$ -ten Iterierten werden bestimmt nach

$$u_{k+1}: \quad Au_{k+1} = f - Bp_k \quad (3.1a)$$

$$p_{k+1}: \quad -\frac{p_{k+1} - p_k}{\tau} + B^T u_{k+1} = 0, \quad (3.1b)$$

wobei τ ein noch zu wählender reeller Iterationsparameter ist. Der Algorithmus (3.1) ist nichts anderes als das Verfahren der einfachen Iteration (vgl. [20]) für das Druckgleichungssystem (2.15). Schreibt man die einfache Iteration für (2.15) auf, ergibt sich

$$\frac{p_{k+1} - p_k}{\tau} + C p_k - d = 0. \quad (3.2)$$

Da $C p_k - d = B^T A^{-1} B p_k - B^T A^{-1} f = B^T A^{-1} (B p_k - f) = -B^T u_{k+1}$ gilt, erhält man sofort (3.1b). Aus der allgemeinen Theorie der Iterationsverfahren ist bekannt, daß für den optimalen Iterationsparameter $\tau = \tau_{opt}$ gilt

$$\tau_{opt} = \frac{2}{\gamma_1 h^2 + \gamma_2 h^2}$$

mit γ_1, γ_2 aus (2.17). Für die Anzahl der benötigten Iterationen $I = I(\epsilon)$ zur Verringerung des Anfangsfehlers $\|p - p_0\|$ auf das ϵ -fache gilt

$$I(\epsilon) = \frac{\ln \epsilon}{\ln \rho_0}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Die Anzahl der Iterationen ist damit nicht von der Dimension des Druckgleichungssystems abhängig. Für die Anwendung dieses Verfahrens mit optimalem Iterationsparameter τ ist die Kenntnis der Werte γ_1 und γ_2 bzw. eine gute Abschätzung für γ_1 und γ_2 notwendig.

3.2. Uzawa-Gradientenverfahren (UGV)

Als nächstes Iterationsverfahren zur Lösung von (2.15) wird das Gradientenverfahren betrachtet. Die Iterationsparameter hängen hier von k ab und werden nach Variationsprinzipien berechnet. Die Größen γ_1 und γ_2 werden nicht benötigt. Der Algorithmus hat folgendes Aussehen.

Start:	$p := p_0$
	$g := Bp - f$
	$u := -A^{-1}g$
	$r := -B^T u$
Iteration:	$l \quad g := Br$
	$d := A^{-1}g$
	$a := B^T d$
	$\tau := (r, r)/(r, a)$
	$p := p - \tau r$

$r := r - \tau a$
 $u := u + \tau d$
 $\|r\| \leq \epsilon_1 \|f\| \xrightarrow{\text{ja}} \text{END}$
 GOTO 1

Hierbei bezeichnen wie auch in den noch folgenden Algorithmen p_0 den Druckstartvektor, g, d, a gewisse Hilfsvektoren, r den Defektvektor bezüglich des Gleichungssystems (2.15) und ϵ_1 eine positive reelle Zahl. Beim UGV gilt genau wie bei der einfachen Iteration

$$I(\epsilon) = \frac{\ln \epsilon}{\ln \rho_0}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Das UGV kann außerdem zur näherungsweise Berechnung der Größen γ_1 und γ_2 benutzt werden. Dazu wird das Verfahren für verschwindende rechte Seite f mit einer Anfangsnäherung $p_0 \neq 0$ gestartet. Als Näherungswerte für γ_1 und γ_2 werden im k -ten Iterationsschritt ($k \geq 3$) die Nullstellen des quadratischen Polynoms in γ

$$(1 - \tau_k H^2 \gamma) (1 - \tau_{k-1} H^2 \gamma) = \nu$$

mit $\nu^2 = (a_k, p_k) / (a_{k-2}, p_{k-2})$ genommen. Dabei sind $\tau_j, j = k, k-1$ die Parameter des j -ten Iterationsschrittes. Diese Berechnung kann auf einer wesentlich größeren Diskretisierung mit dem Diskretisierungsparameter $H, H \geq h$ erfolgen (vgl. [20], S. 340).

3.3. Uzawa-Tschebyscheff-Verfahren (UTV)

Der Algorithmus der Tschebyscheff-Iteration für (2.15) ist analog dem der einfachen Iteration. Allerdings sind hier die Iterationsparameter von k abhängig, $\tau = \tau_k$. Der Algorithmus hat die Form

Start: $p := p_0$
 $IZ := 0$
 Iteration: $lg := f - Bp$
 $u := A^{-1}g$
 $d := B^T u$
 $\tau := \tau \in \mathcal{M} I(\epsilon)$
 $\tau := 2/h^2 (\gamma_2 + \gamma_1 - (\gamma_2 - \gamma_1)\tau)$
 $p := p + \tau d$
 $IZ := IZ + 1$
 $\{ IZ = I(\epsilon) \} \xrightarrow{\text{ja}} \text{END}$
 GOTO 1

Die Tschebyscheff-Iteration erfordert die Kenntnis der Werte γ_1 und γ_2 . Es werden genau $I(\epsilon)$ Iterationen durchgeführt, wobei hier gilt

$$I(\epsilon) = \frac{\ln \epsilon / 2}{\ln \rho_1}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Die Parameter τ werden nach einem speziellen Algorithmus aus der Menge

$$\mathcal{M} I(\epsilon) = \left\{ \tau_k = \cos[(2k-1)\pi/2I(\epsilon)], 1 \leq k \leq I(\epsilon) \right\}$$

ausgewählt [20]. Da die Werte von γ_1 und γ_2 im allgemeinen nicht bekannt sind, kann eine Kombination UGV-UTV zweckmäßig sein, indem mittels UGV Näherungswerte für γ_1 und γ_2 berechnet werden und mit diesen das schnellere UTV gestartet wird.

3.4. Uzawa-Konjugiertes-Gradientenverfahren (UCGV)

Das konjugierte Gradientenverfahren zur Lösung von (2.15) besitzt den folgenden Algorithmus.

Start: $p := p_0$
 $g := Bp - f$
 $u := -A^{-1}g$
 $r := -B^T u$
 $s := r$
 $\omega := (r, r)$
 Iteration: $lg := Bs$
 $d := A^{-1}g$
 $a := B^T d$
 $\tau := \omega / (d, g)$
 $p := p - \tau s$
 $r := r - \tau a$
 $u := u + \tau d$
 $\|r\| \leq \epsilon_1 \|f\| \xrightarrow{\text{ja}} \text{END}$
 $\mu := (r, r) / \omega$
 $\omega := (r, r)$
 $s := r + \mu s$
 GOTO 1

Hierbei bezeichnen die zusätzlich auftretenden Größen s den Hilfsvektor der Suchrichtung des Verfahrens, ω und μ reelle Hilfsgrößen. Für das UGV ist genau wie beim UGV die Kenntnis der Werte γ_1 und γ_2 nicht erforderlich. Für die Anzahl der benötigten Iterationen gilt die gleiche Beziehung wie beim UTV.

$$I(\epsilon) = \frac{\ln \epsilon / 2}{\ln \rho_1}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

3.5. Abschließende Bemerkungen

Den in diesem Punkt vorgestellten iterativen Verfahren zur Lösung des Druckgleichungssystems ist folgendes gemeinsam.

(i) Die Verfahren sind Algorithmen zur Berechnung des Druckvektors, liefern aber gleichzeitig auf jedem Iterationsschritt einen Näherungswert des Verschiebungsvektors. Bei der einfachen Iteration (klassischer Uzawa-Algorithmus) und beim UTV wird letzterer explizit aus $Au_{k+1} = f - Bp_k$ und beim UGV und UCGV rekursiv berechnet. Im Falle des UGV oder des UCGV kann zur Verbesserung der Genauigkeit des Verschiebungsvektors der rekursiv berechnete Näherungswert als Startvektor für eine Nachiteration zur Lösung von $Au = f - Bp^*$ verwendet werden, wobei p^* der berechnete Näherungswert des Druckes ist.

(ii) In jedem Iterationsschritt des Druckiterationsverfahrens ist ein Gleichungssystem der Art $Ad = g$ mit der positiv definiten und symmetrischen Systemmatrix A zu lösen. Dazu können sowohl direkte als auch iterative Verfahren verwendet werden. Zum Beispiel kann A zu Beginn des Druckiterationsverfahrens in Choleskyfaktoren zerlegt werden. Das Lösen des Gleichungssystems $Ad = g$ beschränkt sich dann auf das Vorwärts- und Rückwärts einsetzen [21]. Der Aufwand für die einmalig durchzuführende Choleskyzerlegung liegt bekanntlich in der

Größenordnung von h^{-4} arithmetischen Operationen, während Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen nur größenordnungsmäßig h^{-3} Operationen benötigen. Damit liegt der Gesamtaufwand zur Ermittlung von Näherungslösungen für Druck und Verschiebung in der Ordnung von $h^{-4} + h^{-3} \ln \epsilon^{-1}$ arithmetischen Operationen. Andererseits existieren zur Lösung des Gleichungssystems $Ad = g$ eine Reihe effektiver iterativer Verfahren, die es gestatten, das System $Ad = g$ mit $\approx h^{-2}$ Operationen aufzulösen (vgl. [9], [10], [11], [13], [14], [17], [20], [21]). Damit läßt sich der Gesamtaufwand für das Druckiterationsverfahren auf $\approx h^{-2} \ln \epsilon^{-1}$ arithmetische Operationen reduzieren. Folglich sind die Druckiterationsverfahren asymptotisch optimal bezüglich des Aufwandes an arithmetischen Operationen.

(iii) Der Speicherplatzbedarf der Druckiterationsverfahren wird von der Speicherform der Matrizen A und B bestimmt. Bei direkten Verfahren zur Auflösung von $Ad = g$ wird zu Zerlegung von A Speicherplatz in der Größenordnung von h^{-3} gebraucht. Die Matrix B kann kompakt gespeichert werden (vgl. [21]), benötigt folglich $\approx h^{-2}$ Speicherplätze. Bei iterativen Lösungsverfahren können sowohl A als auch B kompakt gespeichert werden. Damit liegt der benötigte Speicherplatz in der Größenordnung von h^{-2} .

Im Falle eines nichtlinearen Stoffgesetzes, welches zum Beispiel beim Vorwärtsfließpressen [7], [25] auftritt, können klassisches Uzawa-Verfahren, UGV und UCGV ebenfalls angewendet werden. In jedem Druckiterationsschritt ist dabei ein nichtlineares Gleichungssystem der Art $A(v) = g$ zu lösen. Im erwähnten Beispiel ist A ein stark monotoner nichtlinearer Operator. Zur Lösung solcher nichtlinearen Gleichungssysteme existieren eine Vielzahl von effektiven Iterationsmethoden [10], [12]. In den hier vorgestellten Algorithmen ist aber zu berücksichtigen, daß die Rekursionsformeln für den Defektvektor r und den Verschiebungsvektor u wegen der Nichtlinearität von A nicht mehr exakt sind und gegebenenfalls Korrekturen erforderlich sind.

Alle hier vorgestellten Algorithmen sind auch für dreidimensionale Probleme einsetzbar. Auch in diesem Fall ist die Konditionszahl der Matrix C_h von h unabhängig. Bei Einsatz des Choleskyverfahrens zur Lösung von $Ad = g$ werden größenordnungsmäßig $h^{-7} + h^{-5} \ln \epsilon^{-1}$ arithmetische Operationen und h^{-5} Speicherplätze, bei Verwendung von optimalen iterativen Verfahren $h^{-3} \ln \epsilon^{-1}$ Operationen und h^{-3} Speicherplätze benötigt.

Für die praktische Realisierung (Software) ist es vorteilhaft, alle hier vorgestellten Varianten in einem Programmpaket zusammenzufassen, um verschiedene Anwendungsfälle mit einem einheitlichen Programm erfassen zu können. Außerdem ist es zweckmäßig, wenn die diskrete LBB-Bedingung (2.14) nicht mit einer von h unabhängigen Konstanten β_h erfüllt ist, anstatt des Systems (2.12) das äquivalente regularisierte System

$$\begin{pmatrix} A_h + \eta B_h & B_h^T \\ B_h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_h \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit fixiertem $\eta \geq 0$ zu betrachten und das Programmpaket entsprechend zu gestalten. Ein Programmpaket, welches die hier gestellten Forderungen erfüllt, ist in Vorbereitung.

4. Numerische Resultate

Zwei Testbeispiele bestätigen die theoretischen Aussagen über die Unabhängigkeit der Iterationszahl der Druckiteration von der Feinheit der Diskretisierung. Als Gebiet Ω wurde aus Gründen der Einfachheit ein Rechteck gewählt, auf dessen Rand Γ_1 die Verschiebung u gleich 0 sein soll. Die Vernetzung von Ω erfolgte gleichmäßig durch Rechteckelemente (vgl. Bild 1).

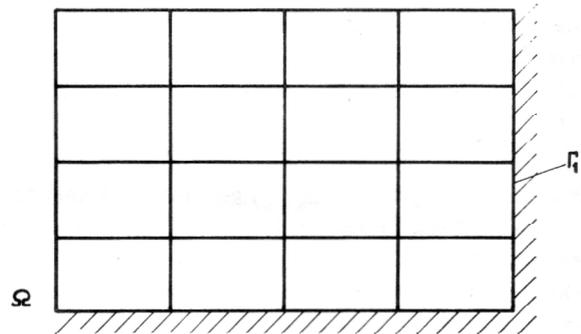


Bild 1

Für die FEM-Diskretisierung des inkompressiblen Elastizitätsproblems wurden das bilineare Vierknotenrechteckelement für die Verschiebung und das konstante Element für den Druck verwendet. Letzteres bedeutet, daß der Druck auf jedem Element konstant und an den Elementgrenzen unstetig ist. Diese Elementkonstellation genügt für unser Gebiet Ω und den gegebenen wesentlichen Randbedingungen für die Verschiebungen den Forderungen des Punktes 2 (vgl. [16]).

Als erstes Beispiel wurde ein Problem gerechnet, bei dem auf den „linken“ Rand von Ω eine konstante Oberflächenlast einwirkt (vgl. Bild 2).

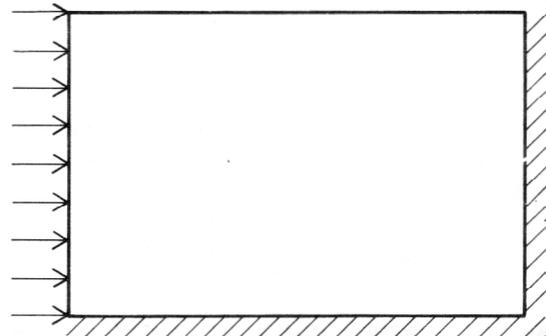


Bild 2

Zur Anwendung gelangten das UCGV und das UGV. Der Abbruch der Druckiteration erfolgte, wenn $\|r\| \leq \epsilon_1 \|r_0\|$ galt, wobei r bzw. r_0 den aktuellen bzw. den Anfangsdefekt bezüglich der Druckgleichung (2.15) und ϵ_1 eine vorgegebene reelle Zahl bezeichnen. Zur Lösung

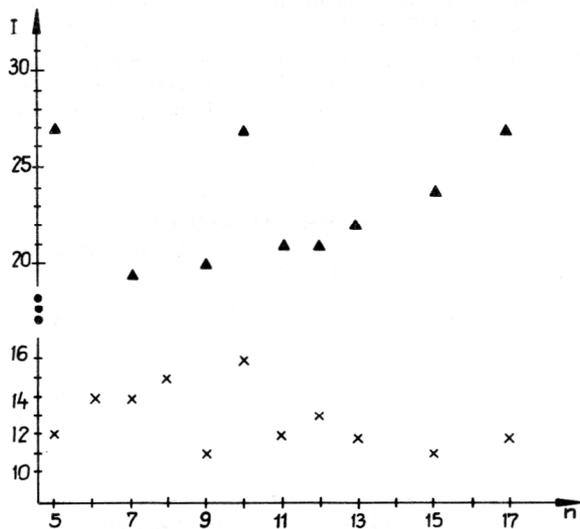


Bild 3
 $\epsilon_1 = 10^{-3}$, x – UCGV, ▲ – UGV

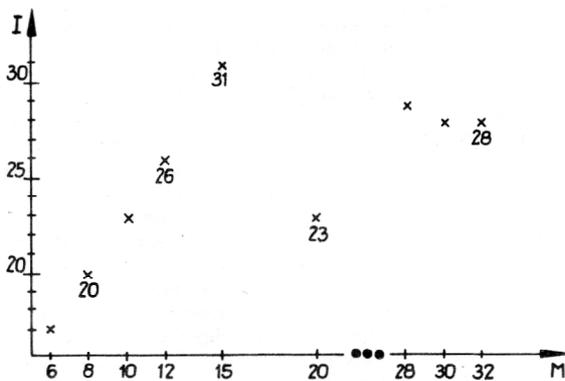


Bild 4
 $\epsilon_1 = 10^{-4}$

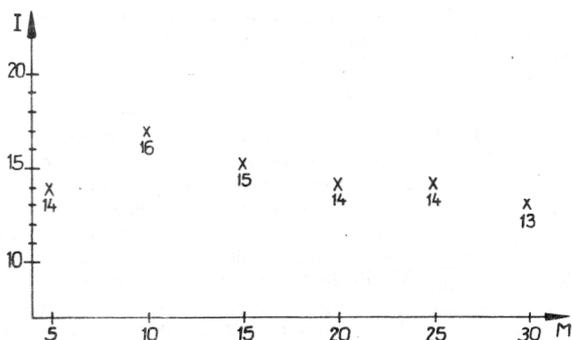


Bild 5
 $\epsilon_1 = 10^{-4}$

des Gleichungssystems $Ad = g$ in jedem Druckiterationsschritt wurde ein konjugiertes Gradientenverfahren eingesetzt. Die Iterationszahlen der Druckiteration sind aus den folgenden Diagrammen (Bilder 3 und 4) ablesbar, wobei auf der Abszisse die Anzahl $n = h^{-1}$ der Unterteilungen jeder Rechteckseite aufgetragen ist. Die Anzahl der Druckunbekannten ist damit n^2 , die der Verschiebungsparameter $2(n+1)^2$.

In einem zweiten Beispiel wurden ein Verschiebungsfeld u und eine Druckfunktion p vorgegeben, so daß $\text{div } u = 0$ und $u|_{\Gamma_1} = 0$ erfüllt waren. Die entsprechenden Volumenkräfte f und Oberflächenlasten S wurden mittels (2.1) bestimmt. Der Vergleich der berechneten Näherungslösung mit der exakten Lösung zeigt, daß bei der Wahl von $\epsilon_1 = 10^{-4}$ der Fehler sich auf den Diskretisierungsfehler beschränkt. Die Iterationszahlen sind wieder dem folgenden Diagramm (Bild 5) zu entnehmen.

LITERATUR

- [1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [2] Axelsson, O.: On iterative solution of large sparse systems of equations with particular emphasis on boundary value problems. TICOM-Report 78 – 4, 1978.
- [3] Axelsson, O.: Preconditioning of indefinite problems by regularization. SIAM J. Numer. Anal. 16 (1979) No. 1, S. 58 – 69.
- [4] Brezzi, F.: On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers. RAIRO 8 (1974) R2, S. 129 – 151.
- [5] Girault, V., Raviart, P.-A.: Finite element approximation of the Navier – Stokes equations. Lecture Notes in Mathematics 749, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
- [6] Glowinski, R.: Lectures on numerical methods for nonlinear variational problems. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [7] Gründemann, H.: Zur iterativen Lösung von Finite-Elemente-Schemata bei inkompressiblem nichtlinearem Materialverhalten. Technische Mechanik 3 (1982) H. 4, S. 29 – 35.
- [8] Hlavacek, I., Necas, I.: On inequalities of Korn's type. Arch. Rat. Mech. Anal. 36 (1970), S. 305 – 334.
- [9] Korneev, V. G.: Finite Elemente Schemata höherer Genauigkeit. Verlag der Leningrader Universität, Leningrad, 1977 (russ.).
- [10] Korneev, V. G., Langer, U.: Approximate solution of plastic flow theory problems. Erscheint 1984 in der Reihe „Teubner – Texte zur Mathematik“ im Teubner-Verlag Leipzig.
- [11] Langer, U.: Effektive Lösungsverfahren für elliptische Randwertaufgaben in speziellen und beliebigen Gebieten. In „Probleme und Methoden der mathematischen Physik“, Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 63, Teubner-Verlag, Leipzig 1984, S. 147 – 155.
- [12] Langer, U.: Schnelle Verfahren zur Auflösung von FEM-Schemata für lineare und nichtlineare Aufgaben der Kontinuumsmechanik. Wissenschaftliche Beiträge der IH Wismar, Nr. 7.1 (1982), S. 20 – 23.
- [13] Langer, U.: Über die Wahl der Iterationsparameter in Relaxationsverfahren auf Gitterfolgen. J. vyc. mat. i matem. fiz. 22 (1982) No. 5, S. 1118 – 1132 (russ.).
- [14] Langer, U.: Zur iterativen Lösung gewisser FEM-Schemata für elliptische Differentialgleichungen der Ordnung $2n$, $n \geq 1$. J. vyc. mat. i matem. fiz. 23 (1983) No. 4, S. 881 – 891 (russ.).
- [15] Langer, U., Queck, W.: On the convergence factor of Uzawa's algorithm. In Vorbereitung.
- [16] Le Tallec, P.: Numerical analysis of equilibrium problems in incompressible nonlinear elasticity. TICOM-Report 80 – 3, 1980.
- [17] Multigrid methods. Lecture Notes in Mathematics 960, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
- [18] Oden, J. T., Kikuchi, N.: Finite element methods for constrained problems in elasticity. Int. J. Numer. Meth. Eng. 18 (1982) No. 5, S. 701 – 725.

- [19] Queck, W.: Untersuchungen zu Aufgaben der Elastizitätstheorie für inkompressible Materialien. *Wissensch. Zeitschrift der TH Karl-Marx-Stadt* (1981) H. 4, S. 441 – 444.
- [20] Samarskij, A. A., Nikolajew, E. S.: Lösungsverfahren für Gittergleichungen. Nauka, Moskau, 1978 (russ.).
- [21] Schwarz, H. R.: *Methode der finiten Elemente*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1980.
- [22] Temam, R.: *Navier-Stokes equations*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
- [23] Thomasset, F.: *Implementation of finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
- [24] Thompson, E.: Average and complete incompressibility in the Finite Element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 9 (1975), S. 925 – 932.
- [25] Gläser, H., Vogel, R.: Zur Lösung des ebenen und axial-symmetrischen Fließens eines viskoplastischen Körpers mit Hilfe der FEM. *Technische Mechanik* 3 (1982) H. 2, S. 60 – 63.

Anschrift der Verfasser:

Dr. rer. nat. Ulrich Langer
 Dipl.-Math. Werner Queck
 Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt
 Sektion Mathematik
 9010 Karl-Marx-Stadt
 PSF 964