TECHNISCHE MECHANIK 5 (1984) Heft 4
Manuskripteingang: 21. 2. 1984

Kontinuumsbegriff und Erhaltungssätze in der Mechanik seit Leonhard Euler

Gert Naue

Mit der Fülle von Arbeiten Leonhard Eulers zur Mechanik wurden wesentliche Positionen auch jetzt noch üblicher und fruchtbarer Arbeitsweisen begründet. Der Differenzierungsprozeß in der historischen Entwicklung der Mechanik, der sich insbesondere in der Herausbildung der Festkörpermechanik äußert, war zu Eulers Zeiten noch keineswegs ausgeprägt, aber in seinen Wurzeln sehr wohl vorhanden. Dies zeigt sich in den konkreten Arbeiten Eulers zur Mechanik elastisch deformierbarer Körper (elastische Linie) bezüglich des Zugangs über den Momentensatz und zur Mechanik der reibungsfreien Flüssigkeiten bezüglich des Zugangs über den Impulssatz. Die Entstehung dieser Arbeiten ist im wesentlichen auf die Berliner Zeit (1741 – 1766) konzentriert.

Euler hat wiederholt Probleme bedacht, warum gewisse Aufgaben über den Momentenerhaltungssatz und andere über den Impulserhaltungssatz ausreichend beschrieben werden. Im Jahre 1775 gelangt L. Euler in Auseinandersetzung mit einer Arbeit von Lagrange zu dem Schluß, daß als fundamentale, allgemeine und voneinander unabhängige Gesetze der Mechanik für jede Bewegung von Körpern jeder Art die Prinzipien vom linearen Impuls und vom Drehimpuls für jedes Körperelement zugrunde liegen. Die beiden Prinzipien lauten in Integralform

$$F = \dot{P}, \quad L = \dot{M}.$$

Sie dürfen mit Recht die Eulerschen Gesetze der Mechanik benannt werden [1]. Im übrigen sei vermerkt, daß der Momentensatz als unabhängiges Gesetz der Mechanik und als kinetische Verallgemeinerung des statischen Gleichgewichtsprinzips auf Jacob Bernoulli (1686) zurückgeht, ein Jahr vor den Newtonschen Gesetzen (1687).

Der Druck als strömungsmechanische Eigenschaft

Eulers Verdienst ist es, das Schnittprinzip in die Mechanik der Kontinua eingeführt zu haben und auf diese Weise die Wirkung innerer Kräfte sichtbar, modellierbar und mit der Bewegungsgröße bilanzierbar gemacht zu haben. Freilich treten bei Euler als innere Kräfte nur die Druckkräfte auf. In der „Hydrodynamik" aus dem Jahre 1752 ordnet Euler den Oberflächenkräften nur Druckwirkungen zu, formuliert aber auch, daß andersartige Wirkungen nicht auszuschließen sind.

Ganz wesentlich ist aber, daß damit der hydrostatische Druck p durch Euler eine eindeutige Bestimmung erfahren hat, die solange erhalten bleibt wie nicht einschneidende Verallgemeinerungen (z. B. bei Reiner-Rivlin-Flüssigkeiten) den Druck als arithmetisches Mittel der Normalspannungen aufzufassen gestatten.

Da L. Euler den Zusammenhang zwischen Druck, Dichte und Temperatur beim idealen Gas kannte, hat er wesentliche Überlegungen gasdynamischer Art angestellt. Hier sei nur an die Reflexion von Druckstörungen am offenen und geschlossenen Ende eines Rohres erinnert.

Zum Spannungsbegriff und der Stetigkeit von Kontinuumseigenschaften

Den tensoriellen Charakter der Schnittreaktionen begrifflich erfaßt zu haben, ist A. L. Chauchy (1822) zu danken. Auf diese Weise wurde es möglich, Zusammenhänge zwischen den Kraftspannungen und Deformationen als tensorielle Zustandsgleichungen (Reibungsgesetze) zu formulieren, deren wichtigstes Ergebnis die Navier-Stokes-Gleichungen als spezielle Form des Impulssatzes waren, wobei die Kraftspannungen proportional dem symmetrischen Anteil des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten, dem Deformationstensor $d_{ki} = \frac{1}{2}(\partial_k v_i + \partial_i v_k)$ gesetzt wurden (Newtonsches Medium).

Es gibt vielfach auch heute noch die Behauptung hinsichtlich der Universalität der Navier-Stokes-Gleichungen. Dies äußert sich z. B. in der Behauptung, daß der Rotor des Geschwindigkeitsfeldes keinen Einfluß auf die Kraftspannungen haben kann (siehe z. B. Sommerfeld, Vorlesungen über Theoretische Physik, Mechanik der deformierbaren Medien, Leipzig 1964 oder R. Schenk, Dissertation B, TU Dresden, 1980).

In der Tat ist zu beweisen, ob bei Koordinatentransformationen die Kraftspannungen nur vom symmetrischen Teil des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten, dem Deformationsgeschwindigkeitstensor abhängen. H. Giesekus (Das Reibungsgesetz der strukturviskosen Flüssigkeit, Kolloidzeitschrift Band 147, Heft 1 – 2/1956) beweist, daß der symmetrische Teil des Kraftspannungstensors bei Entwicklung nach Potenzen von d_{ki} und ω_{ki} um den Entwicklungspunkt $d_{ki}\big|_0 = 0$ unter Beachtung der Forderung nach Invarianz des Reibungsgesetzes gegen starre Rotation vom Rotationstensor $\omega_{ki} = \frac{1}{2}(\partial_k v_i - \partial_i v_k)$ abhängt, wenn das Reibungsgesetz gegen orthogonale Transformationen invariant ist:

$$\begin{aligned} p_{ki} = {} & c_0 \cdot \delta_{ki} + c_1 \cdot d_{ki} \\ & + c_{11}\, d_{ki}\, d_{ji} + c_{12}\,(\omega_{kj}\, d_{ji} + d_{kj}\, \omega_{ji}) \\ & + c_{111}\, d_{kj}\, d_{jl}\, d_{li} + c_{112}\,(\omega_{kj}\, d_{jl}\, d_{li} + d_{kj}\, d_{jl}\, \omega_{li}) \\ & + c_{122}(\omega_{kj} \cdot \omega_{jl}\, d_{li} + d_{kj}\, \omega_{jl}\, \omega_{li}) + c_{212}\, \omega_{kj}\, d_{jl}\, \omega_{li} + \ldots \end{aligned}$$

Der erste Term hat die Bedeutung eines negativen Drucks, der zweite drückt das Newtonsche Reibungsgesetz (Scherviskosität) aus, der dritte gibt die Querviskosität an.

Die ersten drei Terme charakterisieren eine Reinersche Flüssigkeit.

Weiter ist zu erkennen, daß bei verschwindenden Deformationstensor ($d_{ki} = 0$) der Rotationstensor keinen Einfluß auf die Kraftspannung hat. Weiterhin erkennt man, daß der Rotationstensor im Verein mit dem Deformationstensor Effekte zweiter und höherer Ordnung bewirkt.

Bei vergleichsweise einfachen Strömungen (Scherbewegungen), die z. B. bei der Couette-Strömung oder der Kanalströmung bei niedriger Reynoldszahl auftreten, werden diese Effekte nur bedingt wirksam.
Anders ist die Lage bei komplizierten Bewegungen bei hohen Reynoldszahlen, wo beträchtliche Deformations- und Rotationstensoren lokal auftreten und damit die Universalität der Navier-Stokes-Gleichungen, die bei geringen Deformationen noch ohne weiteres gültig sein können, im allgemeinen in Frage stellen.

Zur Unabhängigkeit der Erhaltungssätze

Im Mittelpunkt kontinuumsmechanischer Untersuchungen steht der Impulssatz

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

der in Koordinatenschreibweise unter Beachtung des Summationsübereinkommens für doppelte Indizes die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(B)} \rho v_i \, dV + \int_{(B)} \rho v_i v_k \, dA_k =$$

$$- \int_{(B)} p \, dA_i + \int_{(B)} p_{ki}' \, dA + \int_{(B)} \rho k_i \, dV$$

annimmt bzw. als Differentialgleichung

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k v_i)}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ki}'}{\partial x_k} + \rho k_i$$

zu schreiben ist, wenn der Gauß'sche Integralsatz beachtet wird, wobei der Spannungstensor p_{ki}' und Massendichte ρ durch entsprechende Zustandsgleichungen darzustellen sind. Zusammen mit dem Massenerhaltungssatz stehen dann genügend Gleichungen für die gesuchten Funktionen zur Verfügung. Die Problemstellung ist vollständig beschrieben, wenn die Kraftspannungen durch den Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten allein darstellbar sind. Aus dieser Sicht scheint es so, daß der Drallsatz für die Kontinuumsmechanik ein überflüssiger bzw. abgeleiteter Erhaltungssatz sei. Wenn man den Lehrbüchern der Theoretischen Physik (z. B. Joos) folgt, so reduziert sich der Drallsatz auf das äußere Produkt von Ortsvektor und Termen des Impulssatzes

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{P})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Dies ist in der Tat ein abhängiger Satz. Ein unabhängiger Erhaltungssatz entsteht nur, wenn eine neue unabhängige kinematische Variable eingeführt wird, die die Bedeutung einer Eigendrehung hat. Das kinematische Gesamtverhalten eines Kontinuumselements wird dann durch die zwei Variablen v_i und φ_i gekennzeichnet. Der Drallsatz von Euler, der von ihm als unabhängiger Erhaltungssatz postuliert wurde, ist dann zu schreiben

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{P} + \vec{M})}{dt} = \vec{L} + \vec{r} \times \vec{F}$$

worin $\vec{F}$ und $\vec{L}$ äußere Kräfte und Momente sind und $\vec{M} = \rho J \vec{\dot\varphi}$ mit J als Trägheitsmoment zu schreiben ist.

Als Drallsatz bleibt dann unter Beachtung des Moments der Kräfte die nichttriviale Aussage

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{L}$$

übrig.

Auch höhere Momentensätze sind in Verallgemeinerung abgeleitet und in der Kontinuumsmechanik benutzt worden.

Die erkenntnistheoretische Konsequenz aus der Formulierung der Erhaltungssätze ist die Hinzunahme weiterer bilanzierfähiger Variabler für jeden Erhaltungssatz, wenn das Ergebnis nicht eine triviale Wiederholung eines schon vorher formulierten Erhaltungssatzes sein soll.

Diese hier ausgesprochene triviale Wiederholung eines Erhaltungssatzes, die man durch gewisse Produktbildungen des Erhaltungssatzes mit willkürlichen (physikalisch eventuell bedeutsamen) Funktionen erhält, können von außerordentlicher praktischer Bedeutung für die Modellierung konkreter Strömungsprozesse sein. Es sei an die „Transport"gleichungen für die spezifische Dissipation und die kinetische Energie in den Zweiparameter-Turbulenzmodellen erinnert, die eine Ableitung aus dem Impulssatz sind. Auch „Transport"gleichungen für die Entropie sind abgeleitete Gleichungen, denn die Entropie ist nicht bilanzierfähig im Sinne eines Erhaltungssatzes.

Der Drehimpulssatz wird zuweilen in der Form

$$dL_x = (y\, b_z - z\, b_y)\, dm$$
$$dL_y = (z\, b_x - x\, b_z)\, dm$$
$$dL_z = (x\, b_y - y\, b_x)\, dm$$
$$dL_i = \epsilon_{ijk}\, x_j\, b_k\, dm$$
$$d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{b}\, dm$$

geschrieben.

Mit dem Impulssatz von Euler

$$dF_x = b_x\, dm \quad dF_y = b_y\, dm \quad dF_z = b_z\, dm$$

$$dF_k = b_k\, dm$$

werden die L_i aus dem äußeren Produkt der Kräfte und Radiusvektoren gebildet, so daß der Drehimpulssatz eine Wiederholung des Eulerschen Impulssatzes ist.
Wird unter $\rho J \vec{\dot\varphi} = \vec{M}$ eine neue Variable verstanden und ist $\vec{L}$ das äußere Moment ausschließlich des Moments der äußeren Kräfte, so ist die Gleichung als neuer Erhaltungssatz aufzufassen.
Euler selbst schrieb 1775, daß es nach den Prinzipien notwendig ist, daß

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \text{und} \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{L}$$

als fundamentale, allgemeine und voneinander unabhängige Gesetze der Mechanik für jede Bewegung von Körpern jeder Art gelten (C. Truesdell, ZAMM 44 (1964). Seite 149 – 158).

Zur Realität der Momentenübertragung in fluiden Kontinua

Wenn auch der Drallsatz

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{L}$$

als unabhängiger Erhaltungssatz akzeptiert werden mag, so könnte der Skeptiker einwenden, daß in realen fluiden Kontinua faktisch keine Momente übertragen werden können. Der duale Vektor des Kraftspannungstensors ergibt den Momentendichtevektor (Moment pro Volumeneinheit)

$$m_j = \epsilon_{jki} P_{ki}$$

Sind die Kraftspannungen symmetrisch, so ist die Momentendichte Null.

Die Übertragung von Momenten im fluiden Kontinuum ist also gleichbedeutend mit dem Auftreten von unsymmetrischen Spannungen.

Einen wesentlichen Schritt in der Untersuchung der strukturierten Bewegung der Kontinua (turbulente Bewegung) ging Osborne Reynolds im Jahre 1894, als er durch Zeitmitteln der Bewegungsgleichungen aus den Trägheitsgliedern den Term $\rho \overline{v_k' v_i'}$ in bekannter Weise abspalten konnte, der als negative turbulente Scheinspannung (turbulente Scheinreibung) interpretiert wurde. Dieser Filtrationseffekt kann eine neue Qualität der Gesamtbewegung im zeitlichen Mittel im Sinne der Momentenübertragung ergeben, wenn der duale Vektor des Tensors $\overline{v_k' v_i'}$ nicht verschwindet. Über die Natur der Schwankungsgeschwindigkeiten v_k' und v_i' wird vergleichsweise wenig mitgeteilt. Entsprechend der Einführung von v_k und v_i im Impulssatz handelt es sich bei v_k um die Konvektionsgeschwindigkeit und bei v_i um die Bewegungsgröße pro Masseneinheit in Richtung x_i. Rührt die turbulente konvektive Zusatzbewegung von einem oszillierenden quellenfreien Wirbelfeld her, d. h.

$$v_k' = v_k'^{(W)}$$

und ist die turbulente zusätzliche Bewegungsgröße das Ergebnis eines oszillierenden wirbelfreien Quellenfeldes, d. h.

$$v_i' = v_i'^{(Q)}$$

so wird

$$\overline{v_k' v_i'} = \overline{v_k'^{(W)} \cdot v_i'^{(Q)}}$$

Die Momentendichte dieses Tensors ist

$$m_j = \rho \, \epsilon_{jki} \, \overline{v_k'^{(W)} v_i'^{(Q)}}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\vec{m} = \rho \, \overline{\vec{v}'^{(W)} \times \vec{v}'^{(Q)}}$$

Sind die Vektorfelder des quellenfreien Wirbelfeldes und des wirbelfreien Quellenfeldes an entsprechenden Punkten und zu entsprechenden Zeiten jeweils parallel, so ist die Momentendichte Null. Im übrigen wird sofort klar, daß die Fluktuationen $\overline{v_k' v_i'}$ immer verschwinden, wenn sie nur aus oszillierenden quellenfreien Wirbelfeldern oder nur aus oszillierenden wirbelfreien Quellenfeldern herrühren.

Das Herausfiltern der Geschwindigkeiten des quellenfreien Wirbelfeldes erfolgt aus

$$\vec{v}^{(W)}(\vec{x}, t) = + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{(V)} \frac{\operatorname{rot} \vec{v}}{r} \, dV$$

und des wirbelfreien Quellenfeldes aus

$$\vec{v}^{(Q)}(\vec{x}, t) = - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_{(V)} \frac{\operatorname{div} \vec{v}}{r} \, dV ,$$

worin r der Abstand zwischen dem Volumenelement dV und dem Aufpunkt ist, wo $\vec{v}^{(W)}$ bzw. $\vec{v}^{(Q)}$ bestimmt werden sollen.

Für $\operatorname{div} \vec{v} = e(\vec{x}, t)$ ist die Ergiebigkeit des oszillierenden Quellenfeldes, für $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega}(\vec{x}, t)$ die Intensität des oszillierenden Wirbelfeldes einzusetzen.

Natürlich müssen die Felder $\vec{e}(\vec{x}, t)$ und $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ bezüglich ihrer Zeitintegrale verschwinden. Die oszillierenden Quellfelder können auch Dipolfelder (d. h. auf charakteristische Weise kombinierte Quell/Senken-Felder) sein.

Würde z. B. bei ebener Bewegung ein oszillierendes wirbelfreies Quellfeld mit der Ergiebigkeit

$$e(x, y) = [E_1 \sin(a_1 x) \cdot \cos(a_2 y) - E_2 \cdot \cos(a_1 x) \cdot \sin(a_2 y)] \cdot \sin(a_3 t)$$

vorliegen, so würden die zugehörigen Geschwindigkeitsschwankungen lauten:

$$v_1'^{(Q)} = - \frac{E_1 a_1}{a_1^2 + a_2^2} \sin(a_3 t)$$

$$v_2'^{(Q)} = + \frac{E_2 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \sin(a_3 t) .$$

Ein entsprechendes quellenfreies Wirbelfeld

$$\omega = [\Gamma_1 \sin(b_1 x) \cos(b_2 y) - \Gamma_2 \cos(b_1 x) \cdot \sin(b_2 y)] \sin(b_3 t)$$

ergibt

$$v_1'^{(W)} = \frac{\Gamma_1 b_1}{b_1^2 + b_2^2} \sin(b_3 t)$$

$$v_2'^{(W)} = \frac{\Gamma_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} \sin(b_3 t)$$

Nur wenn $a_3 \neq b_3$ gilt, wird der zeitliche Mittelwert von Null verschieden.

$$m_3 = \frac{\Gamma_1 b_1 \cdot E_2 a_2 + \Gamma_2 b_2 \cdot E_1 a_1}{2 (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_1^2 + b_2^2)}$$

Eine Überprüfung der Momentendichte für aus oszillierenden Quellen- und Wirbelfeldern aufgebauten Geschwindigkeitsschwankungen ergibt von Null verschiedene Werte, wenn sich wenigstens in einer Raumrichtung die Wellenlängen bzw. die Intensitäten der oszillierenden Wirbel- und Quellenfelder unterscheiden.

Daraus ist zu folgern, daß bei isotroper Turbulenz keine Momente übertragen werden und Anisotropie der Turbulenz mit Momentenübertragung verbunden ist, sofern gleichzeitig Quell- und Wirbelfelder beteiligt sind.

Mit diesen Überlegungen wird gleichzeitig deutlich, daß Filtrationseffekte (infolge Zeitmittelns) zu neuen kinematischen Variablen entsprechend der Aggregationsebene in der Hierarchie der Bewegung führen.

Zur Fruchtbarkeit und den Grenzen einer momentenfreien Kontinuumsmechanik der Fluide

Am besten läßt sich diese Frage aus der Betrachtung des Impulssatzes für ein Kontinuum mit Momentenübertragung beantworten.

Der Impulssatz lautet für ein inkompressibles Medium

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = (\overset{\circ}{a} + \overset{\circ}{c}) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + 2 \overset{\circ}{c}\, \epsilon_{ikj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} + \rho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

(vgl. z. B. H (6)).

Der Faktor $\overset{\circ}{c}$ ist ein Maß für die Unsymmetrie der Kraftspannungen. Er wirkt vergrößernd auf den Faktor, der beim Diffusionsglied steht, hat also genau die Wirkung, die sonst mit dem Begriff der Turbulenzviskosität zusammengefaßt wird. Unsere Untersuchungen besagen, daß $\overset{\circ}{c}$ nicht proportional Re/Re_{krit} gewählt werden darf, wie es bei der Turbulenzviskosität üblich ist.

Dies hängt damit zusammen, daß der wesentliche Beitrag der turbulenten Zusatzbewegung im Eigendrehungsfeld $\vec{\varphi}$ enthalten ist. Dieses weist bei einfachen Scherströmungen qualitativ gleiche Verteilungen wie der Deformationstensor auf. Wird die turbulente Strömung vereinfachend durch ein momentenfreies Kontinuum dargestellt, muß $\overset{\circ}{c}$ entschieden vergrößert werden.

Für komplizierte Strömungsfelder (z. B. Rezirkulationsströmungen) unterscheiden sich die Felder für die Divergenz des Deformationstensors $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}$ und der Rotor des des Eigendrehungsfeldes $\epsilon_{ikj} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}$ in qualitativer Hinsicht. Deswegen müssen alle Defekte der momentenfreien Darstellung des Impulssatzes mit komplizierten Vorschriften für die Bestimmung der Turbulenzviskosität ausgeglichen werden. Die Grenzen einer momentenfreien Kontinuumsmechanik für turbulente Strömungen sind dort ausgeweitet, wo Div **d** und rot $\vec{\varphi}$ qualitativ in ihren Feldverteilungen übereinstimmen und das Weglassen von rot $\vec{\varphi}$ mit einer Vergrößerung des Faktors bei Div **d** kompensiert wird. Aus der Sicht einer Momente berücksichtigenden Kontinuumsmechanik sind die fruchtbaren Arbeiten der Prandtlschen Schule ganz bestimmten Klassen von Strömungen vorbehalten.

Die Mechanik der Kontinua deformierbarer Körper führte über die jahrzehntelang mißachteten Arbeiten der Gebrüder Cosserat [9] mit den Variablen v_i und φ_i zu den Erhaltungssätzen für den Impuls und das Moment, wobei zu beachten ist, daß in der Festkörpermechanik unter v_i und φ_i die Verschiebung und Verdrehung und in der Strömungsmechanik die Verschiebungsgeschwindigkeit und Verdrehungsgeschwindigkeit zu verstehen sind. Die Theorie der Mikropolarfluide ist dafür ein Beispiel (Ericksen, Eringen). In jedem Fall führt die Theorie der deformierbaren Körper auf der Basis der unabhängigen Wirkung der Erhaltungssätze für Impuls und Moment zu Erhaltungsgleichungen in Integralform der Gestalt

$$\frac{d}{dt} \int_{(B)} \psi \cdot \rho \, dV = \int_{(B)} i_k [\psi] \, dA_k + \int_{(B)} S[\psi] \cdot \rho \, dV$$

mit „Zufluß" $i_k [\psi]$ und „Quelle" $S[\psi]$ auf der rechten Seite sowie $\frac{d}{dt}$ als substantielle Ableitung und ψ als „Dichte"-Tensor beliebiger Stufe einer bilanzierfähigen Eigenschaft des Kontinuums.

Jeder neue Erhaltungssatz ist mit der Einführung einer neuen kinematischen Variablen verbunden. Die Kontinua mit nur einer kinematischen Variablen, der Geschwindigkeit, sind ein Spezialfall des verallgemeinerten Kontinuums.

Das Entstehen und Bewegen von nachgeordneten Substrukturen ist an die Nichtlinearität des Kontinuums bezüglich ψ und an die Instabilität der Bewegung in dieser Bewegungsstufe gebunden. Dies folgt aus entwicklungstheoretischen Überlegungen [4].

Wesentlich für Kontinua, die durch eine Kaskade von Substrukturen gekennzeichnet sind, ist, daß Momentenerhaltungssätze steigender Ordnung (Momente von Momenten) formuliert werden, deren wesentliche Wirkung durch Abspaltung des indifferenten Anteils der Momente herausgestellt wird. Dies wird verdeutlicht z. B. bei der Herleitung des Momentenerhaltungssatzes erster Ordnung durch Aufspaltung der Momente in Wirkung von Kräften bezüglich eines Koordinatenursprungs und von Kräftepaaren (indifferenter Anteil), die wegen des endlichen Maßstabes der Substrukturen einen von Null verschiedenen Effekt haben. Der Dichtetensor ψ wird bei manchen Kontinua verjüngt bzw. ein zugehöriger dualer Tensor gebildet, so daß die Eigenschaften der Kontinua nicht mehr bezüglich jeder Tensorkomponente im einzelnen zu erfüllen sind. Sie haben in diesem Sinne allgemeineren Charakter. Ein Beispiel ist in [5], [6] diskutiert.

Der Dichtetensor ψ bzw. die daraus abgeleiteten Spins (Eigendrehungen) unterschiedlicher Ordnung sind zeitlich/räumlich gemittelte Variable an einem Raumpunkt für die Bewegung der Substrukturen. Anwendungen liegen vor auf dem Gebiet der Turbulenz, Rheologie, Mehrphasenströmung und Elastizitätstheorie. Den Weg für die Beschreibung von Bewegungen mit Hilfe der gleichrangigen Erhaltungssätze für den linearen Impuls und Drehimpuls geebnet zu haben, ist das Verdienst Leonhard Eulers.

LITERATUR

[1] Truesdell: Die Entwicklung des Drallsatzes. ZAMM 44 (1964), Heft 415, Seite 149 – 158.

[2] Hamel: Elementare Mechanik. Leipzig und Berlin, 1912.

[3] O. Reynolds: On the dynamical theory of incompressible viscons fluids and the determination of the criterion. London, Phil. Trans. (A) 186 (1895), p. 123 . . . 164.

[4] Ebeling und Feistel: Physik der Selbstorganisation und Evolution. Akademieverlag, Berlin, 1982.

[5] G. Naue: Ergebnisse und Probleme der nichtklassischen Strömungsmechanik. ZAMM 52, T 255 – T 268 (1972).

[6] W. Schmidt: Ein Beitrag zur Theorie und Anwendung des Mehrvariablen-Modells der Turbulenz, Dissertation TH Leuna-Merseburg, 1981.

[7] L. Euler: Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper, Leipzig 1806 (Übersetzung von Brandes).

[8] Morgenstern/Szabo: Vorlesungen über Theoretische Mechanik, Springer-Verlag 1961.

[9] E. und F. Cosserat: Sur la theorie de l'elasticite Ann. Toulouse, 10, p 1 – 116 (1896).

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr.-Ing. habil. Gert Naue
Technische Hochschule „Carl Schorlemmer"
Leuna-Merseburg
Sektion Verfahrenstechnik

4200 Merseburg
Otto-Nuschke-Str.