

Rheologische Modelle für Materialien bei endlichen Deformationen

Wladimir A. Palmow

1. Einführung

In der modernen Technik werden zunehmend als normale Arbeitsbedingungen für Materialien endliche Deformationen zugelassen. Endliche elastische Deformationen haben gewöhnlich gummiähnliche Amortisationselemente. Der technologische Fertigungsprozeß einer Reihe von Bauteilen aus Metall setzt die Möglichkeit der Ausbildung von endlichen plastischen Deformationen voraus. Beim Fließen polymerer Werkstoffe im geschmolzenen Zustand entwickeln sich große viskose Deformationen. Dies alles führte dazu, daß immer mehr Aufmerksamkeit auf die Theorie der konstitutiven Gleichungen elastischer, plastischer und viskoser Materialien bei endlichen Deformationen gerichtet wurde. Entsprechende Theorien mit mehr oder weniger großer Allgemeingültigkeit wurden mehrfach formuliert.

Ungeachtet dieser Tatsache kann man im Verhalten realer Materialien auch komplexe Eigenschaften beobachten. So ist Gummi nicht nur elastisch, es verfügt auch über dissipative Eigenschaften, die für Schwingungsprozesse wesentlich sind. Das bedeutet, daß realer Gummi auch viskos oder plastisch sein kann. Bei plastischen Deformationen von Metallen treten zeitabhängige Effekte auf. Polymere Werkstoffe im geschmolzenen Zustand haben nicht nur viskose Eigenschaften, sondern besitzen ebenfalls ein „Gedächtnis“ für die Form, d. h. sie besitzen auch Elastizität. Diese Bemerkungen unterstreichen die Aktualität der Untersuchungen auf dem Gebiet der Theorie konstitutiver Gleichungen für Materialien mit gemischten Eigenschaften bei endlichen Deformationen. Die aus der infinitesimalen Theorie gut bekannte Methode der rheologischen Modelle stellt eine der Lösungsmöglichkeiten für das gestellte Problem dar. Die Erweiterung dieser Methode auf den Fall endlicher Deformationen ist in [1] enthalten. Nachfolgend werden Vor- und Nachteile dieser Methode erörtert und ihre Verallgemeinerung vorgenommen.

2. Die Gesetze der Thermomechanik

Zunächst werden die Gesetze der Mechanik und Thermodynamik für das klassische Kontinuum materieller Punkte formuliert. Die „Dynamik-Gleichungen“ lauten

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho (\nabla \cdot \underline{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{\tau} + \rho \left(\underline{K} - \frac{d\underline{v}}{dt} \right) = 0, \quad (2.2)$$

$$\underline{\tau}^T = \underline{\tau}. \quad (2.3)$$

Hier sind ρ – die Massendichte, \underline{v} – der Geschwindigkeitsvektor, ∇ – der Nabla-Operator in der aktuellen

Konfiguration, $\underline{\tau}$ – der Spannungstensor von Cauchy und \underline{K} – der Vektor der Massenkkräfte. Durch einen Punkt wird das Skalarprodukt gekennzeichnet, mit „T“ das Transponieren eines Tensors zweiter Stufe. Die Gl. (2.1) stellt den Massenerhaltungssatz im materiellen Volumen des Kontinuums dar, die Gl. (2.2) den Impulssatz und die Gl. (2.3) den Drehimpulssatz.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik stellt die Bedingung der Energieerhaltung dar. Er läßt sich in der Form der Gl. (2.4) schreiben

$$\frac{dU}{dt} = \underline{\tau} \cdot \cdot \underline{D} + b - \nabla \cdot \underline{h}, \quad (2.4)$$

wobei U – die auf die Masse bezogene Dichte der inneren Energie des Kontinuums ist, b – die Geschwindigkeit der Wärmezufuhr direkt in das Volumen, \underline{h} – der Vektor des Wärmestroms. Durch 2 Punkte wird das Doppelskalarprodukt gekennzeichnet (s. [4]) und \underline{D} ist der Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten

$$\underline{D} = \frac{1}{2} [\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T] = (\nabla \underline{v})^S \quad (2.5)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik wird in Form der Clausius-Duhemschen Ungleichung dargestellt: die Änderungsgeschwindigkeit der inneren Entropie eines materiellen Volumens des Kontinuums ist nicht kleiner als der Entropiestrom in dieses Volumen von außen. In der lokalen Form lautet das Gesetz

$$\frac{dS}{dt} \geq \frac{1}{\Theta} (b - \nabla \cdot \underline{h}) + \frac{1}{\Theta^2} \underline{h} \cdot (\nabla \Theta), \quad (2.6)$$

wobei S – die auf die Masse bezogene Dichte der inneren Entropie und Θ – die absolute Temperatur sind.

Wenn die auf die Masse bezogene Dichte der freien Energie F in der Form

$$F = U - \Theta S \quad (2.7)$$

eingeführt wird und der Wärmestrom in der Gl. (2.6) mit Hilfe der Gl. (2.4) ausgeschlossen wird, so erhält man die sogenannte dissipative Ungleichung in der Form der Gl. (2.8)

$$\underline{\tau} \cdot \cdot \underline{D} - \rho \frac{dF}{dt} - \rho S \frac{d\Theta}{dt} - \frac{1}{\Theta} \underline{h} \cdot (\nabla \Theta) \geq 0. \quad (2.8)$$

Dieser Ausdruck des 2. Hauptsatzes ist für die hier gegebenen Untersuchungen günstiger als die Ungleichung (2.6).

Der Interpretation des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik wird hier mehr Platz eingeräumt als der Interpretation der anderen Gesetze. Dies ist damit verbunden, daß in der Literatur ca. 30 verschiedene Formulierungsvarianten für den 2. Hauptsatz bei unterschiedlichem Niveau der Allgemeingültigkeit existieren. Zweifelsohne

stellt die Clausius-Duhemsche Ungleichung die vollständigste Formulierung für Probleme der Thermodynamik dar. Die hier dargestellte Form entspricht [2], [3].

3. Elemente der Theorie der konstitutiven Gleichungen

Die bisher formulierten Gesetze stellen Naturgesetze dar. Sie müssen für alle realen Materialien (ohne Ausnahmen) erfüllt sein. Ungeachtet dessen ist das Verhalten solcher Stoffe, wie Wasser, Metalle, Gummi, Beton usw. recht verschieden. Diese Unterschiede werden in den sogenannten konstitutiven Gleichungen für das Material formuliert. Dabei werden die Reaktionen des Materials auf Zustandsänderungen und Änderungen der äußeren Bedingungen widerspiegelt. In der Thermodynamik des Kontinuums werden die äußeren Bedingungen in der Umgebung eines materiellen Punktes durch das Temperaturfeld und die gegenseitige Lage der benachbarten Teilchen zueinander definiert. Letztere wird durch das Bewegungsgesetz des Kontinuums beschrieben

$$\underline{R} = \underline{R}(\underline{r}, t), \quad (3.1)$$

wobei \underline{r} – die Anfangslage eines typischen materiellen Punktes, \underline{R} – die Lage dieses Punktes zum Zeitpunkt t ist (vgl. Bild 1).

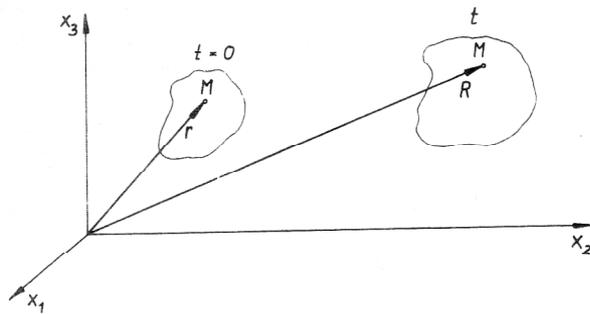


Bild 1
Ausgangslage und aktuelle Lage des materiellen Punktes M

Die reziproke Beziehung zu den Gln. (3.1) lautet

$$\underline{r} = \underline{r}(\underline{R}, t). \quad (3.2)$$

Die äußeren Bedingungen wirken auf den thermodynamischen Zustand der Umgebung jedes materiellen Punktes des Kontinuums. Es wird vorausgesetzt, daß dieser durch die Temperatur, den Gradienten der Temperatur $\underline{\Gamma} = \underline{\nabla} \Theta$, das Deformationsmaß von Almansi

$$\underline{g} = (\underline{\nabla} \underline{r}) \cdot (\underline{\nabla} \underline{r})^T \quad (3.3)$$

und den Tensor der Verdrehungen \underline{B} definiert wird. Dabei sei \underline{B} durch folgende Cauchy'sche Aufgabe gegeben

$$\frac{d\underline{B}}{dt} = -\underline{\Omega} \cdot \underline{B}, \quad \underline{B}(\underline{r}, 0) = \underline{E}, \quad (3.4)$$

wobei $\underline{\Omega}$ – der Tensor des Wirbelfeldes ist

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \underline{v} - (\underline{\nabla} \underline{v})^T] = (\underline{\nabla} \underline{v})^A. \quad (3.5)$$

\underline{E} ist der Einheitstensor.

Der Tensor \underline{B} beschreibt die Rotation der Umgebung des materiellen Punktes mit der Winkelgeschwindigkeit des Kontinuums

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\nabla} \times \underline{v}, \quad \underline{\Omega} = -\underline{E} \times \underline{\omega} = -\underline{\omega} \times \underline{E}, \quad (3.6)$$

Durch unmittelbares Differenzieren der Beziehung (3.3) läßt sich die materielle Ableitung von \underline{g} finden

$$\frac{d\underline{g}}{dt} = -(\underline{D} + \underline{\Omega}) \cdot \underline{g} - \underline{g} \cdot (\underline{D} - \underline{\Omega}). \quad (3.7)$$

Die eingeführten Parameter $\Theta, \underline{\Gamma}, \underline{g}$ und \underline{B} werden konstitutive Parameter genannt.

Als thermodynamischen Prozeß in einem materiellen Punkt M mit der Anfangskoordinate \underline{r} wird die Geschichte der Änderungen der konstitutiven Parameter mit der Zeit für diesen materiellen Punkt genannt. Diese Geschichte wird durch folgende Funktionale der Zeit definiert

$$\begin{aligned} \Theta^\tau &= \Theta(\underline{r}, \tau), \\ \underline{\Gamma}^\tau &= \underline{\Gamma}(\underline{r}, \tau), \\ \underline{g}^\tau &= \underline{g}(\underline{r}, \tau), \\ \underline{B}^\tau &= \underline{B}(\underline{r}, \tau). \end{aligned} \quad 0 \leq \tau \leq t$$

Es wird davon ausgegangen, daß das thermodynamische Verhalten der Umgebung des materiellen Punktes zum Zeitpunkt t vollständig durch den thermodynamischen Prozeß in der Umgebung des Punktes während der gesamten vorhergehenden Zeit definiert ist. Das heißt, daß der Spannungstensor $\underline{\tau}$, der Vektor des Wärmestroms \underline{h} , die Dichte der freien Energie F und die Dichte der inneren Entropie S vom gesamten thermodynamischen Prozeß abhängen und somit Funktionale des thermodynamischen Prozesses sind:

$$\begin{aligned} \underline{\tau}(\underline{r}, t) &= \underline{\tau} \left\{ \Theta^\tau, \underline{\Gamma}^\tau, \underline{g}^\tau, \underline{B}^\tau \mid \underline{r} \right\}, \\ \underline{h}(\underline{r}, t) &= \underline{h} \left\{ \Theta^\tau, \underline{\Gamma}^\tau, \underline{g}^\tau, \underline{B}^\tau \mid \underline{r} \right\}, \\ F(\underline{r}, t) &= F \left\{ \Theta^\tau, \underline{\Gamma}^\tau, \underline{g}^\tau, \underline{B}^\tau \mid \underline{r} \right\}, \\ S(\underline{r}, t) &= S \left\{ \Theta^\tau, \underline{\Gamma}^\tau, \underline{g}^\tau, \underline{B}^\tau \mid \underline{r} \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Beziehungen (3.8) werden konstitutive Gln. des Materials genannt. Ihre Angabe ist gleichbedeutend mit der Definition des Materials. Die verschiedenen Materialien werden durch verschiedene konstitutive Gln., d. h. konkret durch verschiedene Formen der Funktionale (3.8), unterschieden.

Es entsteht natürlich hier die Frage nach der Ermittlung der Funktionale (3.8) aus entsprechenden experimentellen Daten für ein konkretes Material. Wenn es gelänge, diese Frage allgemein zu lösen, so würden die ermittelten Funktionale die dissipative Ungleichung erfüllen, da damit „die Natur den Naturgesetzen entsprechen würde.“ Somit würde der nachfolgende Inhalt des Artikels gegenstandslos werden. Leider kann diese Frage nicht allgemein gelöst werden. Daher wird in der Mechanik wie folgt vorgegangen. Es wird zunächst eine bestimmte Anzahl von konstitutiven Gleichungen für Materialien mit einfachen („reinen“) oder komplexen („zusammen-

gesetzten") Eigenschaften postuliert. Dabei wird die Form der Funktionale konkret ermittelt. Die Untersuchung der Eigenschaften jedes idealen Materials, gestattet dann die Auswahl eines solchen Materials, welches am besten dem Verhalten des erwähnten konkreten Materials entspricht. Damit vereinfacht sich die formulierte Problemstellung der Identifikation des Materials wesentlich: es genügt solche Parameter und Funktionen zu ermitteln, die in die konstitutiven Gleichungen der ausgewählten idealen Materialien eingehen. Dieses Problem kann gelöst werden. Auf die überaus interessanten Einzelheiten der Problemlösung soll hier nicht eingegangen werden. An dieser Stelle wird zur Betrachtung der Methode der rheologischen Modelle übergegangen. Diese stellt eine Möglichkeit zur „Konstruktion“ konstitutiver Gleichungen konkreter Materialien dar, wobei sofort der dissipativen Ungleichung genügt wird.

In den Funktionalen (3.8) steht nach dem vertikalen Strich das Argument \underline{r} , welches für jeden materiellen Punkt konstant ist. Seine Einbeziehung in die Funktionale (3.8) gestattet die Betrachtung inhomogener Körper. Im weiteren werden nur homogene Körper betrachtet, so daß \underline{r} nicht explizit in die Funktionale (3.8) eingeht.

Die Menge der Funktionale (3.8) ist nicht völlig frei wählbar. Es muß immer überprüft werden, ob die dissipative Ungleichung (2.8) für sich beliebig ändernde konstitutive Parameter erfüllt ist.

4. Konstitutive Gleichungen für Materialien mit elastischen Volumendeformationen

Bekanntlich verhalten sich Materialien bei Volumenänderungen wesentlich anders als bei Formänderungen. Daher ist es günstig, aus dem Tensor \underline{g} die Volumendeformation herauszulösen. Letztere wird durch den Wert der Dichte des Kontinuums definiert, welche den Ausdruck [4]

$$\rho = \rho_0 \sqrt{|\underline{g}|}$$

annimmt. Dabei ist ρ_0 die Anfangsdichte.

Die Änderung der Form bei Deformationen wird durch den Formänderungstensor gekennzeichnet

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-\frac{2}{3}} \underline{g}. \quad (4.2)$$

Die folgenden Gln. (4.3) und (4.4) kann man leicht überprüfen, so daß auf die Ableitungen verzichtet wird.

$$|\underline{\underline{\Lambda}}| = 1, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\underline{\underline{\Lambda}}}{dt} = -(\underline{d} + \underline{\underline{\Omega}}) \cdot \underline{\underline{\Lambda}} - \underline{\underline{\Lambda}} \cdot (\underline{d} - \underline{\underline{\Omega}}), \quad \underline{d} = \text{Dev } \underline{D}. \quad (4.4)$$

In der Literatur [5] kann man den Hinweis finden, daß die meisten natürlichen und synthetischen Materialien sich bei Volumendeformationen elastisch verhalten. Dagegen kann man bei Formänderungen verschiedenes Materialverhalten beobachten. Um diese Eigenschaft in die Struktur der konstitutiven Gleichungen aufzunehmen, werden diese wie folgt aufgeschrieben [1]

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{E}} \sigma \left(\frac{\rho_0}{\rho}, \Theta\right) + \underline{\underline{S}} \left\{ \Theta^\tau, \rho^\tau, \underline{\underline{\Lambda}}^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \right\},$$

$$\underline{h} = -\kappa \underline{\Gamma}, \quad \kappa = \kappa(\rho, \Theta, |\underline{\Gamma}|), \quad (4.5)$$

$$\underline{F} = \underline{F}_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}, \Theta\right) + \underline{F}_x \left\{ \Theta^\tau, \rho^\tau, \underline{\underline{\Lambda}}^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \right\},$$

$$\underline{S} = \underline{S}_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho}, \Theta\right) + \underline{S}_x \left\{ \Theta^\tau, \rho^\tau, \underline{\underline{\Lambda}}^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \right\}.$$

Hier bestimmen die ersten Summanden das Materialverhalten bei Volumenänderung. Das sind Funktionen der in den runden Klammern eingeschlossenen Argumente. Die zweiten Summanden bestimmen das Verhalten bei Formänderungen: diese bleiben Funktionale. Dabei wird angenommen, daß die Wärmeleitung durch das bekannte Fouriersche Gesetz beschrieben wird.

Die Eindeutigkeit der Aufspaltung der konstitutiven Gln. (3.8) in 2 Summanden in der Form (4.5) wird dadurch erreicht, daß von folgenden Annahmen ausgegangen wird: $\underline{\underline{S}}$ sei der Spannungsdeviator und bei fehlender Formänderung

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{E}} \quad (4.6)$$

verschwinden die zweiten Summanden in den Ausdrücken für \underline{F} und \underline{S}

$$\underline{F}_x \left\{ \Theta^\tau, \rho^\tau, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{B}}^\tau \right\} = 0, \quad \underline{S}_x \left\{ \Theta^\tau, \rho^\tau, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{B}}^\tau \right\} = 0. \quad (4.7)$$

Jetzt kann man ableiten, welche Einschränkungen sich für die Funktionale und Funktionen in (4.5) aus der dissipativen Ungleichung ergeben. Nach Einsetzen von (4.5) in (2.8) unter Beachtung von (2.1) erhält man

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\sigma}{\rho_0} - \frac{\partial F_0}{\partial \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)} \right] \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) - \rho \left(S_0 + \frac{\partial F_0}{\partial \Theta} \right) \frac{d\Theta}{dt} + \frac{\kappa}{\Theta} \Gamma^2 \\ + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{d}} - \rho \frac{dF_x}{dt} - \rho S_x \frac{d\Theta}{dt} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Welche notwendigen Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Ungleichung (4.8) erfüllt ist? Zunächst wird der Prozeß (4.6) betrachtet. Unter Beachtung von (4.4) erhält man $\underline{d} = 0$. Weiterhin gilt (4.7) und folglich wird die zweite Zeile in (4.8) zu Null. In der ersten Zeile steht eine lineare Funktion der materiellen Geschwindigkeiten von ρ und Θ . Die notwendigen Bedingungen für die positive Definitheit sind dann

$$\sigma = \rho_0 \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)}, \quad S_0 = -\frac{\partial F_0}{\partial \Theta}, \quad \kappa \geq 0. \quad (4.9)$$

Wenn die Einschränkung (4.6) wegfällt und $\underline{\Gamma} = 0$ gesetzt wird, kommt man mit Hilfe von (4.9) zur dissipativen Ungleichung für den Formänderungsprozeß

$$\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{d}} - \rho S_x \frac{d\Theta}{dt} \geq 0 \quad (4.10)$$

Damit werden die Bedingungen (4.9) und (4.10) zu notwendigen Bedingungen für die Erfüllung der Ungleichung (4.8). Man kann sich unmittelbar überzeugen, daß diese Bedingungen gleichzeitig hinreichend sind.

5. Die Kombination von konstitutiven Gleichungen

Es wird jetzt die Frage über die Formulierung neuer konstitutiver Gleichungen betrachtet. Es sei eine Reihe von konstitutiven Gleichungen für Formänderungsprozesse bekannt

$$\begin{aligned} \underline{S}_\alpha &= \underline{S}_\alpha \left\{ \Theta^T, \rho^T, \underline{\Lambda}_\alpha^T, \underline{B}^T \right\}, \\ \underline{F}_{x\alpha} &= \underline{F}_{x\alpha} \left\{ \Theta^T, \rho^T, \underline{\Lambda}_\alpha^T, \underline{B}^T \right\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (5.1) \\ \underline{S}_{x\alpha} &= \underline{S}_{x\alpha} \left\{ \Theta^T, \rho^T, \underline{\Lambda}_\alpha^T, \underline{B}^T \right\}. \end{aligned}$$

Die Erfüllung der Gln. (4.4) wird vorausgesetzt:

$$\frac{d\underline{\Lambda}_\alpha}{dt} = -(\underline{d}_\alpha + \underline{\Omega}) \cdot \underline{\Lambda}_\alpha - \underline{\Lambda}_\alpha \cdot (\underline{d}_\alpha - \underline{\Omega}). \quad (5.2)$$

Weiterhin wird vorausgesetzt, daß jede der konstitutiven Gln. (5.1) die dissipative Ungleichung (4.10) erfüllt:

$$\underline{S}_\alpha \cdot \underline{d}_\alpha - \rho \frac{d\underline{F}_{x\alpha}}{dt} - \rho \underline{S}_{x\alpha} \frac{d\Theta}{dt} \geq 0. \quad (5.3)$$

Für jede konstitutive Gl. (5.1) gibt es ein entsprechendes Modell (Bild 2 a). Wichtigstes Prinzip für das Aufstellen neuer Gleichungen in der Rheologie [5] sind die Parallel- und Reihenschaltungen rheologischer Modelle.

1. Es wird angenommen, daß bei Parallelschaltung (Bild 2 b) folgende Beziehungen Gültigkeit besitzen:

$$\begin{aligned} \underline{d} &= \underline{d}_\alpha = \underline{d}_\beta, \quad \underline{F}_x = \underline{F}_{x\alpha} + \underline{F}_{x\beta}, \\ \underline{S} &= \underline{S}_\alpha + \underline{S}_\beta, \quad \underline{S}_x = \underline{S}_{x\alpha} + \underline{S}_{x\beta}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

2. Für die Reihenschaltung der Modelle (Bild 2 c) werden folgende Gleichungen vorausgesetzt:

$$\begin{aligned} \underline{d} &= \underline{d}_\alpha + \underline{d}_\beta, \quad \underline{F}_x = \underline{F}_{x\alpha} = \underline{F}_{x\beta}, \\ \underline{S} &= \underline{S}_\alpha = \underline{S}_\beta, \quad \underline{S}_x = \underline{S}_{x\alpha} + \underline{S}_{x\beta}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

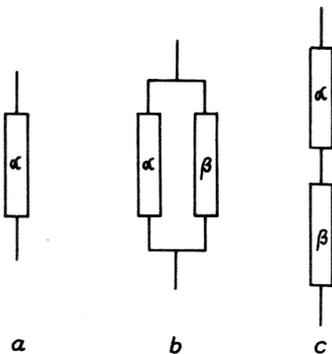


Bild 2
Verbindungsmöglichkeiten von Elementen in der Rheologie

Die Bedingungen (5.4) und (5.5) im Zusammenhang mit (5.1) bilden ein System von Operatorgleichungen, aus denen man einen Operatorzusammenhang zwischen den Größen \underline{S} , \underline{F}_x , \underline{S}_x und den Θ , ρ , $\underline{\Lambda}$, \underline{B} ermitteln kann. Dieser Zusam-

menhang stellt eine neue konstitutive Gleichung dar. Man kann leicht überprüfen, daß die dissipative Ungleichung (4.10) erfüllt ist. Dazu genügt es, (5.4) oder (5.5) in (4.10) unter Beachtung von (5.3) einzusetzen.

Unter Verwendung der Parallel- und Reihenschaltung rheologischer Modelle kann man somit neue rheologische Modelle erhalten. Ungeachtet der Kompliziertheit solcher Modelle kann man sicher sein, daß die ihnen entsprechenden konstitutiven Gln. der dissipativen Ungleichung genügen.

Abschließend muß noch die Anfangsmenge der Modelle, die man zur Kombination verwenden kann, beschrieben werden. In der infinitesimalen Rheologie gehen in diese Menge nur Modelle ein, die über die grundlegenden rheologischen Eigenschaften verfügen: Elastizität, Viskosität, Plastizität [5]. In dieser Arbeit wird nur isotropes Material betrachtet.

1. Elastisches Material: Es wird postuliert, daß die freie Energie und die innere Entropie Funktionen (und nicht Operatoren) der Temperatur und der Invarianzformen des Tensor $\underline{\Lambda}$ sind [Gl. (5.6)] und der Spannungsdeviator \underline{S} eine Funktion der Temperatur, der Dichte und des Formänderungstensors ist [Gl. (5.7)]

$$I_1 = \underline{E} \cdot \underline{\Lambda}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \underline{\Lambda} \cdot \underline{\Lambda}, \quad I_3 = 1, \quad (5.6)$$

$$\underline{S} = \underline{S}(\Theta, \rho, \underline{\Lambda}), \quad \underline{F}_x = \underline{F}_x(\Theta, I_1, I_2), \quad \underline{S}_x = \underline{S}_x(\Theta, I_1, I_2). \quad (5.7)$$

Nach dem Einsetzen dieser Ausdrücke in (4.10) erhält man unter Beachtung von (4.4)

$$\left[\underline{S} + 2\rho \text{Dev} \left(\frac{\partial \underline{F}_x}{\partial I_1} \underline{\Lambda} + \frac{\partial \underline{F}_x}{\partial I_2} \underline{\Lambda}^2 \right) \right] \cdot \underline{d} - \left(\underline{S}_x + \frac{\partial \underline{F}_x}{\partial \Theta} \right) \frac{d\Theta}{dt} \geq 0.$$

Im linken Teil der Ungleichung steht eine lineare Funktion von \underline{d} und $\frac{d\Theta}{dt}$. Die Argumente \underline{d} und $\frac{d\Theta}{dt}$ stellen frei wählbare Funktionen dar. Für die Erfüllung der Ungleichung ist es daher hinreichend und notwendig, daß die Koeffizienten bei \underline{d} und $\frac{d\Theta}{dt}$ verschwinden. Daraus erhält man

$$\underline{S} = -2\rho \text{Dev} \left(\frac{\partial \underline{F}_x}{\partial I_1} \underline{\Lambda} + \frac{\partial \underline{F}_x}{\partial I_2} \underline{\Lambda}^2 \right), \quad (5.8)$$

$$\underline{S}_x = -\frac{\partial \underline{F}_x}{\partial \Theta}, \quad \underline{F}_x = \underline{F}_x(\Theta, I_1, I_2).$$

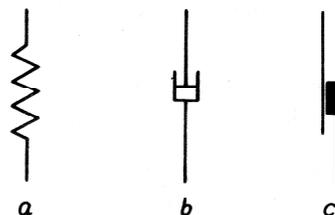


Bild 3
Klassische rheologische Modelle

Dies ist die Struktur der konstitutiven Gln. des isotropen elastischen Materials. Das ihr entsprechende rheologische Modell ist auf Bild 3 a als Federelement dargestellt.

2. Viskoses Material: Jetzt wird postuliert, daß der Spannungsdeviator eine isotrope Tensorfunktion des Tensors der mit der Formänderung verbundenen Deformationsgeschwindigkeiten ist

$$\underline{\underline{S}} = 2 \text{Dev} (\eta \underline{\underline{d}} + \varphi \underline{\underline{d}}^2). \quad (5.9)$$

Die skalaren Koeffizienten η und φ können von den Invarianzformen des Tensors $\underline{\underline{d}}$, der Temperatur und der Dichte abhängen.

Das Einsetzen von (5.9) in (4.10) führt auf die Ungleichung

$$\eta \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{d}} + \varphi \underline{\underline{d}}^2 \cdot \underline{\underline{d}} \geq 0. \quad (5.10)$$

Direkte Einschränkungen lassen sich ohne Angaben über η und φ nicht ableiten. Wenn $\varphi = 0$ ist, so wird (5.9) zur Newtonschen-Gl.

$$\underline{\underline{S}} = 2 \eta \underline{\underline{d}}, \quad \eta \geq 0$$

und die dissipative Ungleichung führt auf die Forderung der positiven Definitheit des Viskositätskoeffizienten η . Das rheologische Modell ist auf Bild 3 b als Dämpfungselement dargestellt.

3. Ideal-plastisches Material: Es wird postuliert, daß bei fehlenden Verformungen der Spannungsdeviator beliebig sein kann, jedoch seine Norm einen Grenzwert nicht überschreiten darf. Wird dieser Grenzwert erreicht, treten Verformungen auf und das Material verhält sich wie ein viskoses Material mit einer konstitutiven Gleichung in der Form (5.9). Diese Aussage kann folgendermaßen formuliert werden

$$\begin{aligned} \underline{\underline{d}} = 0 & \quad N(\underline{\underline{S}}) \leq K, \\ \underline{\underline{d}} \neq 0 & \quad N(\underline{\underline{S}}) = K, \quad \underline{\underline{S}} = \frac{K}{N(\underline{\underline{f}})} \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{d}}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

mit

$$\underline{\underline{f}}(\underline{\underline{d}}) = 2 \text{Dev} (\psi \underline{\underline{d}} + \chi \underline{\underline{d}}^2). \quad (5.12)$$

Die dissipative Ungleichung legt folgende Einschränkungen auf die Funktion $\underline{\underline{f}}(\underline{\underline{d}})$

$$\psi \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{d}} + \chi \underline{\underline{d}}^2 \cdot \underline{\underline{d}} \geq 0. \quad (5.13)$$

Das rheologische Modell ist auf Bild 3 c zu sehen.

Folgender Satz hat Gültigkeit: Die konstitutiven Gleichungen, die entsprechend den rheologischen Modellen gebildet wurden, definieren ein isotropes Material.

Eine größere Anzahl konkreter rheologischer Modelle und ihnen entsprechender konstitutiver Gln. kann man in [1], [6], [7], [8] finden.

6. Verallgemeinerung der Methode der rheologischen Modelle

Die Methode der rheologischen Modelle wurde bisher nur für den Sonderfall elastischer Volumendeformationen und normaler Wärmeleitprozesse, die durch das Fouriersche Gesetz beschrieben werden, formuliert. Dies ist ein praktisch besonders wichtiger Fall. Ungeachtet

dieser Tatsache treten einige Unzulänglichkeiten auf und somit taucht die Frage nach der Abschwächung der getroffenen Einschränkungen auf, um damit eine Verallgemeinerung der Methode der rheologischen Modelle zu finden.

Bezieht man den Spannungstensor und den Wärmestromvektor auf das Deformationsmaß von Almansi in der Form

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{\sqrt{|\underline{\underline{g}}|}} \underline{\underline{\tau}}, \quad \underline{\underline{H}} = \frac{1}{\sqrt{|\underline{\underline{g}}|}} \underline{\underline{h}}, \quad (6.1)$$

ergeben sich folgende verallgemeinerte konstitutive Gln. (3.8)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{r}}, t) &= \underline{\underline{T}} \{ \Theta^\tau, \underline{\underline{\Gamma}}^\tau, \underline{\underline{g}}^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \} \\ \underline{\underline{H}}(\underline{\underline{r}}, t) &= \underline{\underline{H}} \{ \Theta^\tau, \underline{\underline{\Gamma}}^\tau, \underline{\underline{g}}^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \} \\ \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{r}}, t) &= \underline{\underline{F}} \{ \Theta^\tau, \underline{\underline{\Gamma}}^\tau, \underline{\underline{g}}^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \} \\ \underline{\underline{S}}(\underline{\underline{r}}, t) &= \underline{\underline{S}} \{ \Theta^\tau, \underline{\underline{\Gamma}}^\tau, \underline{\underline{g}}^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die dissipative Ungleichung ergibt sich unter Beachtung von Gl. (4.1) mit

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} - \rho_0 \frac{d\underline{\underline{F}}}{dt} - \rho_0 \underline{\underline{S}} \frac{d\Theta}{dt} - \frac{1}{\Theta} \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\Gamma}} \geq 0. \quad (6.3)$$

Zunächst wird, wie bereits im Abschnitt 5., die Frage der Formulierung neuer konstitutiver Gln. durch Kombination von Ausgangsgln. betrachtet. Folgende Auswahl konstitutiver Gleichungen sei gegeben

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}_\alpha &= \underline{\underline{T}}_\alpha \{ \Theta^\tau, \underline{\underline{\Gamma}}_\alpha^\tau, \underline{\underline{g}}_\alpha^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \} \\ \underline{\underline{H}}_\alpha &= \underline{\underline{H}}_\alpha \{ \Theta^\tau, \underline{\underline{\Gamma}}_\alpha^\tau, \underline{\underline{g}}_\alpha^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \} \\ \underline{\underline{F}}_\alpha &= \underline{\underline{F}}_\alpha \{ \Theta^\tau, \underline{\underline{\Gamma}}_\alpha^\tau, \underline{\underline{g}}_\alpha^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \} \\ \underline{\underline{S}}_\alpha &= \underline{\underline{S}}_\alpha \{ \Theta^\tau, \underline{\underline{\Gamma}}_\alpha^\tau, \underline{\underline{g}}_\alpha^\tau, \underline{\underline{B}}^\tau \} \end{aligned} \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (6.4)$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Gln. des Typs (3.7) erfüllt sind

$$\frac{d\underline{\underline{g}}_\alpha}{dt} = -(\underline{\underline{D}}_\alpha + \underline{\underline{\Omega}}) \cdot \underline{\underline{g}}_\alpha - \underline{\underline{g}} \cdot (\underline{\underline{D}}_\alpha - \underline{\underline{\Omega}}). \quad (6.5)$$

Außerdem wird vorausgesetzt, daß für jede der konstitutiven Gln. (6.4) die dissipative Ungleichung (6.3) erfüllt ist

$$\underline{\underline{T}}_\alpha \cdot \underline{\underline{D}}_\alpha - \rho_0 \frac{d\underline{\underline{F}}_\alpha}{dt} - \rho_0 \underline{\underline{S}}_\alpha \frac{d\Theta}{dt} - \frac{1}{\Theta} \underline{\underline{H}}_\alpha \cdot \underline{\underline{\Gamma}}_\alpha \geq 0. \quad (6.6)$$

Jeder der Gln. (6.4) wird, wie bereits früher, ein rheologisches Modell gegenübergestellt. Als Prinzip der Formulierung neuer konstitutiver Gln. sind wieder die Parallel- und Reihenschaltung der Ausgangselemente. Es ist jedoch zu beachten, daß man jetzt sowohl mit den Spannungstensor als auch mit dem Wärmestromvektor operieren muß. Damit verdoppelt sich die Anzahl der Schaltungsvarianten. Folgende Fälle können dabei auftreten

a) Parallel-Parallelschaltung. Dabei sollen folgende Beziehungen gelten

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_\alpha = \underline{\underline{D}}_\beta, \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\Gamma}}_\alpha = \underline{\underline{\Gamma}}_\beta, F = F_\alpha + F_\beta, \quad (6.7)$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_\alpha + \underline{\underline{T}}_\beta, \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}_\alpha + \underline{\underline{H}}_\beta, S = S_\alpha + S_\beta.$$

Diese Schaltungsvariante ist auf Bild 4 a zu sehen.

b) Parallel-Reihenschaltung (Bild 4 b). Dabei gilt

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_\alpha = \underline{\underline{D}}_\beta, \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\Gamma}}_\alpha + \underline{\underline{\Gamma}}_\beta, F = F_\alpha + F_\beta, \quad (6.8)$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_\alpha + \underline{\underline{T}}_\beta, \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}_\alpha = \underline{\underline{H}}_\beta, S = S_\alpha + S_\beta.$$

Hier ändert sich im Vergleich zum 1. Fall nur die 2. Spalte.

c) Reihen-Reihenschaltung. Dabei gilt

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_\alpha + \underline{\underline{D}}_\beta, \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\Gamma}}_\alpha + \underline{\underline{\Gamma}}_\beta, F = F_\alpha + F_\beta, \quad (6.9)$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_\alpha = \underline{\underline{T}}_\beta, \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}_\alpha = \underline{\underline{H}}_\beta, S = S_\alpha + S_\beta.$$

Wie im 1. Fall sind die 1. und die 2. Spalte ähnlich aufgebaut. Daher werden die Elemente durch eine dicke Linie verbunden (Bild 4 c), wie dies auch im 1. Fall geschah.

d) Reihen-Parallelschaltung (Bild 4 d). Dabei gilt

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_\alpha + \underline{\underline{D}}_\beta, \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\Gamma}}_\alpha = \underline{\underline{\Gamma}}_\beta, F = F_\alpha + F_\beta, \quad (6.10)$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_\alpha = \underline{\underline{T}}_\beta, \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}_\alpha + \underline{\underline{H}}_\beta, S = S_\alpha + S_\beta.$$

Hier ist analog zum 2. Fall die 1. und die 2. Spalte unterschiedlich. Daher werden wie im 2. Fall dünne Linien als Verbindungen zwischen den Elementen genommen.

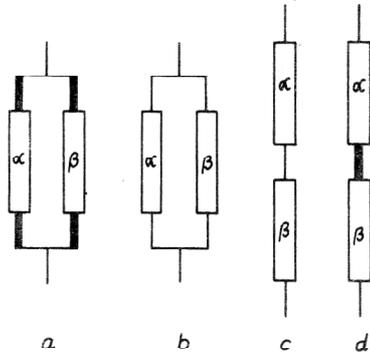


Bild 4

Verallgemeinerte Verbindungsmöglichkeiten von Elementen in der Rheologie

Wenn man (6.7), (6.8), (6.9) oder (6.10) in (6.3) unter Beachtung von (6.6) einsetzt, so kann man sich davon überzeugen, daß in allen Fällen die dissipative Ungleichung erfüllt ist. Wenn man in den Kombinationsmechanismus bereits ermittelte Modelle einbaut, so kann man zu sehr komplizierten Modellen kommen. Die dissipative Ungleichung ist dabei immer erfüllt.

Schwieriger ist es, folgenden Satz zu beweisen: Wenn die konstitutiven Gln. (6.5), von denen ausgegangen wird, einem isotropen Material entsprechen, so werden auch die Materialgesetze, die mit einem beliebig komplizierten rheologischen Modell gefunden wurden, isotrop sein [1].

Im weiteren werden nur isotrope Materialien betrachtet.

7. Verallgemeinerte konstitutive Gleichungen für Materialien mit grundlegenden rheologischen Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden einige konkrete konstitutive Gleichungen betrachtet. Diese lassen sich dann bei der Formulierung konstitutiver Gleichungen für komplizierte rheologische Modelle verwenden.

1. Thermoelastisches Material: Es wird folgende verallgemeinerte, von Coleman und Noll [2] entwickelte Vorstellung über das klassische elastische Material betrachtet. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Reaktion des thermoelastischen Materials zum Zeitpunkt t nur von den Werten der konstitutiven Parameter im Zeitpunkt t abhängt. Ohne Beweis wird angenommen, daß in den konstitutiven Gln. des thermoelastischen Materials der Tensor der Drchungen nicht eingeht. Somit gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}(\Theta, \underline{\underline{\Gamma}}, \underline{\underline{g}}) \\ \underline{\underline{H}} &= \underline{\underline{H}}(\Theta, \underline{\underline{\Gamma}}, \underline{\underline{g}}) \\ F &= F(\Theta, \underline{\underline{\Gamma}}, \underline{\underline{g}}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$S = S(\Theta, \underline{\underline{\Gamma}}, \underline{\underline{g}}),$$

wobei im rechten Teil von (7.1) Funktionen der konstitutiven Parameter stehen. Nach Einsetzen von (7.1) in die dissipative Ungleichung (6.3) erhält man unter Beachtung von (6.6)

$$[\underline{\underline{T}} + 2\rho_0 (\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{g}}} \cdot \underline{\underline{g}})^S] \cdot \underline{\underline{D}} - 2\rho_0 (\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{g}}} \cdot \underline{\underline{g}})^A \cdot \underline{\underline{\Omega}} \quad (7.2)$$

$$- \rho_0 \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\Gamma}}} \cdot \frac{d\underline{\underline{\Gamma}}}{dt} - \rho_0 (S + \frac{\partial F}{\partial \Theta}) \frac{d\Theta}{dt} - \frac{1}{\Theta} \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\Gamma}} \geq 0.$$

Aufgrund der Linearität des linken Teils der Ungleichung (7.2) bezüglich $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{\Omega}}$, $\frac{d\underline{\underline{\Gamma}}}{dt}$, $\frac{d\Theta}{dt}$ erhält man folgende notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung von (7.2)

$$\underline{\underline{T}} = -2\rho_0 (\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{g}}} \cdot \underline{\underline{g}})^S, (\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{g}}} \cdot \underline{\underline{g}})^A = 0, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\Gamma}}} = 0, S = -\frac{\partial F}{\partial \Theta}, \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\Gamma}} \leq 0. \quad (7.4)$$

Aus der ersten Beziehung (7.4) folgt, daß F nur von der Temperatur und $\underline{\underline{g}}$ abhängt. Aufgrund der Isotropie des Materials gehen folglich nur die Temperatur und die Hauptinvarianten des Deformationsmaßes $\underline{\underline{g}}$

$$F = F(\Theta, I, II, III) \quad (7.5)$$

mit

$$I = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{g}}, II = \frac{1}{2} (\underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{g}} - I^2), III = |\underline{\underline{g}}|$$

ein.

Folgende Differentiationsregeln haben Gültigkeit [4]

$$\frac{\partial I}{\partial \underline{\underline{g}}} = \underline{\underline{E}}, \frac{\partial II}{\partial \underline{\underline{g}}} = \underline{\underline{g}} - \underline{\underline{E}} I, \frac{\partial III}{\partial \underline{\underline{g}}} = III \underline{\underline{g}}^{-1}. \quad (7.6)$$

Wenn diese Beziehungen beim Einsetzen von (7.5) in (7.3) Beachtung finden, so kann man feststellen, daß die zweite der Gln. (7.3) identisch erfüllt wird und die übrige

gen Beziehungen (7.3) und (7.4) zu folgendem Ergebnis führen

$$\underline{T} = -2\rho_0 \left[\frac{\partial F}{\partial III} III \underline{E} + \left(\frac{\partial F}{\partial I} - I \frac{\partial F}{\partial II} \right) \underline{g} + \frac{\partial F}{\partial III} \underline{g}^2 \right] \quad (7.7)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \Theta} = S(\Theta, I, II, III) \quad (7.8)$$

$$\underline{H} \cdot \underline{\Gamma} \leq 0. \quad (7.9)$$

Welche Struktur besitzt \underline{H} ? Für isotropes Material ist dies eine isotrope Vektorfunktion der Tensoren $\underline{\Gamma}$ und \underline{g} . Sie besitzt folgende Form

$$\underline{H} = -(k_0 \underline{E} + k_1 \underline{g} + k_2 \underline{g}^2) \cdot \underline{\Gamma}.$$

Dabei sind k_0, k_1, k_2 im allgemeinen Fall Funktionen der Temperatur, der Invarianten von \underline{g} und $\underline{\Gamma}$ sowie der invarianten Formen $\underline{\Gamma} \cdot \underline{g} \cdot \underline{\Gamma}$ und $\underline{\Gamma} \cdot \underline{g}^2 \cdot \underline{\Gamma}$.

Die Bedingung (7.9) schränkt den Wertebereich der Koeffizienten k_i ein

$$\underline{\Gamma} \cdot (k_0 \underline{E} + k_1 \underline{g} + k_2 \underline{g}^2) \cdot \underline{\Gamma} \geq 0. \quad (7.11)$$

Hinreichende Bedingung für die Erfüllung von (7.11) ist

$$k_0 \geq 0, k_1 \geq 0, k_2 \geq 0. \quad (7.12)$$

Damit erhält man die konstitutiven Gleichungen für das isotrope thermoelastische Material in der Form der Gln. (7.4), (7.7), (7.8), (7.10). Diesen Gleichungen kann das rheologische Modell 3 a – das Federelement – gegenübergestellt werden.

2. Viskoses Material: Es wird davon ausgegangen, daß die Reaktionen des Materials zum Zeitpunkt nur von den Werten $\Theta, \underline{\Gamma}, \underline{D}$ zu diesem Zeitpunkt abhängen

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \underline{T}(\Theta, \underline{\Gamma}, \underline{D}) \\ \underline{H} &= \underline{H}(\Theta, \underline{\Gamma}, \underline{D}) \\ F &= F(\Theta, \underline{\Gamma}, \underline{D}) \\ S &= S(\Theta, \underline{\Gamma}, \underline{D}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Nach Einsetzen von (7.13) in die dissipative Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} \underline{T} \cdot \underline{D} - \rho_0 \left(S + \frac{\partial F}{\partial \Theta} \right) \frac{d\Theta}{dt} - \rho_0 \frac{\partial F}{\partial \underline{\Gamma}} \cdot \frac{d\underline{\Gamma}}{dt} \\ - \rho_0 \frac{\partial F}{\partial \underline{D}} \cdot \frac{d\underline{D}}{dt} - \frac{1}{\Theta} \underline{H} \cdot \underline{\Gamma} \geq 0. \end{aligned}$$

Die Funktionen $\frac{d\Theta}{dt}, \frac{d\underline{\Gamma}}{dt}, \frac{d\underline{D}}{dt}$ gehen in diese Beziehungen linear ein. Daher gilt

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\Gamma}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{D}} = 0, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial \Theta}, \quad (7.14)$$

$$\underline{T} \cdot \underline{D} - \frac{1}{\Theta} \underline{H} \cdot \underline{\Gamma} \geq 0. \quad (7.15)$$

Aus den Gln. (7.14) folgt

$$F = F(\Theta), \quad S = -\frac{\partial F}{\partial \Theta} = S(\Theta). \quad (7.16)$$

Welche Form haben \underline{T} und \underline{H} ? Für den hier betrachteten Fall isotropen Materials müssen diese isotrope Tensor- bzw. Vektorfunktionen der Tensor- bzw. Vektorargumente \underline{D} und $\underline{\Gamma}$ sein. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \underline{T} &= A_0 \underline{E} + A_1 \underline{D} + A_2 \underline{D}^2 + A_3 \underline{\Gamma} \underline{\Gamma} \\ &+ A_4 \underline{D} \cdot \underline{\Gamma} \underline{\Gamma} \cdot \underline{D} + A_5 \underline{D}^2 \cdot \underline{\Gamma} \underline{\Gamma} \cdot \underline{D}^2 \\ &+ [A_6 \underline{D} \cdot \underline{\Gamma} \underline{\Gamma} + \underline{D}^2 \cdot \underline{\Gamma} \underline{\Gamma} \cdot (A_7 \underline{E} + A_8 \underline{D})]^S \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\underline{H} = -(\kappa_0 \underline{E} + \kappa_1 \underline{D} + \kappa_2 \underline{D}^2) \cdot \underline{\Gamma},$$

wobei A_i, κ_i – Funktionen der Temperatur, der Invarianten von \underline{D} und $\underline{\Gamma}$ sowie der invarianten Formen $\underline{\Gamma} \cdot \underline{D} \cdot \underline{\Gamma}$ und $\underline{\Gamma} \cdot \underline{D}^2 \cdot \underline{\Gamma}$ sind. Sie müssen unbedingt die dissipative Ungleichung (7.15) erfüllen. Einschränkungen für A_i, κ_i kann man im allgemeinen Fall nicht erhalten. Das entsprechende rheologische Modell ist auf Bild 3 b zu sehen.

3. Plastisches Material: Leider kann man zum gegenwärtigen Zeitpunkt keine Verallgemeinerung auf dem hier im Abschnitt 7 betrachteten Niveau wie in den beiden vorangegangenen Fällen geben. Daher kann nur empfohlen werden, sich mit den bereits früher angegebenen konstitutiven Gln. (4.5), (5.11) zu begnügen. Das rheologische Modell ist auf Bild 3 c zu sehen.

8. Beispiele konstitutiver Gleichungen komplizierter Materialien

8.1. Viskoelastisches Material (Maxwell-Modell)

Das rheologische Modell eines solchen Materials ist auf Bild 5 angegeben. Folgende Schaltungsbedingungen gelten

$$\underline{S} = \underline{S}_1 = \underline{S}_2, \quad \underline{d}_1 = \underline{d} - \underline{d}_2, \quad F_x = F_{x_1}, \quad S_x = S_{x_1} \quad (8.1)$$

$$\frac{d\underline{\Lambda}_1}{dt} = -(\underline{d}_1 + \underline{\Omega}) \cdot \underline{\Lambda}_1 - \underline{\Lambda}_1 \cdot (\underline{d}_1 - \underline{\Omega}). \quad (8.2)$$



Bild 5
Das rheologische Modell von Maxwell

Unter Beachtung dieser Schaltungsbedingungen erhält man folgende Gln. für die Elemente

$$\underline{S} = \underline{S}_1 = -2\rho \text{Dev} \left(\frac{\partial F_x}{\partial I_{11}} \underline{\Lambda}_1 + \frac{\partial F_x}{\partial I_{21}} \underline{\Lambda}_1^2 \right), \quad (8.3)$$

$$S_x = -\frac{\partial F_x}{\partial \Theta}, \quad F_x = F_x(\Theta, I_{11}, I_{21}),$$

$$I_{11} = \underline{E} \cdot \underline{\Lambda}_1, \quad I_{21} = \frac{1}{2} \underline{\Lambda}_1 \cdot \underline{\Lambda}_1,$$

$$\underline{S} = 2 \text{Dev} (\eta \underline{d}_2 + \varphi \underline{d}_2^2). \quad (8.4)$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Gl. (8.4) nach \underline{d}_2 auflösbar ist, so daß man schreiben kann

$$\underline{\underline{d}}_2 = \text{Dev}(\beta \underline{\underline{S}} + \gamma \underline{\underline{S}}^2).$$

Wenn dieser Ausdruck für $\underline{\underline{d}}_2$ in die Gl. (8.1) eingesetzt wird und das Ergebnis nachfolgend in Gl. (8.2), so erhält man folgende Tensor-differentialgl. für $\underline{\underline{\Lambda}}_1$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\underline{\Lambda}}_1}{dt} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}_1 - \underline{\underline{\Lambda}}_1 \cdot \underline{\underline{\Omega}} &\equiv \underline{\underline{\Lambda}}^{\nabla} = \\ &= -[d - \text{Dev}(\beta \underline{\underline{S}}_1 + \gamma \underline{\underline{S}}_1^2)] \cdot \underline{\underline{\Lambda}}_1 - \underline{\underline{\Lambda}}_1 \cdot [d - \text{Dev}(\beta \underline{\underline{S}}_1 + \gamma \underline{\underline{S}}_1^2)] \\ t = 0 \quad \underline{\underline{\Lambda}}_1 &= \underline{\underline{E}}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Es wurde vorausgesetzt, daß hier $\underline{\underline{S}}_1$ durch $\underline{\underline{\Lambda}}_1$ entsprechend Gl. (8.3) ausgedrückt wurde.

Aus der Lösung der Gl. (8.5) kann man $\underline{\underline{\Lambda}}_1(\underline{r}, t)$ entsprechend der Vorgeschichte der Änderung von $\underline{\underline{d}}, \underline{\underline{\Omega}}, \rho$ und Θ ermitteln. Damit kann man unter Einbeziehung der Gln. (8.3) $\underline{\underline{S}}, F_x, S_x$ definieren. Folglich erhält man als konstitutive Gleichungen für das Maxwell-Material das System (8.3) und (8.5). Bei Verwendung einer etwas anderen Argumentation kamen andere Autoren zu ähnlichen Gleichungen [7], [8].

8.2. Das verallgemeinerte Kelvin-Voigtsche Material

Das entsprechende rheologische Modell ist auf Bild 6 dargestellt. Es ergibt sich durch Reihenschaltung von n gleichartigen Kelvin-Voigt-Elementen und eines elastischen Elementes.

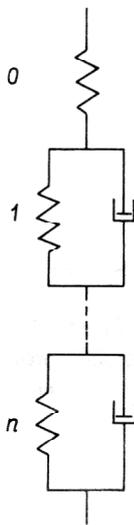


Bild 6
Das verallgemeinerte Modell von Kelvin und Voigt

Entsprechend den Bedingungen für die Verbindung der Kraftgrößen erhält man

$$\underline{\underline{S}} = -2\rho \text{Dev} \left(\frac{\partial F_x}{\partial I_{10}} \underline{\underline{\Lambda}}_0 + \frac{\partial F_x}{\partial I_{20}} \underline{\underline{\Lambda}}_0^2 \right) \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}} &= 2 \text{Dev} \left[-\rho \left(\frac{\partial F_x}{\partial I_{1k}} \underline{\underline{\Lambda}}_k + \frac{\partial F_x}{\partial I_{2k}} \underline{\underline{\Lambda}}_k^2 \right) + \eta_k \underline{\underline{d}}_k^2 + \varphi_k \underline{\underline{d}}_k^2 \right] \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$S_x = -\frac{\partial F_x}{\partial \Theta}, \quad F_x = \sum_{k=0}^n F_{xk}(\Theta, I_{1k}, I_{2k}).$$

An dieser Stelle sei auch an die Gln.

$$|\underline{\underline{\Lambda}}_k| = -1, \quad (8.8)$$

$$\frac{d\underline{\underline{\Lambda}}_k}{dt} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}}_k - \underline{\underline{\Lambda}}_k \cdot \underline{\underline{\Omega}} \equiv \underline{\underline{\Lambda}}^{\nabla} = -\underline{\underline{d}}_k \cdot \underline{\underline{\Lambda}}_k - \underline{\underline{\Lambda}}_k \cdot \underline{\underline{d}}_k, \quad (8.9)$$

$$t = 0 \quad \underline{\underline{\Lambda}}_k = \underline{\underline{E}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

erinnert. Schließlich gelten folgende kinematische Bedingungen für die Verbindungen der Kelvin-Voigt-Elemente

$$\underline{\underline{d}} = \sum_{k=0}^n \underline{\underline{d}}_k. \quad (8.10)$$

Das Gleichungssystem (8.6), (8.7), (8.8), (8.9) gestattet entsprechend der Vorgeschichte von $\underline{\underline{S}}, \rho, \Theta$ und $\underline{\underline{\Omega}}$ $\underline{\underline{d}}_k$ und weiterhin nach (8.10) $\underline{\underline{d}}$ zu bestimmen. Die Änderungsgeschichte von $\underline{\underline{\Lambda}}$ kann man nach

$$\frac{d\underline{\underline{\Lambda}}}{dt} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} - \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \equiv \underline{\underline{\Lambda}}^{\nabla} = -\underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{\Lambda}} - \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{d}} \quad (8.11)$$

$$t = 0, \quad \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{E}}.$$

Somit erhält man die konstitutiven Gleichungen für ein Material, dem das verallgemeinerte rheologische Modell von Kelvin und Voigt zugrunde liegt. Sie entsprechen dem Vorschlag der Autoren der Arbeiten [9], [10] zur Beschreibung des Verhaltens viskoelastischer Materialien bei großen Deformationen (übertragen in die Sprache der rheologischen Modelle).

8.3. Elastisch-plastisches Material mit kinematischer Verfestigung

Das rheologische Modell dieses Materials ist auf Bild 7 gezeigt. Entsprechend den Gesetzen der Parallelschaltung erhält man

$$\underline{\underline{S}} = -2\rho \text{Dev} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_x}{\partial I_{1k}} \underline{\underline{\Lambda}}_k + \frac{\partial F_x}{\partial I_{2k}} \underline{\underline{\Lambda}}_k^2 \right) \quad (8.12)$$

$$F_x = \sum_{k=1}^n F_{xk}(\Theta, \underline{\underline{\Lambda}}_k), \quad S_x = -\frac{\partial F_x}{\partial \Theta}.$$

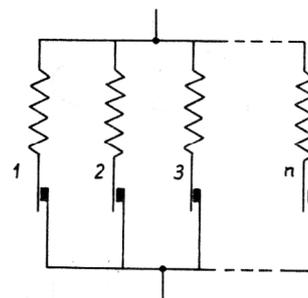


Bild 7
Das rheologische Modell für elastisch-plastisches Material mit kinematischer Verfestigung

Bei der Beschreibung der plastischen Elemente wird die einfachste konstitutive Gl. verwendet, wobei

$$\underline{f}_k(\underline{d}_k) = \underline{d}_k \quad (8.13)$$

gesetzt wird und anschließend Gl. (5.11) nach \underline{d}_k gelöst wird. Dabei erhält man

$$\underline{d}_k = \lambda_k \underline{S}_k, \quad (8.14)$$

wobei die Gln. (8.15) gelten sollen

$$\begin{cases} N(\underline{S}_k) \leq K_k & \lambda_k = 0 \\ N(\underline{S}_k) = K_k & \lambda_k \geq 0, \quad \lambda_k = \frac{N(\underline{d}_k)}{K_k} \end{cases} \quad (8.15)$$

Unter Beachtung der Gesetze der Reihenschaltung für das elastische und das plastische Element in jedem der parallel arbeitenden elastisch-plastischen Elementen erhält man

$$\underline{\Lambda}_k^{\nabla} = -2 [(\underline{d} - \lambda_k \underline{S}_k) \cdot \underline{\Lambda}_k] \underline{J}^S, \quad (8.16)$$

$$\underline{S}_k = -2\rho \left(\frac{\partial F_x}{\partial I_{1k}} \underline{\Lambda}_k + \frac{\partial F_x}{\partial I_{2k}} \underline{\Lambda}_k^2 \right). \quad (8.17)$$

Das Gleichungssystem (8.12), (8.15), (8.16) und (8.17) stellt das System der konstitutiven Gleichungen des elastisch-plastischen Materials mit anisotroper (kinematischer) Verfestigung dar.

Weitere Beispiele kann man in den Arbeiten [1], [6] finden.

9. Die Zugaufgabe für den zylindrischen Stab

In einer Reihe für technische Anwendungen wichtiger Aufgaben kann man feststellen, daß die Volumendeformationen im Vergleich zu den Formänderungsdeformationen vernachlässigbar klein sind. Diese Tatsache gibt die Grundlage für die Verwendung des Modells „inkompressibles Material“. Zu der genannten Aufgabenklasse gehört auch die Zugaufgabe für den zylindrischen Stab. Zunächst wird ein Stab mit beliebigem Querschnitt betrachtet (Bild 8). Dabei gilt

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{e}_x x + \underline{e}_y y + \underline{e}_z z, \\ \underline{R} &= \underline{e}_x X + \underline{e}_y Y + \underline{e}_z Z. \end{aligned} \quad (9.1)$$

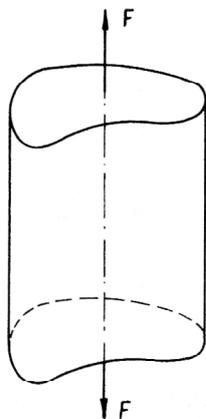


Bild 8
Zur Zugaufgabe für den zylindrischen Stab

Das Deformationsgesetz sei wie folgt gegeben

$$z = Z \alpha(t), \quad x = \frac{X}{\sqrt{\alpha(t)}}, \quad y = \frac{Y}{\sqrt{\alpha(t)}} \quad (9.2)$$

Dies entspricht einer Dehnung des Stabes in Richtung der Stabachse – der z-Achse – wobei die relative Verlängerung den Wert

$$\epsilon = \frac{Z - z}{z} = \frac{1}{\alpha} - 1 \quad (9.3)$$

hat. Mit Hilfe des Ausdrucks (9.2) ist gleichzeitig eine solche Querkontraktion im Stab eingeführt, bei der die Inkompressibilitätsbedingung

$$\pi(x^2 + y^2) z = \pi(X^2 + Y^2) Z$$

identisch erfüllt ist.

Unter Beachtung der Gln. (9.2) lassen sich die Gln. (9.1) wie folgt schreiben

$$\underline{r} = \underline{e}_x \frac{X}{\sqrt{\alpha}} + \underline{e}_y \frac{Y}{\sqrt{\alpha}} + \underline{e}_z Z \alpha \quad (9.4)$$

$$\underline{R} = \underline{e}_x x \sqrt{\alpha} + \underline{e}_y y \sqrt{\alpha} + \underline{e}_z \frac{z}{\alpha}$$

Die Geschwindigkeiten für die materiellen Teilchen erhält man durch Differentiation nach der Zeit

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \frac{d\underline{R}}{dt} = \left(\underline{e}_x \frac{x}{2\sqrt{\alpha}} + \underline{e}_y \frac{y}{2\sqrt{\alpha}} - \underline{e}_z \frac{z}{\alpha^2} \right) \frac{d\alpha}{dt} = \\ &= \left(\underline{e}_x \frac{X}{2} + \underline{e}_y \frac{Y}{2} - \underline{e}_z Z \right) \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Hieraus erhält man problemlos

$$\underline{d} = \underline{D} = (\underline{\nabla} \underline{v})^S, \quad \underline{\Omega} = (\underline{\nabla} \underline{v})^A = 0, \quad (9.6)$$

$$\underline{d} = \left(\frac{1}{2} \underline{e}_x \underline{e}_x + \frac{1}{2} \underline{e}_y \underline{e}_y - \underline{e}_z \underline{e}_z \right) \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$$

Weiterhin gilt entsprechend (9.4)

$$\underline{\Lambda} = \underline{e}_x \underline{e}_x \frac{1}{\alpha} + \underline{e}_y \underline{e}_y \frac{1}{\alpha} + \underline{e}_z \underline{e}_z \alpha^2. \quad (9.7)$$

Aus den Gln. (9.6) und (9.7) ist zu erkennen, daß die Tensoren \underline{d} und $\underline{\Lambda}$ diagonal sind, wobei diese folgende Elemente auf der Diagonalen besitzen

$$d_x = d_y = \frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dt}, \quad d_z = -\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}, \quad (9.8)$$

$$\Lambda_x = \Lambda_y = \frac{1}{\alpha}, \quad \Lambda_z = \alpha^2. \quad (9.9)$$

Die Elemente hängen nicht von den Koordinaten x , y oder z ab. Es wird vorausgesetzt, daß die Temperatur Θ im Stab nicht von den Koordinaten x , y , z und der Zeit t abhängt. Dieser Fall tritt bei guter Wärmeleitung im Material und guter Wärmeabfuhr an der Oberfläche ein. Damit erhält man unter Beachtung von (9.8), (9.9), daß der Spannungstensor ebenfalls nicht von den Koordinaten x , y , z abhängt und diagonal ist.

Weiterhin soll gelten, daß die Mantelfläche belastungsfrei ist. Dies tritt ein, wenn

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

ist. Die einzige von Null verschiedene Normalspan-

nung σ_z läßt sich durch die in Längsrichtung wirkende Zugkraft F wie folgt ausdrücken

$$F = \alpha A \sigma_z, \quad (9.10)$$

wobei A der ursprüngliche Stabquerschnitt (vor der Deformation) ist.

Im weiteren wird der funktionelle Zusammenhang zwischen F und α für Materialien mit den im Artikel eingeführten konstitutiven Gleichungen beschrieben. Diese enthielten die Tensoren $\underline{\Lambda}_k$. In den nachfolgenden Untersuchungen kann man für diese folgende Werte annehmen

$$\Lambda_{kx} = \Lambda_{ky} = \frac{1}{\gamma_k}, \quad \Lambda_{kz} = \gamma_k^2. \quad (9.11)$$

1. Das Material entsprechend dem Maxwell-Modell. In den Gln. (8.3), (8.4), (8.5) setzt man

$$F_x = \frac{A_1}{2\rho_0} (I_{11} - 3), \quad \varphi = 0, \quad \eta = \text{konst.} \quad (9.12)$$

Damit läßt sich mit Hilfe von (8.3) die z-Komponente des Spannungstensors ermitteln

$$S_z = \frac{2}{3} \sigma_z = \frac{2}{3} A_1 \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma^2 \right).$$

Daraus folgt

$$F = A \alpha A_1 \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma^2 \right). \quad (9.13)$$

Analog werden die z-Komponenten in der Gl. (8.5) betrachtet

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{A_1}{3\eta} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma^2 \right). \quad (9.14)$$

Folgende Anfangsbedingungen gelten

$$t = 0 \quad \alpha = 1, \quad \gamma = 1. \quad (9.15)$$

Mit Hilfe der Gln. (9.13) und (9.14) kann man die Relaxation der Kraft untersuchen. Zunächst soll α sich sprunghaft von 1 auf α_0 ändern und anschließend konstant gehalten werden. Es ist das Änderungsgesetz für die Belastung F zu ermitteln. Dazu sind zwei Etappen zu betrachten. In der ersten Etappe ändert sich α sprunghaft. Aus der Gl. (9.14) und den Anfangsbedingungen (9.15) wird klar, daß γ sich ebenfalls sprunghaft von 1 auf α_0 ändert. Dabei nimmt die Belastung den Wert

$$F = F_0 = A A_1 (1 - \alpha_0^2) \quad (9.16)$$

an. In der zweiten Etappe bleibt α konstant ($\alpha = \alpha_0$) und für γ erhält man aus (9.14) folgende Cauchysche Aufgabe

$$\frac{3}{1 - \gamma^3} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{A_1}{\eta}, \quad t = +0 \quad \gamma = \alpha_0. \quad (9.17)$$

Die Integration führt auf

$$\Phi(\gamma) - \Phi(\alpha_0) = - \frac{A_1}{\eta} t, \quad (9.18)$$

wobei $\Phi(\gamma)$ wie folgt definiert ist

$$\Phi(\gamma) = \frac{1}{2} \ln \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2 + \gamma + 1} - \sqrt{3} \arctan \frac{\gamma\sqrt{3}}{2+\gamma}. \quad (9.19)$$

Mit der Berechnung von γ aus (9.18) und dem nachfolgenden Einsetzen in Gl. (9.13) erhält man das Änderungsgesetz der Belastung F mit der Zeit. Beispielsweise kann der Wert der relativen Änderungsgeschwindigkeit der Belastung F bei $t \rightarrow +0$ wie folgt ermittelt werden. Mit Hilfe von (9.13) und (9.17) erhält man

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dt} \Big|_{t \rightarrow +0} = - \frac{1 + 2\alpha_0^3}{\alpha_0} \frac{A_1}{3\eta}. \quad (9.20)$$

Die Gln. (9.16) und (9.20) enthalten die leicht meßbaren Größen α_0 , F_0 und $\frac{dF}{dt} \Big|_{t=+0}$. Aus den Meßergebnissen kann man die Materialparameter A_1 und η bestimmen.

2. Das verallgemeinerte Material von Kelvin und Voigt. Wie im vorhergehenden Fall gilt

$$F_{xk} = \frac{A_k}{2\rho_0} (I_{1k} - 3) \quad (9.21)$$

$$\varphi_k = 0, \quad \eta_k = \text{konst.}$$

Mit Hilfe der Gln. (8.6), (8.7) ermittelt man σ_z und nachfolgend F nach (8.9). Dabei erhält man

$$F = A \alpha [A_k \left(\frac{1}{\gamma_k} - \gamma_k^2 \right) - 3\eta_k \frac{1}{\gamma_k} \frac{d\gamma_k}{dt}], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (9.22)$$

$$F = A \alpha A_0 \left(\frac{1}{\gamma_0} - \gamma_0^2 \right). \quad (9.23)$$

Die Gln. (8.9) ergeben

$$d_{kx} = d_{ky} = \frac{1}{2\gamma_k} \frac{d\gamma_k}{dt}, \quad d_{kz} = - \frac{1}{\gamma_k} \frac{d\gamma_k}{dt}. \quad (9.24)$$

Unter Beachtung der Beziehungen (9.8), (8.10) erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i} \frac{d\gamma_i}{dt}.$$

Die Anfangsbedingungen lauten

$$t = 0 \quad \alpha = \gamma_k = 1. \quad (9.25)$$

Das entsprechende Integral ist

$$\alpha = \prod_{i=1}^n \gamma_i. \quad (9.26)$$

Das Gleichungssystem (9.22), (9.23), (9.26) zusammen mit den Anfangsbedingungen (9.25) ermöglicht die Bestimmung der Funktion $\alpha = \alpha(t)$ entsprechend der Funktion $F = F(t)$. Ausführlicher wird der Fall $n = 1$ dargestellt. Dann erhält man

$$F = A \alpha [A_1 \left(\frac{1}{\gamma_1} - \gamma_1^2 \right) - 3\eta_1 \frac{1}{\gamma_1} \frac{d\gamma_1}{dt}], \quad (9.22 a)$$

$$F = A \alpha A_0 \left(\frac{1}{\gamma_0} - \gamma_0^2 \right), \quad (9.23 a)$$

$$\alpha = \gamma_0 \gamma_1. \quad (9.26 a)$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen werden jetzt die charakteristischen Besonderheiten der Kriechprozesse unter

sucht. Die Belastung F soll sich sprunghaft von 0 auf F ändern und anschließend konstant bleiben. Da die Gl. (9.21 a) die Ableitung der Funktion γ_1 enthält, darf sich γ_1 nicht sprunghaft ändern. Die Gl. (9.23 a) enthält keine Ableitung. Folglich kann sich γ_0 und damit auch α sprunghaft ändern. Somit ergibt sich

$$t = +0 \quad \gamma_1 = 1 \quad \alpha = \gamma_0 = \alpha_+ \quad (9.27)$$

und man erhält in den Gln. (9.22 a), (9.23 a)

$$F = -3 A \alpha_+ \eta_1 \frac{d\gamma_1}{dt}, \quad (9.22 b)$$

$$F = A A_0 (1 - \alpha_+^3). \quad (9.23 b)$$

Wenn man α_+ experimentell bestimmt, so kann man mit Hilfe der Gl. (9.23 b) den Materialparameter A_0 – Modul der momentanen Elastizität – ermitteln.

Unter Einbeziehung der Gln. (9.26 a), (9.23 a) und (9.22 b) läßt sich die Deformationsgeschwindigkeit $\frac{d\alpha}{dt}$ sofort nach Beginn des Lastangriffs, d. h. bei $t = +0$, bestimmen. Dies führt zu

$$F = -3 \eta_1 A \left[1 - \frac{F}{A A_0 (1 + 2 \alpha_+^3)} \right] \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=+0}. \quad (9.28)$$

Wenn man die Kriechgeschwindigkeit experimentell bei $t = +0$ bestimmen kann, so läßt sich folglich der Parameter η_1 – der Viskositätskoeffizient – ermitteln. Jetzt lassen sich zwei Varianten betrachten:

a) Das Material besitzt ein begrenztes Kriechvermögen. Das bedeutet, daß bei $t \rightarrow \infty$ die Deformationen gegen einen endlichen Wert streben

$$\alpha \rightarrow \alpha_*, \quad \gamma_0 \rightarrow \gamma_{0*}, \quad \gamma_1 \rightarrow \gamma_{1*}.$$

Aus den Gln. (9.22 a), (9.23 a), (9.26 a) folgt

$$F = A A_1 \gamma_{0*} (1 - \gamma_{1*}^3),$$

$$F = A A_0 \gamma_{1*} (1 - \gamma_{0*}^3), \quad (9.29)$$

$$\alpha = \gamma_{0*} \gamma_{1*}.$$

Wenn man α_* experimentell bestimmen kann, so läßt sich unter Verwendung des Systems (9.29) A_1 , γ_{0*} und γ_{1*} ermitteln. Damit sind alle Materialparameter definiert.

b) Das Material besitzt ein unbegrenztes Kriechvermögen. Dann gibt es zwei Möglichkeiten

$$\alpha \rightarrow 0, \quad \gamma_1 \rightarrow 0, \quad \gamma_0 \rightarrow 0$$

$$\alpha \rightarrow \infty, \quad \gamma_1 \rightarrow \infty, \quad \gamma_0 \rightarrow 1.$$

Die erste Möglichkeit entspricht einem unbegrenzten Kriechvermögen bei Zugbeanspruchung, die zweite bei Druckbeanspruchung.

Zunächst wird der zweite Fall betrachtet. Dieser Fall bedeutet, daß das Gleichungssystem (9.29) bei $\gamma_{k*} > 1$ keine Lösung besitzt. Dies ist nur bei $A_1 = 0$ möglich.

Der erste Fall entsprach einer Zugbeanspruchung. Wenn $A_1 = 0$ ist, so hat das System (9.29) keine Lösung und folglich erhält man für beliebige Belastungen F ein unbegrenztes Kriechvermögen. Wenn $A_1 \neq 0$ und $A_1 < A_0$

gilt, so existiert für kleine F eine Lösung des Systems (9.29), d. h. man erhält ein begrenztes Kriechvermögen. Wenn $F > A_1 A$ ist, so besitzt (9.29) erneut keine Lösung, d. h. man erhält unbegrenztes Kriechvermögen. Daraus kann man folgenden Rückschluß ziehen: wenn ein unbegrenztes Kriechvermögen bei beliebigen, noch so kleinen Belastungen F existiert, so muß $A_1 = 0$ werden. Wenn ein kompliziertes Materialverhalten vorliegt, so sollte A_1 aus dem Zugversuch ermittelt werden, da hier bei $A_1 \neq 0$ der Fall a) realisiert wird.

Dem Leser soll an dieser Stelle auch nicht verschwiegen werden, daß der Fall $n > 1$ eine tiefere theoretische Analyse und experimentelle Absicherung erfordert.

3. Elastisch-plastisches Material mit kinematischer Verfestigung. Analog zu den vorhergehenden Ausführungen erhält man folgende Gln.

$$F = \sum_{i=1}^n F_i \quad (9.30)$$

$$F_i = A A_i \alpha \left(\frac{1}{\gamma_i} - \gamma_i^2 \right), \quad (9.31)$$

$$\frac{1}{\gamma_i} \frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{2\lambda_i}{3} A_i \left(\frac{1}{\gamma_i} - \gamma_i^2 \right), \quad (9.32)$$

$$\left[\begin{array}{l} A_i \left| \frac{1}{\gamma_i} - \gamma_i^2 \right| < \tilde{K}_i = \sqrt{3} K_i, \lambda_i = 0 \\ A_i \left| \frac{1}{\gamma_i} - \gamma_i^2 \right| = \tilde{K}_i = \sqrt{3} K_i, \lambda_i \geq 0. \end{array} \right. \quad (9.33)$$

Als Norm wird hier die Norm von v. Mises verwendet

$$N(\underline{S}) = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{S} \underline{S}}.$$

Folgende Anfangsbedingungen gelten

$$t = 0 \quad \alpha = 1 \quad \gamma_1 = 1. \quad (9.34)$$

Auf den Stab soll eine Belastung wirken (Zug- oder Druckbelastung). Auf Grund der Anfangsbedingungen werden die erste Zeit nach Belastungsbeginn die Bedingungen der ersten Zeile (9.33) in allen Elementen i erfüllt. Folglich gilt $\lambda_i = 0$ und aus (9.32) kann man problemlos

$$\gamma_i = \alpha \quad i = 1, 2, \dots, n$$

erhalten. Nach Einsetzen dieses Wertes in (9.30) und (9.31) erhält man den Ausdruck für die Belastung in der Anfangsetappe der Belastung

$$F = A \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) (1 - \alpha^3). \quad (9.35)$$

Bei einem bestimmten Wert $\alpha = \alpha_1$ wird im ersten Element (mit dem kleinsten Verhältnis $\frac{K_i}{A_i}$) die Bedingung

der zweiten Zeile (9.33) erfüllt. Der entsprechende Wert $\gamma_1 = \alpha_1$ wird mit γ_1^+ und γ_1^- bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$\gamma_1^+ > 1, \quad \gamma_1^- < 1.$$

Bei einer weiteren Belastung bleibt der Wert γ_1 konstant und ist gleich γ_1^+ oder γ_1^- in Abhängigkeit vom Vorzeichen

chen von $\frac{d\alpha}{dt}$. In diesem Fall hat man auf der zweiten

Etappe der Verformung

$$\frac{d\alpha}{dt} < 0, \quad \gamma_1 = \gamma_1^-, \quad A_i \left(\frac{1}{\gamma_1} - \gamma_1^2 \right) = + \tilde{K}_1,$$

$$\frac{d\alpha}{dt} > 0, \quad \gamma_1 = \gamma_1^+, \quad A_i \left(\frac{1}{\gamma_1} - \gamma_1^2 \right) = - \tilde{K}_1.$$

Wenn man diese Werte in die Gln. (9.30), (9.31) einsetzt werden, erhält man:

$$\frac{d\alpha}{dt} < 0, \quad F = A \tilde{K}_1 + A \left(\sum_{i=2}^n A_i \right) (1 - \alpha^3),$$

$$\frac{d\alpha}{dt} > 0, \quad F = -A \tilde{K}_1 + A \left(\sum_{i=2}^n A_i \right) (1 - \alpha^3).$$

Der Vergleich dieser Funktionen mit (9.35) ergibt einen Knick im Verlauf der Kurve $F = F(\alpha)$. Der Wert F bei $\alpha = \alpha_1$ wird mit F_1 bezeichnet. Nach (9.35) gilt

$$F_1 = \left(\sum_{i=1}^n A_i \right) (1 - \alpha_1^3).$$

Wenn experimentelle Daten von F_1 und α_1 vorliegen, so erhält man nach dieser Formel

$$\sum_{i=1}^n A_i = \frac{F_1}{1 - \alpha_1^3}. \quad (9.36)$$

Die Fließbedingung im ersten Element kann man mit Hilfe von (9.33) erhalten

$$\tilde{K}_1 = A_1 \left| \frac{1}{\alpha_1} - \alpha_1^2 \right|. \quad (9.37)$$

Bei weiterer Belastung erreicht man die Fließgrenze im zweiten plastischen Element. Dies geschieht bei $\alpha = \alpha_2$ ($= \gamma_2^+, \gamma_2^-$). Das Gesetz der nachfolgenden Verformungen lautet offensichtlich

$$\frac{d\alpha}{dt} < 0, \quad F = A (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2) \alpha + A \left(\sum_{i=3}^n A_i \right) (1 - \alpha^3),$$

$$\frac{d\alpha}{dt} > 0, \quad F = -A (\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2) \alpha + A \left(\sum_{i=3}^n A_i \right) (1 - \alpha^3).$$

Damit erhält man wieder einen Knick. Der Wert für F an der zweiten Knickstelle wird mit F_2 bezeichnet. Es gilt

$$F_2 = \pm A \tilde{K}_1 \alpha_2 + A \left(\sum_{i=2}^n A_i \right) (1 - \alpha_2^3).$$

Unter Verwendung von (9.36) kann man diese Beziehung anders schreiben

$$F_2 = \pm A \tilde{K}_1 \alpha_2 + A \left(\frac{F_1}{1 - \alpha_1^3} - A_1 \right) (1 - \alpha_2^3).$$

Gemeinsam mit (9.37) bildet diese Gl. ein System zur Ermittlung der Materialparameter A_1 und \tilde{K}_1 .

Wenn die Analyse der Deformationen in dieser Form fortgesetzt wird, so kann man alle Materialparameter des Modells bestimmen.

LITERATUR

- [1] Пальмов В. А. Колебания упруго-пластических тел, Москва, Наука, 1976.
- [2] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред (перевод под редакцией А. И. Лурье и П. А. Жилина), Москва, Наука, 1975.
- [3] Truesdell, C. Rational Thermodynamics. Mc Graw-Hill, 1969.
- [4] Лурье А. И. Теория упругости, Москва, Наука, 1970.
- [5] Reiner, M. Rheologie. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1968.
- [6] Пальмов В. А. Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел, Успехи механики, 3 (1980), 3, 76 - 115.
- [7] Гудонов С. К., Раменский Е. И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в Эйлеровых координатах, ПМТФ, 1972, 6.
- [8] Леонов А. И. Об описании реологического поведения упруговязких сред при больших упругих деформациях, Институт проблем механики АН СССР, Препринт 34, 1973.
- [9] Balke, H., Bergander, H. Zum Potential der Materialfunktionen nichtlinearer viskoelastischer Stoffe. Acta Mechanica, 40, 1981.
- [10] Bergander, H., Günther, H., Reher, E.-O., Schneider, J. Numerische Lösungsmethoden in der Rheologie, 1. Mechanik-Kongress der DDR, 31. 10. - 4. 11. 83, Karl-Marx-Stadt, Vortragsauszüge.

Адрес автора:

Prof. Dr. sc. nat. Wladimir A. Palmow
Leningrader Polytechnisches Institut „M. I. Kalinin“
Lehrstuhl für Mechanik und Regelungsprozesse
SU-195 251 Leningrad/UdSSR
Polytechnitscheskaja ul. 29